Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 1994 **1**(1) : 57–60
cimpa – ucr – ccss issn: 1409-2433

MODELOS MINIMALES DE LA RECTA HIPERREAL

William Alvarado Jiménez*

Resumen

A partir de una propiedad combinatoria de los ultrafiltros de Ramsey, se obtiene una nueva demostración acerca de la existencia de "modelos minimales" dentro de la clase de modelos de ultrapotencia numerable de $^*\mathbb{R}$.

Abstract

A new proof of the existence of minimal models of the hiperreal line is obtained in terms of a combinatorial property of Ramsey ultrafilters over a countable set.

1. Introducción

Los modelos minimales de $^*\mathbb{R}$ se pueden definir como aquellos en los cuales los números infinitesimales positivos corresponden a clases de equivalencia de sucesiones de números reales estrictamente decrecientes y que convergen a cero ([Alvarado-3],[Caicedo]).
En ([Alvarado-3]), el autor obtuvo caracterizaciones de las principales clases de ultrafiltros sobre un conjunto numerable a partir de distintas propiedades de representabilidad de infinitesimales en modelos de ultrapotencia numerable de los números hiperreales. En particular, se demostró que un ultrafiltro es selectivo si y sólamente si el modelo de ultrapotencia numerable construido a partir suyo es minimal.
El presente trabajo consta de dos partes. En la primera se introduce la notación y se discuten algunos resultados básicos respecto a los modelos de ultrapotencia numerable de $^*\mathbb{R}$. En la segunda parte se obtiene una nueva demostración de la existencia de modelos minimales de $^*\mathbb{R}$ a partir de una propiedad combinatoria de los ultrafiltros de Ramsey.
Antes de proceder con la exposición propiamente dicha, es necesario hacer mención de que, con el fin de garantizar la existencia de los ultrafiltros selectivos o de Ramsey, vamos a asumir que trabajamos en una variante "reforzada" de la teoría de conjuntos. Por ejemplo, podemos asumir que trabajamos en **(ZFC)** + **(HC)** (Zermelo-Fraenkel con el Axioma de

*Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica. E-Mail: william@scratchy.emate.ucr.ac.cr

Elección y con la Hipótesis del Contínuo), o bien en $\mathbf{(ZFC)} + \neg\mathbf{(HC)} + \mathbf{(AM)}$ (Zermelo-Fraenkel con el Axioma de Elección, con la negación de la Hipótesis del Contínuo y con el Axioma de Martin).

2. Preliminares

Denotamos por $\beta\mathbb{N}$ la compactificación de Stone-Čech de los números naturales, que como es sabido coincide con el espacio de todos los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$. Por $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ denotamos el conjunto de todos los ultrafiltros no-principales sobre $\mathbb{N}$. El ultrafiltro $\mathcal{U}$ pertenece a $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, si y sólo si contiene al filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r = \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ es finito}\}$.
Dado $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, denotamos por ${}^*\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ el modelo de ultrapotencia numerable de la recta hiperreal obtenido como el cociente del espacio de todas las sucesiones de números reales $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por la relación de equivalencia $\equiv_{\mathcal{U}}$, definida por

$$(a_n) \equiv_{\mathcal{U}} (b_n) \iff \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}\,.$$

La relación de equivalencia anterior es compatible con las operaciones de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, así como con la relación de orden parcial $\leq$. De esta manera obtenemos un campo completamente ordenado que es una extensión propia de $\mathbb{R}$, si identificamos las clases de equivalencia de las sucesiones constantes $[(a_n)]$ con $a_n = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con el correspondiente número real r.
${}^*\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ es un campo totalmente ordenado que es extensión propia de $\mathbb{R}$, por lo tanto es no-arquimediano[1]. Por ello contiene elementos infinitamente grandes, llamados números ilimitados o infinitos, así como sus inversos multiplicativos, los cuales junto a 0 forman los llamados números infinitesimales. En ${}^*\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$, los números infinitesimales corresponden a las clases de equivalencia $[(a_n)]$, que satisfacen $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq r\} \in \mathcal{U}$, $\forall r \in \mathbb{R}^*_+$. En lo sucesivo utilizaremos la abreviación $\boldsymbol{a} = [(a_n)] \approx 0$, para indicar que $\boldsymbol{a} = [(a_n)] \in {}^*\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ es un infinitesimal.

Los diferentes modelos de ${}^*\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ poseen distintas propiedades "externas" en dependencia de la elección del ultrafiltro $\mathcal{U}$. En particular, ciertas propiedades de representabilidad de infinitesimales en el modelo, están íntimamente relacionadas con el tipo de ultrafiltro utilizado en la construcción del modelo ([Takeuchi-1,3,4],[Caicedo],[Alvarado-1]).
La representabilidad de infinitesimales en nuestros modelos está a su vez relacionada con clases especiales de sucesiones de números reales. Más precisamente, dado un subconjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, decimos que el infinitesimal $\boldsymbol{a}$ es $\mathcal{S}$-representable, si $\boldsymbol{a} \equiv_{\mathcal{U}} (a_n)$, donde (a_n) pertenece a $\mathcal{S}$. En cualquier modelo de ultrapotencia numerable, existen infinitesimales $\mathcal{S}$-representables: para ello basta tomar las clases de equivalencia de los elementos en $\mathcal{S}$. Sin embargo, se sabe que en general, no es cierto que todo infinitesimal de ${}^*\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ sea $\mathcal{S}$-representable, si $\mathcal{S}$ es un subconjunto "pequeño" de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Nosotros estamos interesados en el caso particular del conjunto

$$\mathcal{S} = \{(\dashv_\backslash) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{\backslash \to \infty} \dashv_\backslash = \prime \text{ y } |\dashv_{\backslash + \infty}| < |\dashv_\backslash|\}\,,$$

[1]Es importante mencionar que el campo ${}^*\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$, no es tan sólo una extensión de $\mathbb{R}$. La fuerza del análisis no-standard, estriba en el llamado Teorema de Leibnitz o Principio de Transferencia, el cual afirma que una proposición expresable en el lenguaje de primer orden es válida en $\mathbb{R}$, si y sólamente si, la misma proposición es verdadera en cualquier modelo de ${}^*\mathbb{R}$.

i.e. en la posibilidad de que infinitesimales no nulos se puedan representar por medio de sucesiones estrictamente monótonas de números reales que convergen a cero.
Los modelos de ultrapotencia numerable de $^*\mathbb{R}$ que satisfacen la propiedad de que todos sus infinitesimales no nulos son $\mathcal{S}$-representables como en el párrafo anterior se denominan “modelos minimales”, y se pueden considerar los modelos más “económicos” de la recta hiperreal.

3. Existencia de modelos minimales

Para demostrar la existencia de modelos minimales, debemos primero introducir unos modelos intermedios, llamados modelos de Cauchy de $^*\mathbb{R}$. Estos modelos se caracterizan como aquellos en los cuales todo infinitesimal se puede representar por medio de una sucesión de números reales que converge a cero.
Como demostrara X. Caicedo, los modelos de Cauchy son exactamente aquellos modelos $^*\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ que se obtienen cuando el ultrafiltro $\mathcal{U}$ es un P-punto de $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. Nosotros estamos interesados en un tipo particular de P-puntos, llamados ultrafiltros selectivos o ultrafiltros de Ramsey.
Un ultrafiltro $\mathcal{U}\in\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ se llama selectivo o ultrafiltro de Ramsey, si para cualquier partición $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$, tal que para $n\in\mathbb{N}$, $P_n\notin\mathcal{U}$, existe un $U\in\mathcal{U}$ tal que $\operatorname{card}(U\cap P_n)\leq 1,\ \forall n\in\mathbb{N}$.
Como veremos a continuación, los ultrafiltros selectivos son precisamente aquellos que sirven para obtener modelos minimales de los números hiperreales.

Teorema.

Un ultrafiltro $\mathcal{U}\in\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ es selectivo si y sólo si $^*\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ es un modelo minimal de $^*\mathbb{R}$.

Demostración.

Con base en la discusión anterior, es suficiente mostrar que un modelo de Cauchy es a la vez minimal si y sólamente si el ultrafiltro $\mathcal{U}$ es selectivo.
La suficiencia de la condición es casi inmediata, pues si $\{P_n : n\in\mathbb{N}\}$ es una partición de $\mathbb{N}$, con $P_n\notin\mathcal{U}$, para $n\in\mathbb{N}$, entonces la sucesión (a_n) definida por

$$a_n=\frac{1}{k+1},\ \text{si } n\in P_k$$

converge a 0, y por hipótesis existe una subsucesión estrictamente decreciente (a_{n_k}) de (a_n), tal que

$$U=\{n_k : k\in\mathbb{N}\}\in\mathcal{U}\ .$$

Ahora, la monotonicidad de (a_n) garantiza que $\operatorname{card}(U\cap P_n)\leq 1,\ \forall n\in\mathbb{N}\,.$

Para demostrar la necesidad, vamos a recurrir a un resultado de A. Louveau que caracteriza los ultrafiltros de Ramsey por medio de una propiedad combinatoria.
Denotemos por $\mathcal{P}_\setminus(\mathbb{N})$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen exactamente n elementos, y para $A\subseteq\mathbb{N}$, por $\mathcal{P}_\setminus(\mathcal{A})$ el de todos los subconjuntos de A de cardinalidad n.

Proposición ([Louveau]).

Sea $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Las dos proposiciones siguientes son equivalentes:

(i) *dados $m, n \in \mathbb{N}$, y dada una aplicación f de $\mathcal{P}_\backslash(\mathbb{N})$ en $\{0, 1, 2, \cdots, m\}$, existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que F es constante sobre $\mathcal{P}_\backslash(\mathcal{U})$,*

(ii) *$\mathcal{U}$ es un ultrafiltro selectivo.*

Usando esta proposición es fácil obtener la demostración de la necesidad de la condición del teorema.
Sea $\boldsymbol{a} = [(a_n)] \approx 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión (a_n) es de términos estrictamente positivos y converge a cero. Consideremos la aplicación f definida en $\mathcal{P}_\in(\mathbb{N})$ por:

$$f(\{i, j\}) = \begin{cases} 0 & , \text{si} \quad (a_i - a_j)(i - j) \geq 0 \\ \\ 1 & , \text{si} \quad (a_i - a_j)(i - j) < 0 \,. \end{cases}$$

Observemos que la afirmación del teorema quedaría probada si establecemos la existencia de un miembro del ultrafiltro en el cual la restricción de f sea igual a 1. Por la proposición, existe un conjunto $U \in \mathcal{U}$ tal que f es constante en el conjunto $\mathcal{P}_\backslash(\mathcal{U})$. Si fuera el caso que $f \equiv 0$ en U, entonces la sucesión (a_n) poseería una subsucesión creciente, que no puede converger a cero. Así $f \equiv 1$ con lo que concluimos la demostración. ■

Es importante mencionar que el teorema anterior muestra en particular que existe una relación entre la minimalidad del modelo ${}^*\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ y el orden de Rudin-Keisler en $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, cuyos elementos minimales son exactamente los ultrafiltros selectivos.

Referencias.

[Alvarado-1] W. Alvarado, *Sobre una pregunta del profesor Xavier Caicedo*, Memorias del I Coloquio Bolivariano de Matemáticas, Quito, 1990, pp. 79-82.

[Alvarado-2] W. Alvarado, *Representabilidad de infinitesimales en modelos de ultrapotencia numerable*, Ciencias Matemáticas, Vol. III, no. 1, 1992, pp. 33-38.

[Alvarado-3] W. Alvarado, *Ultrafiltros y representabilidad de infinitesimales*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana (por aparecer).

[Booth] D. Booth, *Countably indexed ultrafilters*, Ph.D. Thesis, University of Winsconsin, Madison, Wis., 1969.

[Caicedo] X. Caicedo, *¿Son todos los infinitesimales representables por sucesiones convergentes a 0?*, Matemática, Enseñanza Universitaria, 38, 1986, pp. 28-34.

[Louveau] A. Louveau, *Ultrafiltres absolus*, Séminaire Choquet, 1970/1971, núm. 11, 11 pp.

[Takeuchi-1] Y. Takeuchi, *Métodos Analíticos del Análisis No-estándar*, Universidad Nacional de Colombia, 1988.

[Takeuchi-2] Y. Takeuchi, *Ultrafiltros sobre* $\mathbb{R}$, preprint.

[Takeuchi-3] Y. Takeuchi, *Superdensidad del conjunto de infinitesimales positivos no representables por sucesiones convergentes a cero*, preprint.

[Takeuchi-4] Y. Takeuchi, *Infinitesimales de Cauchy no representables por sucesiones monótonas*, preprint.