

Fernando R. González Díaz, Guillermo R. Moreno Rodríguez, Emilio Luis Puebla, Ricardo García Salcedo
La topología del truco de las tijeras de Dirac
Ciencia Ergo Sum, vol. 14, núm. 1, marzo-junio, 2007, pp. 107-112,
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10414114>



Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

¿Cómo citar?

Fascículo completo

Más información del artículo

Página de la revista

www.redalyc.org

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto



Recepción: 29 de marzo de 2006
Aceptación: 19 de julio de 2006

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México.

Correo electrónico: fgonzale1@yahoo.com

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

***Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

****Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Unidad Monterrey

La topología del truco de las tijeras de Dirac

Fernando R. González Díaz*, Guillermo R. Moreno Rodríguez **†, Emilio Lluís Puebla*** y Ricardo García Salcedo****

Dedicado a Guillermo Moreno

Resumen. En los años veinte, el físico inglés Paul Dirac ejemplificó de forma casi recreativa una de las partículas que componen la materia, conocido como espín. En este trabajo se muestra tanto la ejemplificación de Dirac, como algunas otras que se pueden encontrar en la literatura. Además, se presenta un esbozo de la demostración matemática del fenómeno utilizando topología algebraica.

Palabras clave: espín semientero, grupo fundamental, cuaternios, homotopía.

Dirac's Scissors Trick Topology

Abstract. In the twenties, the English physicist Paul Dirac, in a recreational or pedagogical form, exemplified a property that appears in the elementary particles that is made the matter so called spin. In this work we present some forms in which we can exemplify this phenomenon and others that can be found in literature. In addition, an outline of the mathematical demonstration of the phenomenon is given using algebraic topology.

Key words: Half-integer spin, Fundamental group, Quaternion, Homotopy.

Introducción

Se sabe que al movimiento de la Tierra se le asocian los tipos de momento angular: el angular orbital, debido al movimiento alrededor del Sol; y el angular intrínseco, debido a la rotación de la Tierra sobre su eje. De la misma manera, el electrón posee un momento angular orbital que caracteriza al movimiento del electrón alrededor del núcleo y un momento angular intrínseco, el cual se comporta como si el electrón estuviera girando alrededor de su eje. Por esta razón, al momento angular intrínseco se le llama generalmente el espín intrínseco. El concepto de electrón –esfera cargada que gira sobre su eje– resulta muy útil, tal como lo fue

Niels Bohr en el modelo del átomo de hidrógeno. Desafortunadamente no es un concepto correcto. Sin embargo, sucede frecuentemente en el progreso de la ciencia que la idea correcta es introducida por el motivo erróneo. Después de que S.A. Goudsmit y G.E. Uhlenbeck introdujeron el concepto del espín electrónico en 1925, Paul Andrew Maurice Dirac demostró que con la teoría cuántica relativista del electrón apropiada, el espín electrónico resulta directamente como un número cuántico adicional.

El electrón tiene como espín el valor de $1/2$, lo cual quiere decir que su estado es alterado por una rotación de 2π sobre algún eje, pero éste regresa a su estado original por una rotación de 4π . De hecho, cualquiera de las partículas elementales

en la naturaleza clasificadas como fermiones (electrones, protones, neutrones, neutrinos, etc.), poseen lo que los físicos llaman “espín semientero”. Los fermiones se clasifican en hadrones y leptones, los cuales se diferencian si son o no afectados por la interacción nuclear débil, respectivamente. Los fermiones cumplen con el principio de exclusión de Pauli, lo cual hace posible que los orbitales se llenen de la forma en la que lo hacen, hecho muy importante en química.

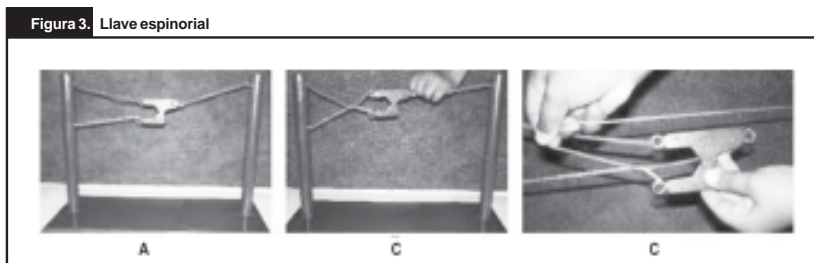
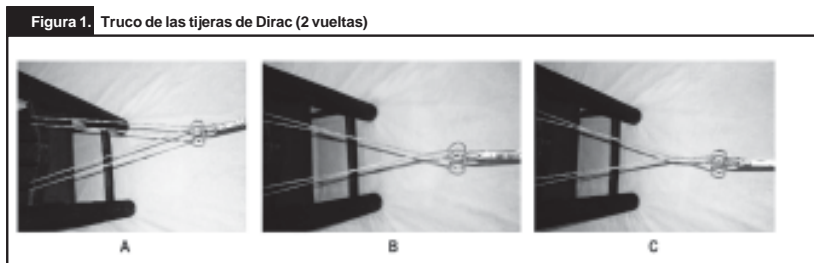
Es importante aclarar que no analizaremos el caso de los bosones, en específico el de las partículas que tienen espín uno, por que no representa ningún hecho particularmente interesante el que se gire una vuelta completa una partícula y ésta regrese a su configuración inicial, ya que este fenómeno se observa a niveles macroscópicos.

El artículo está distribuido de la siguiente manera, en las primeras tres secciones se muestran cuatro distintas analogías para el fenómeno del espín semientero.

En la sección 5, se enlaza la estructura algebraica de los números cuaterniones con el fenómeno del espín semientero. En la sección 6 se describe de manera sucinta la demostración topológica del fenómeno. Finalmente, se dan algunos comentarios finales.

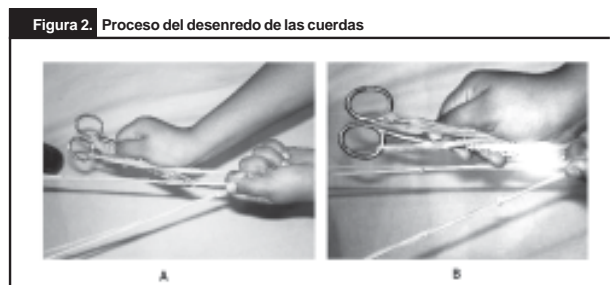
1. El problema de las tijeras de Dirac

Dirac dio una notable e ingeniosa demostración, con elementos cotidianos, de cómo el estado de un ‘objeto’ puede ser alterado en su espacio al aplicarle una rotación de 2π . Sin embargo, este objeto regresa a su estado original al aplicarle una rotación de 4π . A esta demostración se le conoce con el nombre del problema de las tijeras de Dirac (Naber, 2003).



Los elementos de la demostración consisten en un par de tijeras, una cuerda elástica y una silla. Primero construyamos el objeto, para esto pase la cuerda por uno de los agujeros de las tijeras, deslízcala hasta uno de los barrotes del respaldo de la silla rodeándolo; después, regréselo a las tijeras introduciéndolo al segundo agujero. Continúe la cuerda hasta rodear al segundo barrote del respaldo de la silla. Por último, ate los dos extremos de la cuerda, como se muestra en la figura 1A.

A este estado de las tijeras, le llamamos posición inicial o trivial y la denotamos por C_0 . Ahora las tijeras se rotan alrededor de su eje de simetría 2π (una vuelta completa) y las cuerdas se enredan, a esta posición la denotamos por C_1 , como se muestra en la figura 1B. Claramente las tijeras vuelven a su estado original, pero las cuerdas no, ya que éstas se enredaron.



Desearíamos desenredar las cuerdas únicamente manipulándolas (conservando las tijeras y la silla fija). Sin embargo, no importa la maniobra simple o complicada que se aplique a las cuerdas, éstas no regresan a su estado original C_0 . Este hecho podría no sorprender al lector.

Repitamos el ejercicio, esta vez rotando las tijeras alrededor de su eje de simetría 4π (dos vueltas completas). Las cuerdas parecen estar más enredadas, como se muestra en la figura 1C; pero jalando la cuerda hasta la punta de las tijeras y pasándola por debajo de éstas, las cuerdas regresan a su estado original C_0 , como se puede ver en el procedimiento de la figura 2.

En general, podríamos rotar las tijeras un número impar de veces, y al tratar de desenredar las cuerdas nos resultaría imposible. Pero si rotamos las tijeras un número par de veces, lograríamos desenredar las cuerdas.

2. La llave espinorial

En este experimento se requiere una llave de mecánico, tres cuerdas elásticas y dos postes fijos (Bolker, 1976). Aquí, la forma de la llave juega un papel impor-

tante, ya que ésta debe ser suficientemente asimétrica para que cualquier rotación propia sea fácilmente reconocida. Ahora procederemos a atarla con las tres cuerdas elásticas a los postes fijos, como se muestra en la figura 3A. Posteriormente podemos ver que cuando giramos la cuerda una vuelta de 2π , las cuerdas se enredan, ver figura 3B.

El problema es desenredar las cuerdas manteniendo fijos la llave y los postes. Como en el experimento anterior, no importa la maniobra que se haga con las cuerdas; éstas no se desenredarán. Sin embargo, al rotar la llave nuevamente, pero ahora dos vueltas 4π , las cuerdas aparentarán estar peor enredadas pero éstas se desenredarán con un movimiento cuidadoso, semejante al efectuado con las tijeras de Dirac, ver figura 3C.

3. El cubo de Dirac

Para esta demostración se necesita un cubo sólido, con sus caras enumeradas o pintadas de diferente color para que se mantenga el orden al rotarlo, un ‘armazón’ en forma de cubo construido sólo por las aristas y 8 cuerdas elásticas (Naber, 2003). Todo lo anterior debe disponerse de tal forma que cada esquina del cubo sólido esté conectada a su correspondiente vértice del armazón con una cuerda elástica, como se muestra en la fotografía 4A.

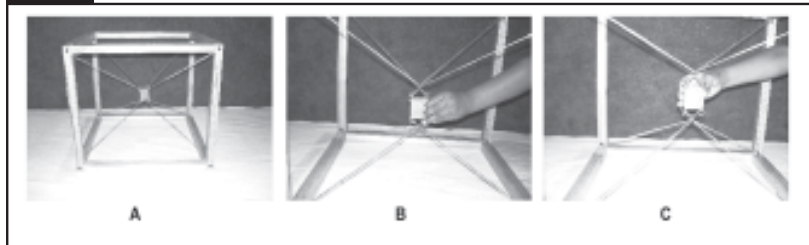
Una vez teniendo la disposición anterior, procederemos a aplicarle al cubo sólido una rotación de 2π alrededor de cualquier eje. Las cuerdas se enredan y ninguna manipulación de las cuerdas, nuevamente manteniendo el cubo sólido y el armazón fijos, deja al cubo sólido en su estado original con las cuerdas desenredadas. Esta operación se muestra en la fotografía 4B.

Si ahora realizamos nuevamente la operación pero ahora rotándolo un ángulo de 4π alrededor de cualquier eje de simetría, las cuerdas aparentan estar más enredadas, como se observa en la figura 4C. Pero algunos movimientos cuidadosos de las cuerdas, de la misma forma que en los experimentos anteriores, hacen que el cubo sólido regrese a su estado original.

4. La danza del vino

Este experimento consiste en los movimientos de la danza popular filipina llamada “La danza del vino” (Bersntein y Phillips, 1981). En esta danza, la orientación del vaso con vino en el espacio –como éste es rotado alrededor del eje vertical– no puede ser identificado con la rotación relativa entre el vaso con vino y el cuerpo de la danzante. Si los pies

Figura 4. Cubo de Dirac



de la danzante permanecen en el mismo lugar, una rotación de 2π de la mano y del vaso con vino, introduce una torsión en el cuerpo de la danzante. Otra rotación completa de la mano en la misma dirección restablece la mano de la danzante y el cuerpo a su configuración original. La secuencia de la danza puede verse en la figura 5.

Figura 5. Danza del vino

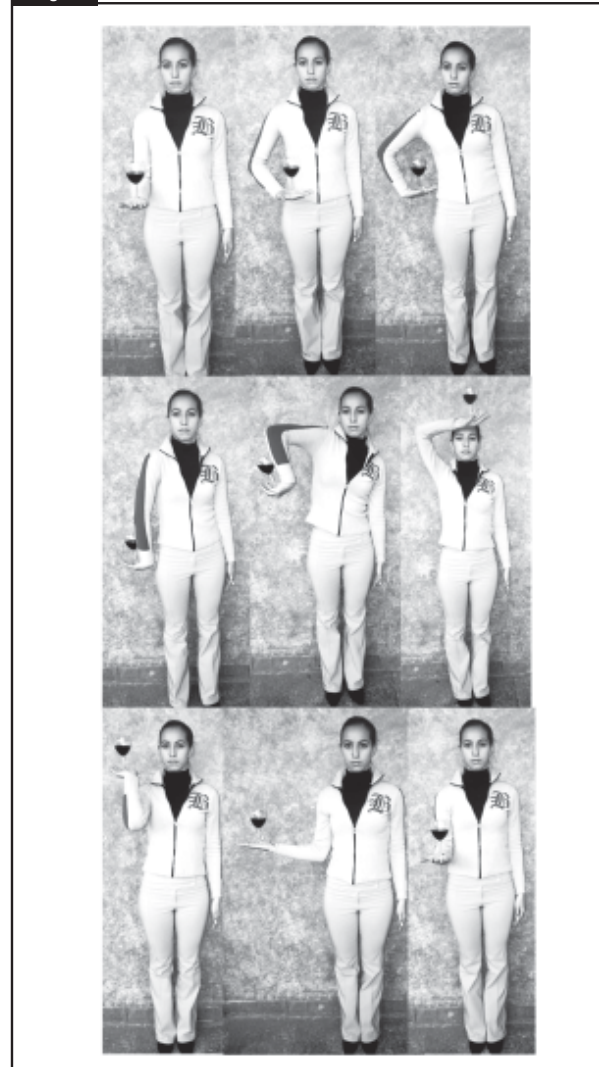
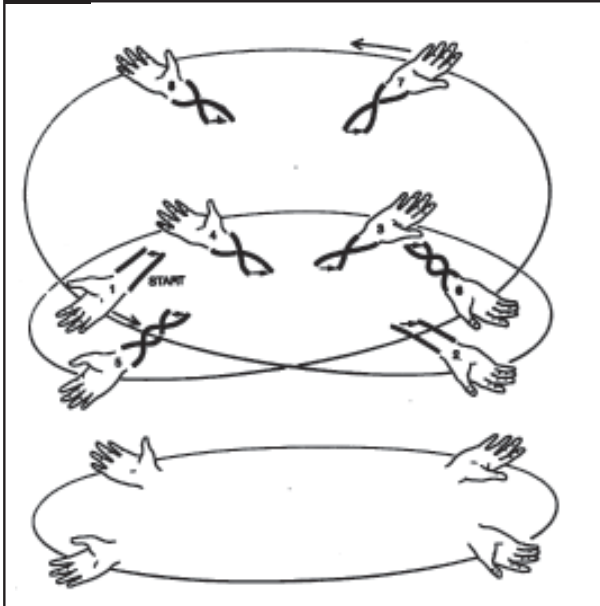


Figura 6. Trayectoria de la danza del vino (Bersntein y Phillips,1981).



En este experimento, se da una imagen de la trayectoria que siguen las manos, véase la figura 6. Como una observación particular, la trayectoria que siguen las manos coincide con el círculo frontera de la banda de Möbius.

En cada una de estas situaciones hay claramente “algo diferente” acerca del estado del sistema cuando ha pasado por una rotación de 2π y de 4π . Obsérvese que en cada caso, el ‘sistema’ es más que sólo un par aislado de tijeras, una llave, un cubo o un vaso con vino, pero incluye, en algún sentido, la manera en la cual el objeto está ‘conectado’ con su medio.

5. Los cuaternios y el títere

En este ejemplo, no sólo se ilustra el fenómeno del espín semientero sino que se establece una relación intrínseca con el álgebra de los cuaternios (Ebbinghaus,1996). Definimos el álgebra de los cuaternios como el conjunto:

$$H = \{q = a + bi + cj + dk / i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \text{ con } a, b, c, d \text{ en } \mathbb{R}\}$$

Las relaciones algebraicas y, por lo tanto, la estructura del álgebra de los cuaternios se pueden identificar con un ‘disco con cuerdas’, al cual le llamamos títere (Kauffman, 2001). El disco sin las cuerdas representa al 4-grupo de

Klein. Este grupo está dado por el conjunto $V = \{E, I, J, K\}$ y su operación se describe en la tabla 1.

En otras palabras, el 4-grupo de Klein cumple las relaciones:

$$I^2 = J^2 = K^2 = E, IJ = JI = K, \text{ donde } E \text{ es la identidad.}$$

En principio, la identificación entre el disco y el 4-grupo de Klein se construye de la siguiente forma: consideremos un disco que tenga dibujado en uno de sus lados una cara feliz y en el otro una cara triste, dispuesto de la forma en que se muestra en la figura 7A.

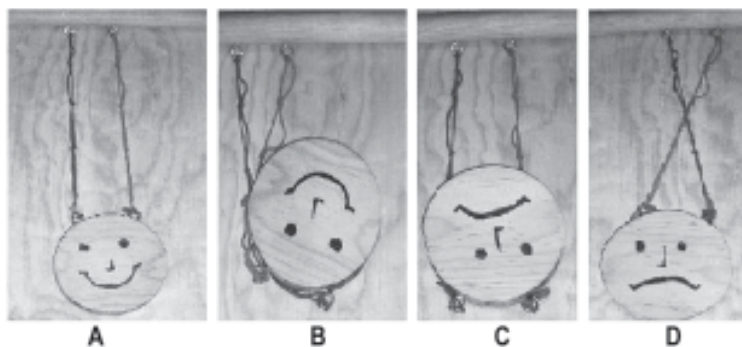
Identificamos a E con el lado del disco que contiene la cara feliz, figura 7A, (posición inicial); I con la rotación del disco en la posición inicial un valor de π alrededor del eje perpendicular a esta página, ver figura 7B; J con la rotación del disco partiendo de la posición inicial hasta un valor de π alrededor del eje horizontal, figura 7C; y, finalmente, K con la rotación del disco partiendo de la posición inicial hasta un valor de π alrededor del eje vertical, figura 7D.

Es fácil ver que las identificaciones de los elementos del 4-grupo de Klein con el disco sí cumplen las operaciones del álgebra de los cuaternios. Es decir, al aplicar la rotación de π dos veces alrededor de cada uno de los ejes antes mencionados, volvemos a la posición inicial; y al aplicarle una rotación de π alrededor del eje perpendicular a esta página y después π alrededor del eje horizontal (o viceversa) obtenemos la rotación asignada a K.

Tabla 1. Trayectoria de la danza del vino.

.	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	E	K	J
J	J	K	E	I
K	K	J	I	E

Figura 7. El títere y sus rotaciones.



Si ahora atamos unas cuerdas al disco, obtenemos lo que llamamos el títere, que al aplicarle una rotación de 2π , las cuerdas se enredan. Por lo tanto, considerando la identificación de los cuaternios,

$$1=E, i=I, j=J, k=K,$$

con las rotaciones espaciales aplicadas al títere, ocurre que al aplicar las rotaciones k^2, i^2 y j^2 (el 2 significa aplicar la rotación correspondiente dos veces) al títere, se hace una torsión de 2π en las cuerdas. Por lo tanto, si identificamos la torsión de $\pm 2\pi$ de las cuerdas con -1 , obtenemos la igualdad $k^2 = i^2 = j^2 = -1$. Usando el resultado del truco de la banda con el disco y las cuerdas del títere concluimos la igualdad

$$(i^2)^2 = (j^2)^2 = (k^2)^2 = 1.$$

Si una torsión de $\pm 2\pi$ la identificamos con -1 , entonces podemos identificar la torsión de $\pm\pi$ con $\sqrt{-1}$ y, por consiguiente, a i, j, k . Notemos que los conjugados cumplen las igualdades $i = -i, j = -j, k = -k$, el conjugado de los cuaternios puros es equivalente a invertir la rotación correspondiente, obteniendo así, un cambio de torsión o un aumento en la torsión de 2π en las cuerdas. Las relaciones $kj = -i$ y $jk = i$ de los cuaternios también se cumplen en la aplicación de las rotaciones en el títere.

Por lo tanto, el títere con la identificación de las rotaciones antes mencionadas, une la estructura algebraica de los cuaternios con el fenómeno del espín semientero.

6. Demostración del fenómeno del espín semientero

Consideremos a las tijeras como un cuerpo sólido y rígido en el espacio \mathbb{R}^3 . Definamos lo que los físicos llaman el “espacio de configuraciones”, fijando una posición inicial de las tijeras en el espacio, llamándole a esta posición, “configuración original”. Cualquier movimiento continuo de las tijeras en el espacio concluye con las tijeras en alguna nueva configuración, la cual puede ser completamente descrita dando un punto en \mathbb{R}^3 (por ejemplo, el centro de masa de las tijeras) y una rotación que llevaría la orientación original de las tijeras sobre su nueva orientación. Este segundo elemento (la rotación) de la descripción lo especificamos dando un elemento del grupo de rotaciones $SO(3)$. Por lo tanto, el espacio de configuraciones de nuestras tijeras está dado en el espacio $(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$.

En el espacio de configuraciones $(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$, un movimiento continuo de las tijeras es representado por una cur-

va continua. En particular, si la configuración inicial y final son la misma, a la curva la llamaremos lazo. Consideremos, por ejemplo, algún punto x_0 en $(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$, es decir, alguna configuración inicial de las tijeras. Una rotación continua de 2π de las tijeras alrededor de su eje de simetría es representada por un lazo basado en la configuración inicial x_0 de $(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$, la demostración ingeniosa de Dirac nos permite ‘ver’ este lazo.

Observemos que la posición de las cuerdas puede variar (la cantidad de torsiones en las cuerdas) según se represente el lazo en el espacio $(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$. Al elegir una posición de las tijeras (de preferencia que no sea la posición trivial), imagine su propia manipulación de las cuerdas (manteniendo las tijeras y la silla fijas) para desenredar las cuerdas. En cada instante la posición de las cuerdas representan un lazo en $(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$, así que, el proceso que se efectúe puede ser descrito como una sucesión continua de lazos (parametrizados, digamos, por un tiempo t). Si logra con la sucesión de lazos desenredar las cuerdas, ha construido una homotopía del lazo correspondiente a la configuración inicial de la cuerda al lazo trivial (es decir, las cuerdas sin torsión).

A lo que Dirac se refiere, es que un lazo en el espacio de configuraciones $(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$ correspondiente a una rotación de 2π , no es homotópico al lazo trivial C_0 , pero el lazo correspondiente a una rotación de 4π es homotópico al lazo trivial C_0 .

Así que, la solución a este fenómeno radica en entender la “estructura topológica del lazo” en este espacio de configuraciones. En el lenguaje de la Teoría de Homotopía significa conocer el grupo fundamental del espacio de configuraciones $\pi_1(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$ (Kosniowski, 1980).

Aplicando los resultados acerca del grupo fundamental, se cumple que el grupo fundamental de un producto es isomorfo al producto de los grupos fundamentales, es decir, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \times SO(3)) = \pi_1(\mathbb{R}^3) \times \pi_1(SO(3))$ [6]. Ahora, usando el hecho de que \mathbb{R}^3 es simplemente conexo, su grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^3)$ es isomorfo al grupo trivial $\{0\}$. Por otro lado, existe una cubierta universal de grupos de Lie $\varphi: S^3 \rightarrow SO(3)$, con núcleo $\ker(\varphi) = \{1, -1\}$ y como la esfera S^3 es simplemente conexa, se concluye que $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$. Por lo tanto, el grupo fundamental de $\pi_1(\mathbb{R}^3) \times \pi_1(SO(3))$ es isomorfo a $\{0\} \times \mathbb{Z}_2$, el cual es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$.

Lo que significa que si identificamos la posición trivial C_0 de las tijeras con la clase del cero $[0]$ y la posición final C_1 de las tijeras con la clase del uno $[1]$, implica que cualquier lazo en el sistema de configuraciones $(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$, se puede llevar, bajo una homotopía, al lazo trivial C_0 (a las tijeras con las cuerdas desenredadas) o al lazo C_1 que contiene una torsión en las cuerdas.

Conclusiones

En este artículo hemos mostrado diferentes casos que representan el mismo fenómeno espín semientero, y en cada uno se ha descrito de manera específica su construcción para que el lector pueda repetir sin ningún problema el fenómeno. Aunque en la demostración sólo se usa el caso de las tijeras, ésta es aplicable a cualquiera de los otros. Como se puede ver en la descripción de cada uno de los ejemplos, se utiliza la misma homotopía para ir de manera

continua de la configuración trivial o inicial del cuerpo, a la configuración que se obtiene después de aplicarle una rotación de 4π . Aunque en los ejemplos anteriores la demostración se hace sólo cuando se aplican dos vueltas, es decir, 4π , el resultado se generaliza cuando se aplican rotaciones de $4n\pi$. Como en el caso de los cuaternios y el títere, se explica la relación que existe entre el fenómeno espín semientero con el álgebra de los cuaternios, en el futuro investigaremos si existe una presentación de este fenómeno en el álgebra de octonios (Kauffman, 2001).



Bibliografía

- E. D. Bolker (1976). *Am. Math. Monthly*. 73.
 Kosniowski, C. (1980). *Algebraic Topology*. 1st ed., Cambridge University Press.
 Gregory L. N. (2003). *The Geometry of Minkowski Spacetime: An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity*. Dover Publications.
 Bernstein, H. J. y A. V. Phillips (1981). *Scientific American*. July.
 Heinz-Dieter, E. et al. (1996). *Numbers, Graduate Texts in Mathematics/Readings in Mathematics*. 1st ed., Springer Verlag.
 Kauffman, L. H. (2001). *Knots and Physics*. 3rd ed., World Scientific Publishing Company.

