

*Revista Electrónica Nova Scientia*

Simulación de la propagación de ondas dentro  
de la cóclea

Simulation of wave propagation in the cochlea

**Edgar Alvarado-Anell<sup>1</sup> y Sagrario Santillán-Flores<sup>1</sup>**

---

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería en Computación y Electrónica, Universidad De La Salle  
Bajío, León, Gto.

---

México

## Resumen

Presentamos algunas soluciones de la ecuación de Burgers como modelo matemático para describir la propagación de las ondas en la perilinfa dentro de la cóclea. Proponemos diferentes condiciones iniciales que modelan el efecto del estribo en la perilinfa a través de la ventana oval, el cual produce el movimiento ondulatorio en el líquido. Se muestran simulaciones obtenidas a partir de la solución mencionada utilizando mathematica y comparadas con imágenes reportadas en la literatura.

**Palabras Clave:** modelo matemático, membrana timpánica, cadena osicular, simulación

*Recepción:* 20-09-10

*Aceptación:* 20-10-10

## Abstract

We present some solutions of the Burgers's equation as a mathematical model to describe the propagation of waves of the perilymph within the cochlea. We propose different initial conditions which model the effect of the stapes in the perilymph through the oval window, which produces wave motion in the liquid. We show the simulations obtained from the solutions mentioned using mathematica and compared with images that are reported in the literature.

**Keywords:** mathematical model, tympanic membrane, ossicular chain, simulation

## Introducción:

El estudio del oído es primordial debido a que es una parte importante de nuestro cuerpo para poder percibir el medio que nos rodea, es por eso que se han realizado diferentes investigaciones tanto teóricas como experimentales, obteniendo resultados favorables pero sin dejar concluido el tema. El oído (fig. 1) está dividido en tres partes: oído externo, oído medio y oído interno. Cada parte tiene una función muy importante para que logremos oír los sonidos del medio ambiente; el oído externo se encarga de recolectar los sonidos y conducirlos hasta el oído medio donde la membrana timpánica y la cadena osicular se encargan de llevar el sonido hasta el oído interno donde las señales acústicas son convertidas a señales eléctricas para ser enviadas al cerebro y que éste las interprete como lo que escuchamos. El movimiento vibrador de la platina produce en la perilinfa una onda que se transmite desde la rampa vestibular a la timpánica distendiendo la ventana redonda (figs. 2 y 3). Cada sonido estimula de forma selectiva una porción concreta de la membrana basilar, en función de su frecuencia. Los sonidos graves llegan hasta el final, los agudos se quedan al inicio, extinguiéndose pronto. El retroceso del estribo produce el efecto inverso en la dirección del líquido y la ventana redonda se introduce dentro de la rampa timpánica. Después se regresa por medio de una acción mecánica donde los movimientos de las membranas basilar y de Reissner se transmiten al órgano de Corti produciéndose un cizallamiento de los cilios y las células neurosensoriales, y una actividad mecánica donde la inclinación de esterocilios hacia el kinocilio aumenta la descarga; en sentido contrario, la disminuyen. El estudio de la cóclea es de gran importancia debido a que los implantes cocleares involucran esta parte del oído, por lo que un estudio sobre el comportamiento interno de la cóclea sería de gran ayuda para mejorar los aparatos auditivos existentes.

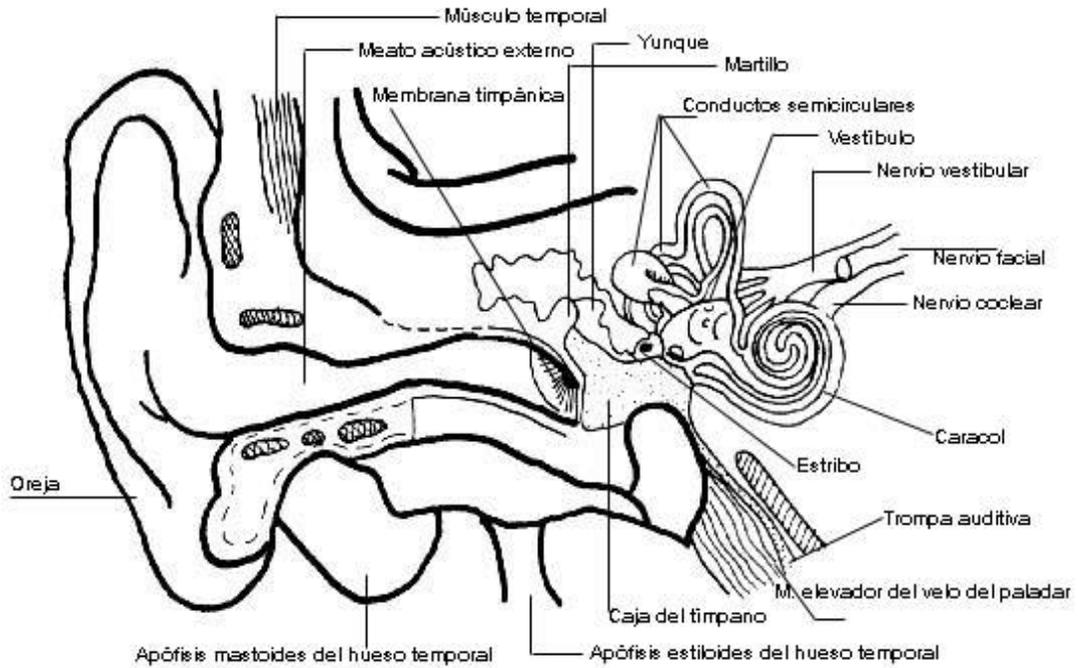
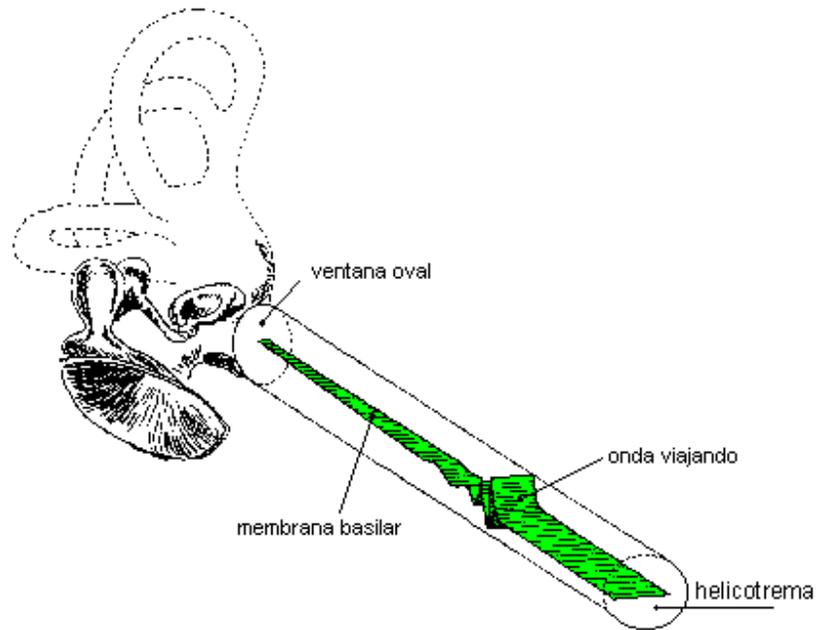


Figura 1. Diagrama de la anatomía del oído donde se muestra la cóclea o caracol.



Figura 2. Esquema de la cóclea o caracol.



**Figura 3.** Esquema de la cóclea desenredada para mostrar el movimiento de la perilinfa.

La búsqueda de modelos matemáticos para describir el comportamiento del oído tiene como finalidad entender su funcionamiento y proponer soluciones a los problemas de sordera. Mediante el modelo se pueden realizar simulaciones que muestren la dinámica del oído y con las cuales es posible caracterizarlo, de esta manera se puede resolver un problema que aqueja a las personas y mejorar su modo de vida. Se han realizado muchos estudios para describir el comportamiento del oído, ya sea en partes o como un todo; como la membrana timpánica, que es la parte del oído más estudiada tanto teórica como experimentalmente Drescher et al. (1998) usando elemento finito [1], o Funnel (1996) que modeló el tímpano y manubrio juntos[2]. Más recientemente Alvarado-Anell et al. realizaron simulaciones numéricas para describir el comportamiento el tímpano y membranas forzadas [3,4]. Esto en la parte teórica y dependiendo del método utilizado puede resultar práctico o complicado, sacrificar exactitud por rapidez [1] y [2], o simplemente con las herramientas que se cuentan [3] y [4]. En la parte experimental se han realizado varios experimentos para determinar las vibraciones de la membrana timpánica, como por ejemplo usando el efecto Mössbauer[5], interferometría y holografía[6,7], una sonda capacitiva[8], un SQUID[9,10] o un sensor magnetorresistivo[11, 12].

Por otro lado a diferencia del tímpano, para la cóclea no se han encontrado muchos estudios teóricos y mucho menos experimentales. Por ejemplo, D.T. Kemp en 1979 [13] realizó un

estudio para determinar y explicar el movimiento ondulatorio dentro de la cóclea y reportó que era muy selectiva de ciertas frecuencias y además la no linealidad de dicho comportamiento. Recientemente en 2003 Duke y Jülicher [14] consideraron balances de gradientes de presión y fuerzas inerciales para describir las ondas no lineales en la cóclea. En el 2004 Scherer y Gummer [15] utilizaron una fuerza electromecánica para determinar patrones de vibración en el órgano de Corti. Posteriormente D. Manoussaki et al. (2006) [16] consideraron el efecto de curvatura en la cóclea para ondas de baja frecuencia y después Y. Zhang et al. en 2007 [17] usaron la ecuación de Laplace como modelo matemático para explicar los patrones de distribución de la presión en la membrana basilar. En la parte experimental Fridberger et al. [18] realizaron mediciones en puercos de guinea para medir las amplitudes en la membrana basilar a diferentes intensidades del sonido y donde muestran la propagación de la onda.

En este trabajo proponemos la ecuación de Burgers para modelar el movimiento de la perilinfa dentro de la cóclea y parcialmente se explica su comportamiento ante las perturbaciones ocasionadas por el movimiento de los huesecillos. También se presentan secuencias de las simulaciones obtenidas con diferentes soluciones de la ecuación de Burgers. En la sección 2 presentamos la ecuación de Burgers y algunas soluciones como modelo matemático para describir el movimiento ondulatorio dentro de la cóclea. En la sección 3 se muestran las secuencias de las simulaciones numéricas y finalmente la sección 4 se refiere a las discusiones y conclusiones.

### Modelo matemático

Para describir la propagación de las ondas dentro de la cóclea primero definimos un Problema con Valores Iniciales y a la Frontera (PVIF) y buscamos la ecuación adecuada para describir el problema. La ecuación de Burgers es una ecuación diferencial parcial no lineal y es el modelo más simple que representa un fenómeno descrito por un balance entre convección y difusión.

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

donde  $u$  es la amplitud de la onda,  $x$  la variable espacial,  $t$  el tiempo y  $v$  es la viscosidad cinética. La ec (1) es usada para describir procesos ondulatorios en acústica e hidrodinámica y en la literatura se pueden encontrar varias soluciones, como por ejemplo:

$$u(x, t) = \lambda + \frac{2}{x + \lambda t + A} \quad (2)$$

$$u(x, t) = \frac{4x + 2A}{x^2 + Ax + 2t + B} \quad (3)$$

donde A, B y  $\lambda$  son constantes arbitrarias [19]. También se puede obtener una solución general linealizando la ecuación de Burgers mediante la transformación Cole-Hopf [20]

$$u = -2v \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4),$$

que al sustituirla se obtiene la ecuación de difusión

$$v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5),$$

y posteriormente se resuelve el problema de valor inicial  $u(x, 0) = f(x)$  por el método de Fourier usando separación de variables y aplicando la condición inicial

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t} - \frac{1}{2} \int_0^\xi f(\xi') d\xi'\right] d\xi \quad (6)$$

Como ejemplo consideremos el siguiente problema con condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= \phi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right), & 0 \leq x \leq l \\ \phi(0, t) &= \phi(l, t) = 0, & t > 0 \end{aligned}$$

donde  $\phi_0$  es la amplitud inicial y  $l$  es la longitud que se ha propagado la onda. Sustituyendo la condición inicial se tiene

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= \exp\left[-\left(\frac{\phi_0}{2v}\right) \int_0^x \operatorname{sen} \frac{\pi \alpha}{l} d\alpha\right] \\ &= \exp\left[-\left(\frac{\phi_0 l}{2\pi v}\right) \left(1 - \frac{\cos \pi x}{l}\right)\right] \end{aligned}$$

Por otro lado la solución de la ecuación de difusión es

$$\phi(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 v t}{l^2}\right) \cos\left(\frac{n \pi x}{l}\right)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_0^l \exp\left[-\left(\frac{\phi_0 l}{2 \pi v}\right)\left(1 - \frac{\cos \pi x}{l}\right)\right] dx \\ &= \exp\left(\frac{-\phi_0 l}{2 \pi v}\right) I_0\left(\frac{\phi_0 l}{2 \pi v}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

y

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \exp\left[-\left(\frac{\phi_0 l}{2 \pi v}\right)\left(1 - \frac{\cos \pi x}{l}\right)\right] \cos\left(\frac{n \pi x}{l}\right) dx \\ &= 2 \exp\left(\frac{-\phi_0 l}{2 \pi v}\right) I_n\left(\frac{\phi_0 l}{2 \pi v}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

donde las integrales se evaluaron usando mathematica y se verificaron en Abramowitz and Stegun [21], y  $I_0(x)$  y  $I_n(x)$  son las funciones de Bessel modificadas de la primera especie. Sustituyendo las ecs. (7) y (8) en la ec (4) se obtiene la solución

$$u(x, t) = \left(\frac{4 \pi v}{l}\right) \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n I_n\left(\frac{\phi_0 l}{2 \pi v}\right) \exp\left(-\frac{v n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{l}\right)}{I_0\left(\frac{\phi_0 l}{2 \pi v}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n I_n\left(\frac{\phi_0 l}{2 \pi v}\right) \exp\left(-\frac{v n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \cos\left(\frac{n \pi x}{l}\right)} \quad (9)$$

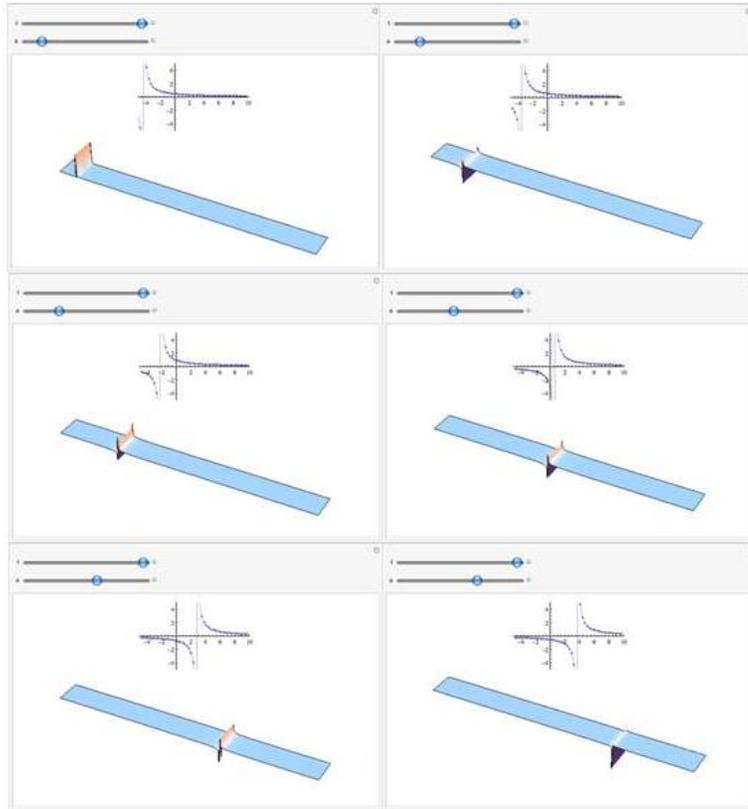
Esta solución describe el desplazamiento de ondas en un líquido, como se muestra en las simulaciones obtenidas. También se obtuvieron soluciones numéricas con diferentes condiciones como por ejemplo una deformación inicial debida al estribo así como con diferentes valores de  $v$ . Dichas soluciones se graficaron para mostrar la propagación de las ondas en el tiempo y el efecto de considerar diferentes valores para la viscosidad así como diferentes condiciones iniciales y de frontera.

### Simulación y Análisis de Resultados

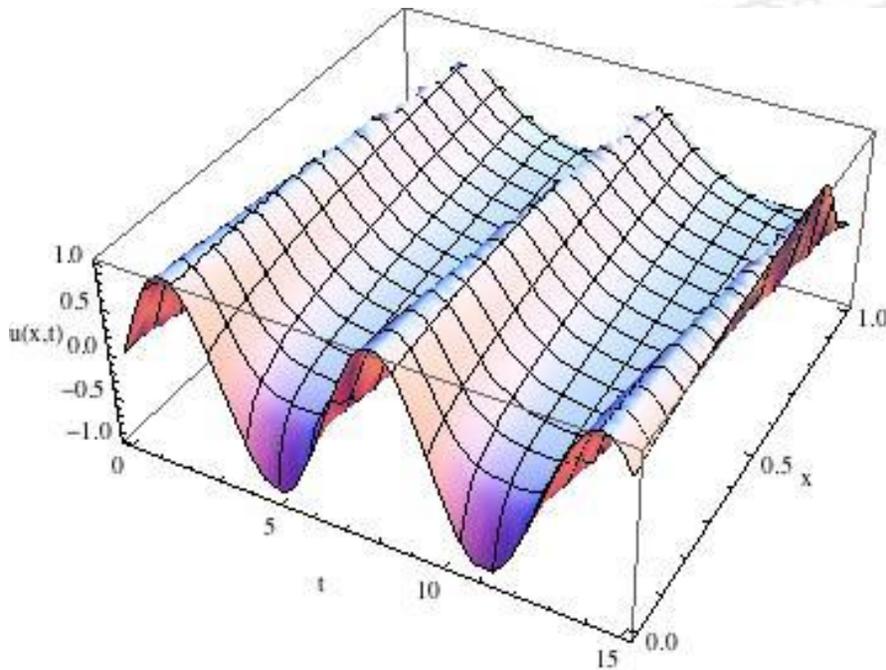
Las simulaciones muestran la dinámica del fenómeno modelado matemáticamente, así como sus características las cuales se comparan con otros modelos o con resultados experimentales.

Se obtuvieron diferentes simulaciones a partir de la solución de la ecuación de Burgers, las cuales representan un frente de ondas viajando en un medio líquido. Con estas simulaciones se modela el comportamiento de la perilinfa dentro de la cóclea ante una perturbación debido al movimiento del estribo en la ventana oval. Para la secuencia de la simulación (fig. 4), donde se muestra la propagación de la onda a través de la representación de una cóclea desenredada, se obtuvo usando Mathematica[22] primero graficando la solución y posteriormente agregándole movimiento, de esta manera se puede observar la propagación de la onda. Esta simulación muestra un comportamiento al que se debe esperar de una onda viajando en un líquido y que es semejante al que mostraron Duke y Jülicher [14] al considerar un estímulo con un sonido en el oído y representar las deformaciones en la membrana basilar y al resultado experimental obtenido por Fridberger [18]. Nosotros proponemos la ecuación de Burgers con la cual se describe este comportamiento y se obtiene un resultado semejante que muestra dicho comportamiento. Los resultados que aparecen en la literatura y los nuestros muestran una amplitud y la forma de propagación de la onda en la cóclea, de esta manera pensamos que los resultados obtenidos con la ecuación de Burgers son correctos por obtener resultados semejantes a los que existen en la literatura.

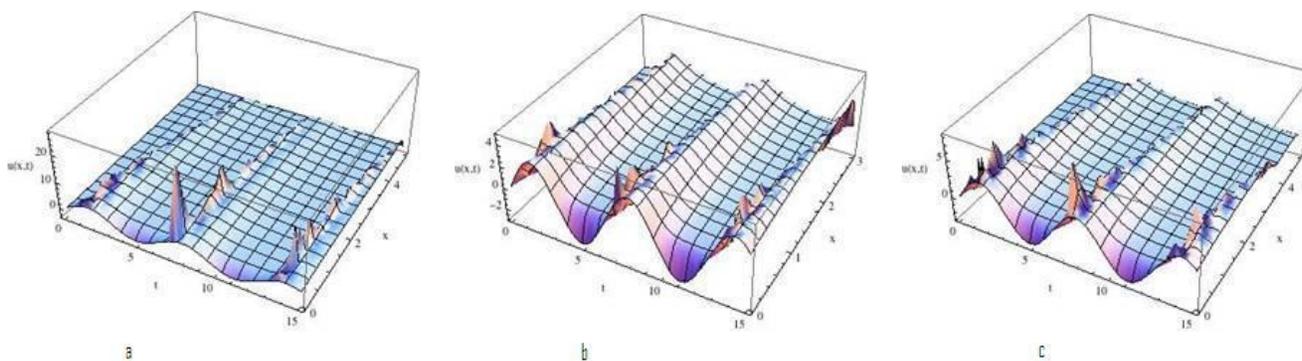
En la figura 5 se muestra la solución como un frente de ondas donde se tiene la amplitud  $u(x, t)$  en función de la posición  $x$  y el tiempo  $t$ . Esta gráfica se hizo a partir de la solución numérica obtenida con Mathematica donde se introdujo la ecuación de Burgers y la condición inicial  $u(x, 0) = u_0 \sin t$ . Esta gráfica es semejante a la que reportaron Scherer y Gummer, nosotros mostramos la amplitud en función del tiempo y ellos en función de la frecuencia, pero la forma es muy parecida. Por último, en la figura 6 se tiene la propagación de ondas en un medio con diferentes valores para la viscosidad, se han considerado valores entre 0.01 y 0.1, se pueden observar los picos que aparecen al inicio de  $x$ , y como se van atenuando conforme avanza la onda.



**Figura 4.** Secuencia que muestra la propagación de la onda a través de la representación de una cóclea desenredada.



**Figura 5.** Gráfica en tres dimensiones que muestra los frentes de onda en función de su posición y del tiempo.



**Figura 6.** Frentes de ondas para diferentes valores de la viscosidad. Los valores de la viscosidad considerados son: a) 0.07, b) 0.08 y c) 0.1.

### Discusiones y Conclusiones

La cóclea tiene una estructura compleja, sus características provocan que las vibraciones dentro de ella sean complicadas de modelar de manera aislada; sin embargo, considerando que el inicio de la vibración proviene del estímulo del estribo en la perilinfa, estamos simulando precisamente dicha etapa, en la cual la ventana oval convierte las vibraciones del sonido en variaciones de presión del líquido. La ecuación de Burgers es un modelo matemático adecuado para describir la dinámica de la perilinfa.

El modelo obtenido en nuestro trabajo describe, razonablemente, de manera general el comportamiento de la perilinfa, por lo que nos podría ayudar a determinar si es ahí donde está la patología responsable de la pérdida de la audición, así como los parámetros necesarios para poder crear prótesis que nos ayuden a mejorar la audición en diversos casos patológicos.

El modelo que proponemos tiene la ventaja de ser relativamente simple y fácil para manejar los parámetros de entrada al realizar las simulaciones.

La contribución de nuestro trabajo es que la propuesta que hacemos para modelar la propagación de ondas en la cóclea no ha sido reportada antes en la literatura, al tiempo de que está en acuerdo con otros modelos y con las mediciones experimentales.

En conclusión, podemos destacar que el modelo propuesto arroja los siguientes resultados para la propagación de ondas en la perilinfa:

Se obtuvieron simulaciones de la propagación de ondas que están en concordancia con resultados teóricos y experimentales encontrados en la literatura. Las gráficas muestran claramente la amplitud y la forma en que se propagan las ondas.

Se puede obtener la amplitud y la frecuencia de la onda si se introducen los parámetros adecuados de la cóclea.

Se muestran simulaciones para diferentes valores de la viscosidad, lo cual podría ser utilizado para modelar alguna patología relacionada con el cambio de las propiedades del líquido ótico.

Con este modelo se podrán obtener resultados que ayuden a mejorar los implantes cocleares, detectando de manera más precisa las variaciones de amplitud del desplazamiento de la perilinfa y con ello desarrollar una adecuada interpretación de los sonidos.

### **Agradecimientos**

Este trabajo fue apoyado por la Universidad De La Salle Bajío mediante el proyecto de investigación de la convocatoria 2009 y por el CONCYTEG mediante el proyecto 08-15-K662-118-A01.

### **Referencias**

- [1] Drescher J., Schmidt R. and Hardtke H.J., Finite element modeling and simulation of the human tympanic membrane. HNO. 46 (1998) pp 129-134.
- [2] Funnell W.R. Low-frequency coupling between eardrum and manubrium in a finite-element model. J. Acoust. Soc. Am. 99 (1996) pp 3036-3043.
- [3] Alvarado-anell E., Sosa M. and Moreles M.A., Numerical simulation of the dynamical properties of the human tympanum. Revista mexicana de física 154(2) 2008 135-140.
- [4] Alvarado-anell E., Sosa M. and Moreles M.A., Computacional study of forced oscillations in a membrane. Revista mexicana de física E51(2) 2005 102-107.
- [5] Gilad P, Shtrikman S, Hillman P (1967). Application of the Mössbauer Method to ear Vibrations. J Acoust Soc Am. 41(5):1232-1236.
- [6] Khanna S M, Tonndorf J (1972). Tympanic membrane vibrations in cats studied by time-averaged holography. J Acoust Soc Am. 51(6):1904-20.
- [7] Tonndorf J, S M Khanna (1968). Submicroscopic Displacement Amplitudes of the Tympanic Membrane (Cat) Measured by a Laser Interferometer. J Acoust Soc Am. 44(6):1546-54.
- [8] Wilson JP and Johnstone JR (1975). Basilar membrane and middle-ear vibration in guinea pig measured by capacitive probe. Hearing Theory, IPO Eindhoven.
- [9] Rutten WLC, Peters MJ, Brenkman CJ, Mol h, Grote JJ, van der Marel LC (1982). The use of a SQUID magnetometer for middle ear research. Cryogenics September 1982.

- [10] Brenkman CJ, Grote JJ, Rутten WLC (1987). Middle ear transfer characteristics by a SQUID magnetometer. *J Acoust Soc Am.* 82(5):1646-54.
- [11] Sosa M, Carneiro AAO, Colafemina JF, Baffa O (2001). A new magnetic probe to study the vibration of the tympanic membrane. *J Magn Magn Materials.* 226:2067-9.
- [12] Sosa M, Carneiro AAO, Baffa O, Colafemina JF (2002). Human ear tympanum oscillation recorded using a magnetoresistive sensor. *Rev Sci Instr.* 73(10):3695-7.
- [13] D.T. Kemp. Evidence of mechanical nonlinearity and frequency selective wave amplification in the cochlea. *European Archives of Oto-Rhino-Laryngology.* Vol 224, Numbers 1-2, 37-45 (1979).
- [14] T. Duke and F. Julicher. Active traveling wave in the cochlea. *Phys. Rev. Lett.* 90, 158101 (2003).
- [15] Scherer M.P. and Gummer A.W. Vibration pattern of the organ of Corti up to 50 kHz: Evidence for resonant electromechanical force. *PNAS* vol. 101, no. 51, 17652-17657. (2004)
- [16] D. Manoussaki, E.K. Dimitriadis and R.S. Chadwick. Cochlea's graded curvature effect on low frequency waves. *Phys. Rev. Lett.* 96, 088701 (2006).
- [17] Y. Zhang, C.K. Kim, K.J.B. Lee and Y Park. Resultant pressure distribution pattern along the Basilar Membrane in the spiral shaped Cochlea. *Journal of Biological Physics.* Vol 33, 3, 195-211 (2007).
- [18] Fridberger A. et al. Organ of Corti Potentials and Motion of the Basilar Membrane. *The Journal of Neuroscience.* 2004, 24(45), 10057-10063.
- [19] Polyanin, A.D. and Zaitsev, V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equation.* Chapman & Hall/CRC. 2004.
- [20] Debnath L. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.* Birkhauser USA. 2005.
- [21] Abramowitz M. and Stegun I.A. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs and Mathematical Tables.* Dover Publications, Inc. New York. 1964.
- [22] Enns R.H. and McGuire G.C. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers.* Birkhauser USA. 2001.