ARQUITECTURA EN LA FORMACIÓN DE FORMADORES: DEL TANGRAM A LOS MOSAICOS NAZARÍES
Firmitas, utilitas y 'venustas'

Architecture in training trainers: from tangram to nasrid palace mosaic
Firmitas, utilitas and 'venustas'

SANTIAGO ATRIO CEREZO, NATALIA RUIZ LÓPEZ Y SACHA GÓMEZ MOÑIVAS
Universidad Autónoma de Madrid

DOI: 10.13042/Bordon.2016.68103
Fecha de recepción: 30/06/2015 • Fecha de aceptación: 19/10/2015
Autor de contacto / Corresponding Author: Santiago Atrio Cerezo. Email: santiago.atrio@uam.es

INTRODUCCIÓN. El trabajo se ha realizado para valorar la arquitectura como herramienta pedagógica para la adquisición de conceptos geométricos por parte del profesorado de las primeras etapas de la educación. La investigación ha sido incluida dentro del proyecto I+D de referencia EDU2011-29114 y de título Escuelas para la Justicia Social. **MÉTODO**. La experiencia se ha servido del trabajo previo que han venido desarrollando los autores de este artículo desde el año 2003. Se han resuelto dos encuestas que se han venido usando como pre y postest, para evaluar el nivel de satisfacción y aprovechamiento de los cursos que se han impartido en los Centros Territoriales de Innovación y Formación del profesorado de la Comunidad de Madrid. Del mismo modo se ha secuenciado una serie de sesiones de trabajo con las que atender esta formación específica. **RESULTADOS**. El hallazgo principal del estudio es la constatación de las posibilidades de la arquitectura como elemento interdisciplinar válido para la adquisición de conocimientos geométricos. **DISCUSIÓN**. El trabajo se integra junto con otras propuestas innovadoras de didáctica de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas de las que solo se reflejan en este artículo las referidas a la geometría. Los comentarios recibidos por parte de los docentes que han sido formados con las mismas son positivos y han sido trasladado a las aulas satisfactoriamente, pero de momento no tenemos registro nominal cuantitativo de sus resultados.

Palabras clave: *Arquitectura, Arte infantil, Actividades de Ciencias, Materiales de Construcción, Entorno Físico.*

Arquitectura e investigación educativa

El problema objeto de estudio persigue validar las posibilidades pedagógicas que la arquitectura tiene para la comprensión de los conceptos geométricos. Hay trabajos como los de Muntañola (2004) que constatan la "influencia decisiva de la educación escolar en la concepción de la arquitectura" reclamando una calidad de la educación "dialógica" a partir de, entre otros, los "proyectos educativos en historia urbana, ecología, etc." (p. 222). Generando lo que el mismo autor denomina "crono-topo socio-físico, educativo". No pretende el trabajo ser una experiencia teórica sino definir una propuesta de innovación metodológica que se pueda llevar al aula en las primeras etapas de la educación: Infantil (3-6 años) y Primaria (6-12 años).

Para ello se han definido una secuencia de intervenciones en el aula que se han utilizado en cursos impartidos en los Centros Territoriales de Innovación y Formación del profesorado (CTIF). Dicha secuencia se desarrolla en dos sesiones de tres horas cada una dentro de las 37 formaciones impartidas en los CTIF: Madrid Este, Centro y Las Acacias, en los últimos 12 años.

Todo el trabajo se ha realizado con profesorado en activo. Los resultados de las evaluaciones de estas experiencias han sido valorados positivamente por dichos docentes, motivo por el cual las asesorías y direcciones de los diferentes CTIF han mantenido esta oferta formativa a lo largo del tiempo.

Supuestos. Hipótesis de la investigación y objetivos

Existe mucho material en relación al trabajo con el tangram, con las cenefas y con los mosaicos (Tiemblo *et al.*, 2014). La propuesta que presentamos aúna los tres contenidos bajo el paraguas de la arquitectura como elemento motivador y eje vertebrador del proceso de aprendizaje (Mulero *et al.*, 2013).

El subtítulo del artículo destaca la palabra latina "venustas", la belleza de la terna del maestro romano Vitruvio: solidez, utilidad y belleza. La arquitectura, según este canon, es la primera de las artes y, por tanto, digna de ser considerada bella. Pero en el proceso educativo, la belleza se logra con el descubrimiento íntimo, por parte del alumno, de la solución de un problema. Se trata de "organizar y animar situaciones de aprendizaje guiadas", como sostiene Perrenoud (2011) que conduzcan al descubrimiento personal del alumnado, trabajando a partir de los "errores y de los obstáculos en el aprendizaje" e implicando al alumnado en "actividades de investigación, en proyectos de conocimiento" (pp. 17-26). Es el alumno, de forma individual, el que debe descubrir a través de sus sentidos las características de su entorno y el poder de la manipulación de los objetos en la definición de conceptos abstractos. Como apunta Romañá:

> "Otra cosa es lo que la escuela tradicionalmente ha fomentado: a menudo un conocimiento descontextualizado, por utilizar una expresión de J. Bruner, un conocimiento escolar, ya no vital, sino desvitalizador porque tiende a desmotivar al alumno dada su escasa relación con su experiencia y entorno significativos" (Romañá, 2004: 209).

Del mismo modo sucede con el profesorado. Solemos aducir cansancio al repetir las mismas letanías teóricas como docentes y con el paso del tiempo y los cursos escolares, llegamos a considerar que las conocemos. La separación entre los problemas de la vida real y las propuestas educativas escolares nos lleva a situaciones complejas y solo revisando nuestra propia metodología de trabajo en el aula podremos ahondar en la solución del problema. No conocemos soluciones mágicas pero tenemos la convicción de que la "investigación educativa" (Perrenoud, 2011) debe reclamar parte del horario de trabajo del docente y esta experiencia arquitectónica es una demostración de las posibilidades que dichos procesos tienen en el aula.

Por lo tanto, la hipótesis de trabajo queda formulada por nuestra parte con el profesorado que va a atender a dichos alumnos para, en futuras investigaciones, poder aplicarlo en un entorno real de aula. La hipótesis (H_i) supone que la arquitectura es una herramienta válida para la comprensión de los conceptos geométricos, así como para la eliminación de preconcepciones y aprendizajes previos erróneos por parte de docentes en activo de las primeras etapas de la educación.

Los objetivos de la investigación quedan definidos de la siguiente manera:

> Objetivo Principal (OP): validar una secuencia de actividades arquitectónicas basadas en la práctica y la experimentación para la adquisición significativa de conceptos geométricos básicos por parte del profesorado. Los Objetivos Secundarios (OS1): identificar concepciones geométricas erróneas en el profesorado. (OS2): demostrar las posibilidades pedagógicas de la arquitectura como elemento potenciador del cambio educativo. (OS3): valorar la arquitectura como elemento interdisciplinar, eliminador de compartimentos educativos estancos.

Marco teórico. Metodología de la investigación

Hemos utilizado una metodología teórico-práctica en todas las sesiones de trabajo con docentes. En los cursos de 21 horas se han dedicado dos jornadas de tres horas al ámbito geométrico, desarrollando en las mismas las tres sesiones de trabajo que describimos en la propuesta de innovación.

En dichas sesiones, como a lo largo de todo el curso, suele aparecer la duda sobre la conveniencia de este tipo de metodología en aulas sobrecargadas de materia y con escaso tiempo para cumplir con los contenidos marcados en los currícula. En este sentido, lo que pone de manifiesto esta experiencia es que determinados conocimientos aparentemente sencillos y reiteradamente repetidos en las aulas, no son dominados en profundidad por el profesorado que los imparte. Esto no es un problema si utilizamos lo descrito en libros de texto y basamos la enseñanza en un trabajo de memorización que debe resolverse en casa. Si el proceso de enseñanza no ofrece "situaciones de aprendizaje" cómodas para el discente, es bastante improbable que el proceso sea significativo y las ideas adquiridas se olvidarán en el corto plazo.

En este sentido, solo la reiteración de las mismas y los procesos de lectura y olvido, perpetuados a lo largo de toda la educación obligatoria nos ofrecen alguna esperanza de que los conocimientos acaben siendo asimilados. Pero este proceso requiere mucho tiempo y tiene dos problemas básicos: el primero, referido a la ineficacia e ineficiencia del mismo sobradamente demostrada y, el segundo, referido al inmenso daño que se hace a un alumnado que se acerca a los centros del saber como quien se aproxima a un centro de reclusión. Como bien resumía Perrenoud:

> "Las tesis que voy a desarrollar sobre los principios básicos de una formación de docentes no son ideológicamente neutras. Por dos razones:
>
> Porque están ligados a una visión de escuela que apunta a democratizar el acceso a los saberes, a desarrollar la autonomía de los sujetos, su sentido crítico, sus competencias de actores sociales, su capacidad de construir y defender un punto de vista.
>
> Porque estos principios pasan por un reconocimiento de la autonomía y de la responsabilidad profesionales de los profesores, tanto de manera individual como colectiva.

> En consecuencia, nada tengo que decir a quienes quieren profesores elitistas o ejecutantes dóciles" (Perrenoud, 2001: 504-505).

En la misma línea que apunta Alsina (2012), el trabajo de innovación propuesto reflexiona sobre conceptos geométricos con la ayuda de otras disciplinas (pp. 12-13): lecturas y relatos, conocimientos de historia, filosofía, arte, etc., pues tal y como decía Vitruvio y detalla Moro (2011): "el arquitecto debe estudiar Gramática; tener aptitudes para el Dibujo; conocer la Geometría; no estar ayuno de Óptica; ser instruido en Aritmética y versado en Historia; haber oído con aprovechamiento a los filósofos; tener conocimientos de Música; […] unir los conocimientos de la Jurisprudencia a los de la Astrología y movimientos de los astros" (p. 170).

La metodología, como apuntaba Ángel Alsina (2012), la consideramos interdisciplinar las relaciones de las matemáticas con otras áreas de conocimiento y con el entorno (p. 13). Precisaremos de la lengua tal y como apuntó Gustavo Sánchez Canales (2014) para expresar con corrección los razonamientos lógico matemáticos, incorporando un bagaje de palabras y expresiones propias de la realidad arquitectónica, geométrica y científica (pp. 178-193). Utilizaremos el dibujo, como lenguaje de representación y expresión. La óptica con las herramientas de aula incorporadas a la pizarra digital pues el alumnado debe comprender por ensayo y error, que si la geometría no la percibe con claridad, debe ampliar su representación para poder visualizarlo adecuadamente. Y, por supuesto, debe utilizar conocimientos de historia y en menor medida de música y astronomía (Tiemblo *et al.,* 2013).

Descripción de la propuesta de innovación

Las formaciones en las que hemos presentado esta propuesta forman parte de dos tipologías: curso y seminario.

Los 20 cursos organizados por los CTIF en los que hemos participado tienen una participación numerosa de entre 30 y 50 personas. Las temáticas son propuestas por las asesorías de Educación Infantil y Primaria de dichos Centros Territoriales de Innovación, relacionadas todas ellas con el área científico-matemática. Cada curso consta de siete sesiones de tres horas cada una.

A diferencia de los anteriores, los 17 seminarios se organizaron en los mismos centros educativos que los solicitaron a los CTIF y la temática a trabajar es propuesta por los propios centros. El número de participantes de estas formaciones es inferior y ronda los 20 asistentes desarrollando el trabajo entre 8 y 15 horas en cuatro o cinco sesiones de trabajo.

Ambos tipos de formación comienzan con una encuesta de 62 preguntas. La misma nos sirve para explicar tanto los contenidos y objetivos del curso, como las preguntas que nos proponemos puedan responder los asistentes al final de la formación. La encuesta no es tipo test, estando compuesta por preguntas abiertas. Entre las cuestiones aparecen los siete ítems a los que daremos respuesta con la primera sesión así como los seis de la segunda y tercera sesión de trabajo, respectivamente.

Para atender esta tarea dedicamos 45 minutos. Tiempo intencionadamente escaso pues se pretende que las respuestas sean intuitivas y rápidas.

Como presentación de las tres sesiones hacemos una reflexión sobre la introducción al Libro VI de Los Diez Libros de Arquitectura. Marco Lucio Vitruvio nos relata la historia del discípulo de Sócrates, Aristipo que "arrojado por un naufragio a la playa de Rodas, habiendo visto en ella trazadas algunas figuras geométricas, se dice que exclamó en voz alta, dirigiéndose a sus compañeros: alegrémonos, amigos, puesto que aquí encuentro huellas de hombres" (Marco Lucio Vitruvio, 2000: 136).

Para Aristipo, ver dibujos geométricos significaba que estaba en tierra de sabios, en la playa de una sociedad que no era bárbara, una ciudad estado que conocía el lenguaje de la sabiduría: la geometría (Moro, 2011). Pasamos luego a recordar a otro discípulo de Sócrates, Platón, que colocaba en las mismas fechas en el frontispicio de su famosa Academia de Atenas la leyenda: "No entre nadie que no sepa geometría". Por último reflexionamos sobre la obra "La escuela de Atenas" de Rafael Sanzio realizada en las estancias del papa Julio II. Tanto el faro de Rodas, como la Acrópolis de Atenas y los edificios del Vaticano, son referencias arquitectónicas con las que introducir esta acción formativa.

Tangram (Infantil y Primaria)

1ª sesión, dos horas de trabajo. Con el alumnado y en función del nivel educativo, las sesiones serán secuenciadas con otra temporalidad. En esta sesión se pretende responder las siguientes cuestiones que aparecían en la encuesta inicial:

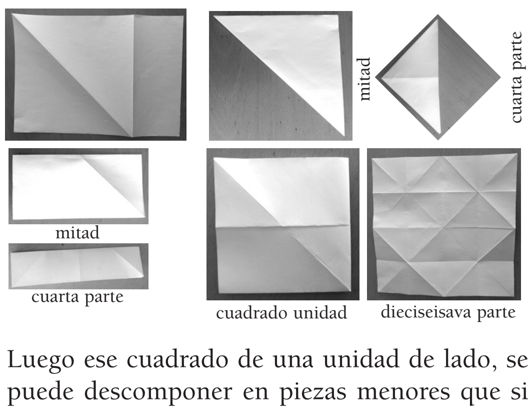
¿Qué es un metro cuadrado?	ÍTEM25
¿Qué es un metro?	ÍTEM27
¿Qué es medir?	ÍTEM28
¿Qué es un cuadrado?	ÍTEM33
¿Qué es un rombo?	ÍTEM34
¿Qué es un trapecio?	ÍTEM35
¿Qué es un romboide?	ÍTEM36

Nuestra experiencia arquitectónica propone una "situación de aprendizaje". Queremos alicatar una de las paredes de nuestro aula. En el 90% de los casos, las piezas (los azulejos) que propone el profesorado tienen forma de paralelogramo, cuadrado, rectángulo o rombo, olvidándose o no proponiendo el romboide. Se aprovecha esta situación para observar polígonos, repasar su definición, proponer diferentes clasificaciones en función de gustos, número de lados, tamaño de sus lados, tamaño de sus ángulos, valiéndonos del geoplano. Todas estas actividades metodológicas presentan el conocimiento como un descubrimiento individual potenciado por la actividad del grupo y guiado por el docente, no como unos contenidos impuestos. La pregunta central es: ¿qué polígonos podríamos utilizar para alicatar la pared?

Propuesto el cuadrado como elemento generador de nuestro alicatado, buscamos variaciones decorativas del mismo, para hacer más atractiva la decoración. En este caso proponemos utilizar el tangram.

Pasamos entonces a construir nuestro tangram partiendo de un folio. Utilizando el doblado del papel buscamos un cuadrado en el que se basará nuestro tangram y deberá ser igual para todos los asistentes. Con el mismo y usando los dobleces identificamos sus ejes de simetría. Si doblamos por la mitad de un lado, aparece un rectángulo de superficie mitad del cuadrado original y si lo hacemos por la diagonal, conseguimos un triángulo también con la mitad de superficie inicial. Del mismo modo se procede con la mitad de la mitad, cuarta parte y con la octava parte, al doblar de nuevo la parte anterior, hasta llegar a los 32 triángulos rectángulos isósceles de la (figura 1).

FIGURA 1. Fases de construcción del tangram



Luego ese cuadrado de una unidad de lado, se puede descomponer en piezas menores que si las utilizamos todas para componer una figura nueva tendrán de superficie una unidad cuadrada. Esto permite observar al usuario, entre otras cosas, que el metro cuadrado, no es un "cuadrado de un metro de lado". Si así lo enuncio identifico el valor de la superficie con la forma. El metro cuadrado es la superficie contenida dentro de un cuadrado de un metro de lado, como también será la superficie compuesta por la adición de todas las piezas que creemos con ese cuadrado inicial.

El tangram[1] se compone de siete piezas, que juntas forman un cuadrado: cinco triángulos de diferentes tamaños (dos grandes iguales, dos pequeños iguales y uno mediano), un cuadrado y un romboide.

Con el alumnado debemos verbalizar dichas dimensiones. Por ejemplo, el triángulo grande es el doble que el cuadrado (interior) y la cuarta parte del cuadrado original, así como el doble del triángulo mediano y cuatro veces más grande que uno de los triángulos pequeños o podemos decir del mismo que es el doble que el romboide. Este tipo de relaciones se deben trabajar visualizando la figura recortada (figura 1).

Finalmente podemos llegar al juego cuyas reglas son: utilizar en cada trabajo las siete piezas y no superponer las piezas, no montar unas sobre otras. Pero el objetivo principal no es lúdico, ni lograr una figura en el menor tiempo posible, ni desarrollar la visión espacial mediante giros, volteos y simetrías, ni siquiera la de visibilizar figuras geométricas planas en posiciones supuestamente inestables. Hacemos referencia a esto último porque se suele confundir el cuadrado con el rombo y denominar como tal a un cuadrado girado en el plano. Nuestro objetivo es trabajar las proporciones de los elementos del tangram y con todas ellas alicatar nuestra pared.

La transposición al ámbito espacial (Baader, 2004) debe recuperar las referencias a Fröbel (Bordes, 2012; Brosterman, 1997) que permitieron desarrollar la creatividad del propio (Wright, 1998).

Cenefas (Infantil y Primaria)

2ª sesión, una hora. Las preguntas que pretendemos atender y sobre las que queremos reflexionar en esta sesión son los siguientes ítems de la encuesta inicial:

¿Conoce el término etnomatemática?	ÍTEM23
¿Trabaja los giros, traslaciones y rotaciones en clase? ¿Cómo?	ÍTEM43
¿Trabaja las cenefas en clase? ¿Cómo?	ÍTEM44
¿Utiliza bloques lógicos? ¿Cómo?	ÍTEM51
¿Trabaja por proyectos? ¿Podría poner un ejemplo?	ÍTEM52
¿El color es un atributo matemático?	ÍTEM62

Una cenefa o friso resulta al cubrir un espacio longitudinal infinito de anchura finita mediante movimientos en el plano de un determinado motivo. Los movimientos son los de traslación, simetría o reflexión y giro o rotación. Existe un cuarto que denominamos deslizamiento y se puede visualizar al dejar nuestras huellas marcadas en esa arena de la playa de Rodas a la que nos referíamos en la introducción. Nuestras huellas son simétricas y al andar se produce una traslación. El resultado que visualizamos en la naturaleza es denominado deslizamiento.

Comenzamos esta sesión observando tejidos y frisos de culturas prehispánicas. Usando variados colores, estas culturas al igual que muchas otras, generaron vistosos adornos con los que decorar sus obras arquitectónicas y sus vestimentas. Si la moda y la arquitectura están íntimamente relacionadas a la belleza, en este momento del trabajo podemos apreciarlo. Simetrías y asimetrías que son percibidos por nuestros sentidos como formas bellas: venusta.

Estos trabajos son analizados desde el punto de vista de la etnomatemática (Etno+matema+ticas). El término fue acuñado por el profesor Ubiratán D'Ambrosio de la Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) de Brasil y sirve para identificar las diferentes formas de matemática que son propias de los diversos grupos culturales. Sistemas de numeración, formas geométricas, instrumentos de cálculo así como unidades y sistemas de medida son prácticas estudiadas desde ese programa de investigación (D'Ambrosio, 2013).

Dada la riqueza cultural que asumen en la actualidad las aulas españolas, resulta muy interesante destacar elementos de otras culturas como elementos motivadores de los procesos de enseñanza aprendizaje así como elementos de valoración social del inmigrante.

El problema que presentamos en el aula es el de generar un friso o cenefa para decorar nuestra pared alicatada. ¿Cuántos tipos diferentes de frisos podemos hacer con un único modelo inicial? La respuesta la debemos buscar con ayuda de todo el grupo. Solo en este momento, los profesores comienzan a entender la relevancia de las palabras giro, simetría, modelo, traslación, etc. La respuesta inicial es imprecisa: "muchas", "indefinidas", y/o "infinitas". De nuevo es necesaria la manipulación. Tomar un modelo e individualmente construir las diferentes posibilidades de frisos. Deberemos hacer personalmente traslaciones pues si no las hacemos no tendremos una cenefa y los giros, en caso de utilizarlos, deberán de ser de 180º pues si giramos con ángulos de otra amplitud, no obtendremos una pieza que pueda trasladarse entre las dos líneas paralelas que definen la cenefa.

De ese modo localizamos las únicas siete posibilidades: F1 Friso con traslaciones; F2 Friso con traslaciones y simetría horizontal; F3 Friso con traslaciones y simetría vertical; F4 Friso con traslaciones y deslizamiento; F5 Friso con traslaciones y giro de 180º; F6 Friso con traslaciones, giro de 180º y simetría horizontal; F7 Friso con traslaciones, simetría vertical y deslizamiento (Tiemblo *et al.*, 2013).

Para poder identificar el tipo de friso partiendo de una cenefa ya creada podemos utilizar un algoritmo de clasificación de frisos que no es más que una guía dicotómica, similar a la que podemos usar en la Ciencias Experimentales para identificar especies de plantas u otros seres vivos. Partiendo de cinco preguntas: ¿se observan traslaciones? ¿Se observan giros de 180º? ¿Se observan simetrías horizontales? ¿Se observan simetrías verticales? ¿Se observan deslizamientos?, con respuestas afirmativas y negativas, podemos identificar los siete modelos de friso.

El trabajo finaliza creando un friso desde un modelo personal, que es expuesto al gran grupo explicando cómo se realizó. En las aulas de las primeras etapas de la educación, la verbalización de lo realizado es relevante, pudiendo un alumno entender el proceso lógico matemático y no ser capaz de explicarlo oralmente.

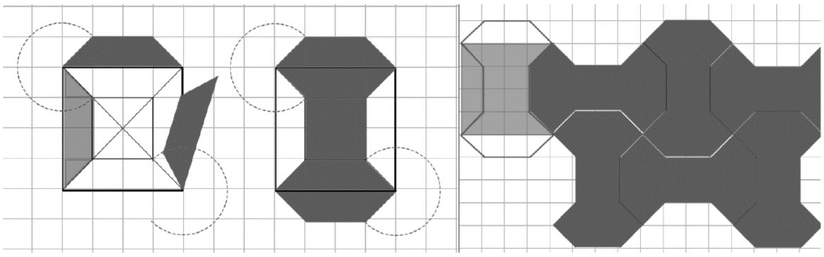
Mosaicos en la Alhambra de Granada (Primaria y Secundaria)

3ª sesión, tres horas de trabajo. La sesión pretende responder y reflexionar sobre las siguientes cuestiones:

¿Trabaja los mosaicos en clase? ¿Cómo?	ÍTEM45
¿Conoce la fórmula del área del rombo? ¿Podría escribirla?	ÍTEM38
¿Conoce la fórmula del área del trapecio? ¿Podría escribirla?	ÍTEM39
¿Conoce la fórmula del área del pentágono? ¿Podría escribirla?	ÍTEM40
¿Utiliza dones de Fröbel?	ÍTEM41
¿Cuántas aristas tiene un tetraedro?	ÍTEM42

Los diferentes movimientos en el plano descritos en los frisos,han sido fuente de inspiración para multitud de composiciones arquitectónicas. De hecho, algunos de los que estudiamos Arquitectura tuvimos una asignatura durante nuestros estudios universitarios denominada "Elementos de Composición Arquitectónica" que utilizaba estas herramientas, entre otras,

Figura 2. Hueso nazarí



para localizar las tramas (líneas de composición) ocultas detrás de las obras de arquitectos y urbanistas.

Cuando el motivo inicial es una figura plana que se repite sin solaparse ni dejar huecos en el plano, el friso se denomina mosaico bidimensional. La propuesta de problema se formaliza del siguiente modo. Queremos volver a alicatar nuestra pared de forma similar a como lo hicimos con el tangram. Pero ahora deseamos realizar un diseño propio o una decoración creativa de azulejos personalizados. Para ello nos hacemos la siguiente pregunta: ¿de cuántos modos diferentes podemos llenar el plano?

Para responder a la pregunta disponemos de los mismos movimientos periódicos del plano que tuvimos con las cenefas. Las isometrías nos ofrecen cuatro posibilidades: traslación, giro o rotación, simetría o reflexión y simetría con deslizamiento (reflexión seguida de una traslación en la dirección del eje de reflexión).

Estas transformaciones se combinan entre ellas dando lugar a los denominados grupos cristalográficos planos. Fedorov demostró en 1891 que no hay más que 17 estructuras posibles para las infinitas decoraciones del plano formado mosaicos periódicos[2].

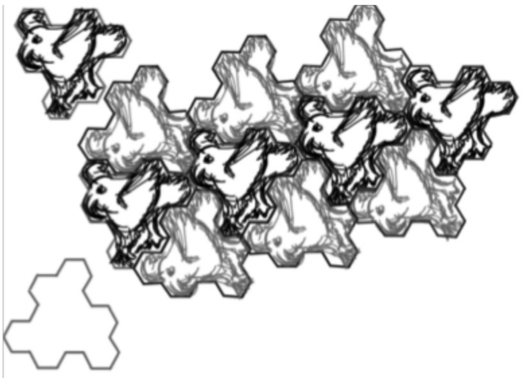
Ahora el problema se hace más complejo con los giros pues aparecen giros de 60º, 90º, 120º y 180º. Estos datos se presentan tan solo para el conocimiento del profesorado. Nuestra experiencia educativa se traslada a la Alhambra de Granada. En ese ejemplo de Arquitectura palaciega, según afirma Rafael Pérez Gómez (2004) podemos localizar los 17 grupos cristalográficos abundando los ejemplos con giros de 90º, es más, "la Alhambra es, actualmente, el único monumento construido antes del descubrimiento de la teoría de grupos, que cuenta con al menos un ejemplo de cada uno de los grupos cristalográficos planos" (p. 32).

En los muros y suelos de la Alhambra podemos encontrar losetas peculiares. Son denominados mosaicos nazaríes. Dichas formas consiguen alicatar nuestra pared con atractivos diseños básicos. Volvemos a partir del cuadrado y con el mismo generaremos el denominado "hueso nazarí" mediante giros de 270º de dos trapecios (figura 2) con los que podemos generar ingeniosos mosaicos (Tiemblo *et al.*, 2013).

La misma experiencia que con el hueso se realizó con otros modelos nazaríes como el denominado "avión" o "pájaro" en el que realizan giros de 90º, la aguja y la pajarita[3].

Finalmente algunos profesores, y no en todos los cursos, proponían generar sus propios modelos (figura 3). Resulta conveniente acabar visualizando los trabajos de teselados imposibles del artista holandés Maurits Cornelis Escher.

Figura 3. Modelo propio de loseta



Es en esta tercera sesión en la que surge de forma espontánea la referencia obligada al conocimiento de las áreas de las figuras geométricas planas. Las explicamos deduciéndolas del área del rectángulo. Si el área de este último puede visualizarse con facilidad en un papel cuadriculado, deduciremos el resto de fórmulas de las figuras inscribiéndolas en un rectángulo y observando las relaciones que hay entre ambas. Así en el triángulo resulta fácilmente observable que su superficie es la mitad de la del rectángulo en el que se inscribe. Del mismo modo operamos con el rombo, romboide, trapecio, trapezoide y la fórmula general de los polígonos regulares hasta llegar al círculo.

Resultados de la investigación

En términos generales, que ahora pasaremos a refrendar con datos, los resultados de nuestra investigación determinan un primer momento inicial de cierta incredulidad en el proceso propuesto. Los profesores alumnos están cansados de formaciones que, aún siendo voluntarias, deben ser impartidas en horario de tarde, tras la jornada laboral. No suelen tener buenas experiencias formativas y recuerdan muchas sesiones poco provechosas impartidas por formadores teóricos alejados de la práctica de aula y desconocedores de la realidad profesional del entorno escolar. La pregunta sobre la que pivota la reflexión del profesorado es si los conocimientos que ellos enseñan preparan para la vida (Perrenoud, 2012) a los niños con los que trabajan, sabedores del ritmo vertiginoso de cambio de la sociedad en la que vivimos y por esa misma idea, si lo son las formaciones que reciben.

Por otro lado los formadores tampoco están motivados, después de años de largos desplazamientos y bajos reconocimientos. No hablamos de reconocimientos económicos, sino de los que deberían derivarse de las competencias propias de las Consejerías de Educación de las diferentes comunidades autónomas resueltas por sus Agencias de Evaluación.

En este sentido, sería deseable un reconocimiento oficial del trabajo realizado por profesores universitarios con maestros en activo. Un registro de las actividades de estos doctores y de sus evaluaciones por parte de los alumnos (profesores en ejercicio) debería servir para reconocer la validez de determinadas metodologías formativas, así como el buen hacer de los profesionales que las impartieron, pudiendo contribuir a fundamentar las metodologías con las que formar a nuevos formadores. Este asunto es especialmente delicado, ya que los profesores universitarios estamos implicados en rigurosos sistemas de acreditación y, una prueba sostenida en el tiempo de buena praxis docente con maestras y maestros en ejercicio y muchos años de experiencia, debería ser altamente valorada en procesos de acreditación. Más aún en las relacionadas con Facultades de Formación de Profesorado y Educación.

Los resultados expuestos en este artículo responden a los 39 (I) a la última de nuestras acciones formativas (048). Los nombramos del I01048 al I39048

Toda la recogida de datos se ha efectuado manualmente (en papel) para facilitar la participación de los docentes, resultando una labor costosa en tiempo y laboriosa a la hora de traspasar e interpretar los resultados. Para facilitar estas tareas el equipo investigador ha propuesto poner en marcha en futuras ediciones la herramienta de ayuda al estudio, autoevaluación y evaluación docente basada en Teoría de Respuesta al ÍTEM (IRT) y test evolutivos, que se ha desarrollado dentro del proyecto para el desarrollo de las enseñanzas UAM 2013 con Ref: EPS-L2/6.13. Entendiendo la evaluación como componente de la investigación docente de aula, además de recurso para la orientación del alumnado y no como instrumento generador de sus calificaciones, consideramos que dichos recursos tecnológicos serán de ayuda para guiar el proceso de enseñanza aprendizaje de los docentes, además de una valiosa herramienta para la interpretación de los datos[4].

Encuesta inicial

Consta de 66 ítems de los cuales 19 se relacionan con el entorno geométrico y arquitectónico, siendo el resto datos generales

1ª sesión

En esta primera sesión se pretendía analizar las ideas previas en relación a:

		Respuesta completa	Respuesta incompleta	No contesta	Comentarios
1.1. ¿Qué es un metro cuadrado?	ÍTEM25	5,13%	**64,10%**	30,77%	I03048 "Un cuadrado de 1m x 1m (alto - ancho)", confunde la forma con la magnitud.
1.2. ¿Qué es un metro?	ÍTEM27	2,56%	**71,79%**	25,64%	I28048 nos indica que es la "unidad principal de longitud" Correcta pero incompleta.
1.3. ¿Qué es medir?	ÍTEM28	15,38%	28,21%	**56,41%**	Se consideraba correcta la respuesta si introducía el término comparación. Medir es comparar. I33048 "reglar la realidad".
1.4. ¿Qué es un cuadrado?	ÍTEM33	20,51%	**58,97%**	20,51%	I01048 lo define como "una superficie plana cuyos lados son iguales y sus ángulos también".
1.5. ¿Qué es un rombo?	ÍTEM34	17,95%	**61,54%**	20,51%	Las respuestas correctas identifican al rombo como un paralelogramo o un polígono o una figura plana cerrada delimitada por lados rectos y además completan la definición con las características de lados iguales y ángulos opuestos iguales o diagonales diferentes.
1.6. ¿Qué es un trapecio?	ÍTEM35	2,56%	**58,97%**	38,46%	
1.7. ¿Qué es un romboide?	ÍTEM36	0,00%	46,15%	**53,85%**	Todos estos paralelogramos están incluidos en el tangram y sobre este último polígono nadie ofrece una contestación completa.

2ª sesión

Las preguntas que pretendimos atender y sobre las que quisimos reflexionar en esa sesión fueron:

			Sí, respuesta completa	No, respuesta incompleta	No contesta	Comentarios
2.1.	¿Conoce el término etnomatemática?	ÍTEM23				Como era de esperar no es conocido por ninguno de los participantes.
2.2.	¿Trabaja los giros, traslaciones y rotaciones en clase? ¿Cómo?	ÍTEM43	15,38%	**48,72%**	**35,90%**	I33048 "¡Ay, cuando el libro gira una figura! ¡Deja de serlo!" Algunos de los participantes relacionan los contenidos con asignaturas, compartimentando la ciencia en bloques estancos. El I39048 nos dice "Solo al trabajar los movimientos de la tierra". Este tipo de respuestas las hemos interpretado como acertadas.
2.3.	¿Trabaja las cenefas en clase? ¿Cómo?	ÍTEM44	38,46%	33,33%	**28,21%**	Como en el caso anterior encontramos respuestas relacionadas con áreas concretas I33048 "Sí, en plástica (época árabe)".
2.4.	¿Utiliza bloques lógicos? ¿Cómo?	ÍTEM51	48,72%	**35,90%**	15,38%	
2.5.	¿Trabaja por proyectos? ¿Podrías poner un ejemplo?	ÍTEM52	28,21%	**56,41%**	15,38%	El I35048 nos indica "Sí o casi, proyecto sobre civilizaciones, el espacio" y el I36048 "Sí, el espacio ahora mismo".
2.6.	¿El color es un atributo matemático?	ÍTEM62	38,46%	**10,26%**	5,13% no sabe 30,77% no contesta	

del encuestado así como ítems relacionados con la aritmética, lecturas matemáticas, historia de las matemáticas, música y astronomía. El curso mantiene la definición clásica del cuadrivium pitagórico con las disciplinas: aritmética, música, geometría y astronomía.

La procedencia académica de las encuestadas es en un 74,36% de diplomatura, el resto de registros se reparten entre un 20,51% de licenciadas y un significativo 5,13% con grado de máster. Tan solo un asistente era varón.

La media de años de trabajo en las primeras etapas de la educación es de 19,16 años, atendiendo actualmente un 38,46% cursos de Educación Infantil y el 61,54% restante cursos de Educación Primaria, siendo el 100% de los asistentes docentes de la escuela pública.

3ª sesión

La sesión pretende responder y reflexionar sobre las siguientes cuestiones:

			Sí, respuesta completa	No, respuesta incompleta	No contesta	Comentarios
3.1.	¿Trabaja los mosaicos en clase? ¿Cómo?	ÍTEM45	15,38%	51,28%	33,33%	I34048 "Sí, en área artística en la época romana".
3.2.	¿Conoce la fórmula del área del rombo? ¿Podrías escribirla?	ÍTEM38	23,08%	38,46%	38,46%	I03048 "No la recuerdo". I12048 "(d+D)/2". I34048 "DXd".
3.3.	¿Conoce la fórmula del área del trapecio? ¿Podrías escribirla?	ÍTEM39	7,69%	38,46%	53,85%	I23048 "BxA".
3.4.	¿Conoce la fórmula del área del pentágono? ¿Podrías escribirla?	ÍTEM40	15,38%	28,21%	56,41%	
3.5.	¿Utiliza dones de Fröbel?	ÍTEM41	0,00%	53,85%	46,15%	
3.6.	¿Cuántas aristas tiene un tetraedro?	ÍTEM42	0,00%	41,03%	58,97%	Con 12 aristas contestan el 7,67%.

En relación a otros ítems analizados resulta relevante la alta opinión que tienen de la necesidad de trabajar con material manipulativo pero, al mismo tiempo, el desconocimiento que tienen del existente y, sobre todo, de las posibilidades de crear nuevo material con recursos propios.

Las regletas de Cuisenaire (ÍTEM22) reconocen que las usan un 33,33%, los ábacos (ÍTEM30) un 35,90% y los bloques lógicos (ÍTEM51) son utilizados por el 43,59% de los encuestados. Como se observa por los datos los conocen pero no tanto como cabría esperar. Son aprendizajes recordados de sus periodos formativos pero con poca presencia en el aula en relación a áreas científico matemáticas. El geoplano o los dones de Fröbel, no son nombrados por ninguno de los participantes y el tangram es nombrado tras aparecer en una de las preguntas.

En relación a contenidos disciplinares y como puede observarse de los datos aportados, la respuesta intuitiva a cuestiones supuestamente sencillas, suele ser incompleta o incorrecta.

Encuesta final

La encuesta final consta de veinte ítems con ocho referidos específicamente al objeto de nuestro estudio. La encuesta solo fue contestada por 34 de los 39 asistentes a las sesiones de trabajo que contestaron la encuesta inicial. El tiempo destinado a rellenar dicha encuesta fue intencionadamente escaso, para buscar una respuesta inmediata. Tuvieron 10 minutos para contestar los 20 ítems.

En todas las respuestas del pos-test es significativo el incremento de aciertos en relación a las

			Respuesta completa	Respuesta incompleta	No contesta
4.1.	¿Qué es un metro cuadrado?	ÍTEMR08	64,71%	2,94%	32,35%
4.2.	¿Qué es un metro cúbico?	ÍTEMR09	58,82%	11,76%	29,41%
4.3.	¿De qué partes se compone las matemáticas?	ÍTEMR10	8,82%	58,82%	32,35%
4.4.	¿Conoce la fórmula del área del rombo? ¿Podrías escribirla?	ÍTEMR11	70,59%	8,82%	20,59%
4.5.	¿Conoce la fórmula del área del romboide? ¿Podrías escribirla?	ÍTEMR12	52,94%	5,88%	41,18%
4.6.	¿Trabajarías los giros, traslaciones y rotaciones en clase? ¿Cómo?	ÍTEMR13	79,41%	8,82%	11,76%
4.7.	¿Trabajarías las cenefas en clase? ¿Cómo?	ÍTEMR14	88,24%	2,94%	8,82%
4.8	¿Trabajarías los mosaicos en clase? ¿Cómo?	ÍTEMR15	79,41%	2,94%	17,65%

respuestas de los ítems iniciales. Hay que hacer constar que en la acción formativa no se atendieron estas preguntas de forma directa y en ningún momento se respondieron explícitamente.

El resultado del aprendizaje se debe al trabajo en el aula con una "situación significativa" de aprendizaje en la que se consigue motivar al profesor.

El ítem 10, pretendía valorar el cambio de percepción que tenían sobre las matemáticas y su interdisciplinariedad. Pese a que se trabajó durante las sesiones, la resistencia al cambio es grande y se sigue observando la disciplina en cajones estancos. La mayoría de las respuestas incidían en: aritmética, geometría, estadística y resolución de problemas. Esperábamos que se valorasen las disciplinas clásicas del cuadrivium: aritmética, geometría, música y astronomía, pero en este caso no se percibe mejora. Ninguna de las respuestas incluía ni a la música ni a la astronomía.

Conclusiones

Los resultados avalan la hipótesis de partida (H_i) que suponía que "la arquitectura es una herramienta válida para la comprensión de los conceptos geométricos así como para la eliminación de preconcepciones y aprendizajes previos erróneos por parte de docentes en activo de las primeras etapas de la educación".

Del mismo modo se ha logrado alcanzar los objetivos (OP) previstos al validar una secuencia de actividades arquitectónicas basadas en la práctica y la experimentación para la adquisición significativa de conceptos geométricos básicos por parte del profesorado. Han sido identificadas concepciones geométricas erróneas en el profesorado (OS_1) y se han evidenciado las posibilidades pedagógicas de la arquitectura como elemento potenciador del cambio educativo (OS_2). Por todo ello consideramos a la arquitectura como elemento multidisciplinar capaz de eliminar compartimentos educativos estancos (OS_3).

Los educadores deben experimentar formaciones en "situaciones de aprendizaje", para poder valorar su propio Aprendizaje Basado en Proyectos. Somos una generación que no hemos conocido estas experiencias formativas como alumnado. La investigación educativa y un diálogo cooperativo fluido entre docentes de los CEIP e investigadores universitarios se revela como un medio eficaz para favorecer el Cambio Educativo. La ciudad (Sánchez Canales, 2014), contiene poderosos elementos manipulativos de aprendizaje que han sido ampliamente atendidos por la literatura. También se han explorado las posibilidades de los jardines como elementos públicos de interacción (Solomon, 2014), sin que las posibilidades de la arquitectura como material educativo para la ciencia en la escuela hayan dejado de ser un elemento prioritario. Humanismo, ciencia e investigación educativa nos acercan a la reflexión de Paulo Freire en su obra *Pedagogía del Oprimido*: la educación no cambia el mundo, sino que cambia a las personas que van a cambiar el mundo.

Nota

[1] Vid. El tangram em flah, elaborada por Josep A. Buil. Recuperada de http://www.xtec.es/~jbuil/tangram/

[2] Es posible llenar un plano por procedimientos no periódicos. Roger Penrose, utiliza dos cuadriláteros, dardo y cometa, que componen un rombo y con las que puede ocupar el plano.

[3] Vid. Los mosaicos Nazaríes, elaborada por Mª José Sánchez Quevedo, CENICE. Recuperada de http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material105/Mosaicos/alhambra.html

[4] En el curso 2014-2015 ha sido concedido, en la Convocatoria de Proyectos de Innovación Docente-UAM 2014-2015 un nuevo proyecto continuación del anterior: Teoría de Respuesta al ÍTEM (IRT) y Tests evolutivos.

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, *80*, 7-24.

Baader, M. S. (2004). Fröbel and the rise of educational theory in the United States. *Studies in Philosophy and Education*, *23 (5)*, 427-444.

Bordes, J. (2012). *Historia de los juguetes de construcción: Escuela de la Arquitectura moderna*. Madrid: Cátedra.

Brosterman, N. (1997). *Inventing kindergarten*. United States: Harry N. Abrams, Inc.

D'Ambrosio, U. (2013). *Etnomatemáticas. Entre las tradiciones y la modernidad*. Madrid: Díaz de Santos.

Moro Ipola, M. (2011). Vitrubio I, 1: La enseñanza de la Arquitectura y de la geometría en la educación de los adolescentes romanos. En monográfico: Vitruve. Sous la direction de Mireille Courrént. *Cahiers Des Études Anciennes*, *48*, 159-176.

Muntañola, J. (2004). Arquitectura, educación y dialogía social. *Revista Española de Pedagogía*, *62 (228)*, 221-228.

Mulero, J., Segura, L., y Sepulcre, J. M. (2013). Percepción de nuestros estudiantes acerca de las matemáticas en la vida diaria. *XI Jornadas de redes de investigación en docencia universitaria: Retos de futuro en la enseñanza superior: docencia e investigación para alcanzar la excelencia académica* (pp. 2144-2157). Coordinadores, Mª Teresa Tortosa Ybáñez, José Daniel Álvarez Teruel, Neus Pellín Buades. Alicante: Universidad de Alicante.

Pérez Gómez, R. (2004). Un matemático pasea por la Alhambra. *Números, Formas y Volúmenes en el entorno del niño* (pp. 81-94). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Perrenoud, Ph. (2001). La formación de los docentes en el siglo XXI. *Revista de Tecnología Educativa*, *14 (3)*, 503-523.

Perrenoud, Ph. (2011). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Bogotá: Magisterio Editorial (trad. en espagnol de Dixnouvelles compétences pour enseigner. Invitation au voyage. París: ESF).

Perrenoud, Ph. (2012). *Cuando la escuela pretende preparar para la vida. ¿Desarrollar competencias o enseñar otros saberes?* Barcelona: Graó (trad. en espagnol de Quand l'école prétend préparer à la vie… Des compétences ou d'autres savoirs? París: ESF, 2011).

Romañá, T. (2004). Arquitectura y educación: Perspectivas y dimensiones. *Revista Española de Pedagogía*, *62 (228)*, 199-220.

Sánchez Canales, G. (2013). A Tale of Two Cities: A Comparative Analysis of James Joyce´s Dublin and Saul Bellow´s Chicago. Special Issue on Saul Bellow´s Urban Lanscapes. *Saul Bellow Journal*, 26 (1-2), 127-152.

Sánchez Canales, G., y López Varela, A. (2014). Kishinev/Chisinau, the Other City in AleksandarHemon´s. The Lazarus Project. En López Varela (ed.), *Cityscapes: World Cities and Their Cultural Industries* (pp. 178-193). Illinois: Common Ground Publishing.

Solomon, S. G. (2014). *The Science of Play. How to Build Playgrounds That Enhance Children's Development*. New England, USA: University Press of New England.

Tiemblo, A., Atrio, S., Bandera, F., Izcue, M., y Andrés, P. (2013). *Matemáticas y comprensión de la realidad observable. El espacio y su medida. La geometría*. Tomo 2. Madrid: CCS.

Vitruvio, M. L. (2000). *Los diez libros de Arquitectura*. Barcelona: Editorial Iberia, S.A.

Wright, F, Ll. (1998). *Autobiografía: 1867-1944*. Madrid: El Croquis.

Abstract

Architecture in teacher training: from tangram to nasrid palace mosaic. firmitas, utilitas and 'venustas'

INTRODUCTION. This paper is intended to value Architecture as a pedagogic tool in the acquisition of geometric concepts by teachers at the early stages in Education. This research study has been included in a research project (ref. EDU2011-29114) entitled "Escuelas para la Justicia Social" ("Schools for Social Justice"). METHOD. This experience has been drawn on previous studies which have been conducted by the authors of the present paper since 2003. The designs of two questionnaires have been later used as pre- and post-tests in order to assess the degree of satisfaction and performance achieved throughout a number of courses given in Local Innovation and Teacher Training Centers in the Autonomous Community of Madrid . Similarly, a series of working sessions have been sequenced in order to address this specific training. RESULTS. The main finding of the present study consists in revealing the possibilities offered by Architecture as an interdisciplinary element valid in the acquisition of geometric knowledge. DISCUSSION. The present paper is integrated into other ground-breaking proposals in the field of didactics of Experimental Sciences and Mathematics of which only those pertaining to geometry are under study here. Although the comments received by teachers have been positive and have been successfully implemented in classrooms, at present the authors of this paper still do not have a quantitative nominal register of the results.

Keywords: *Architecture, Children's Art, Science Activities, Construction Materials, Physical Environment.*

Résumé

L'architecture à la formation des enseignants: Du tangram aux carreaux Nazari. Firmitas, utilitas et 'venustas'

INTRODUCTION. Le travail a été effectué pour valoriser l'architecture comme un outil pédagogique pour l'acquisition de concepts géométriques par des enseignants dans les premières étapes d'enseignement. La recherche est encadrée dans le projet R+D de référence EDU2011-29114 dont le titre est: Ecoles pour la Justice Sociale. **MÉTHODE**. L'expérience est conséquence des travaux précédents qui ont été développés par les auteurs de cet article après 2003. On a fait deux enquêtes qui ont été utilisées comme pré et post-test, pour évaluer le niveau de satisfaction et de réussite dans les cours qui ont été enseignés dans les Centres Territoriaux d'Innovation et de Formation des enseignants à Madrid (*). De la même façon, on a séquencé une série de séances de travail grâce auxquelles on pourrait donner réponse à cette formation spécifique. **RÉSULTATS**. La principale conclusion de l'étude est la constatation des possibilités de l'architecture comme un élément interdisciplinaire valable pour l'acquisition de connaissances géométriques. **DISCUSSION**. Le travail est intégré a vec d'autres nouvelles propositions d'enseignement de la Didactique des Sciences Expérimentales et de Mathématiques desquelles on a seulement montré dans cet article celles qui se réfèrent à la géométrie. Les commentaires reçus par les enseignants qui ont été formés sous le même modèle sont favorables et la méthodologie a été implémentée avec succès. Pour le moment les auteurs de l'article n'ont aucune trace nominale quantitative de leurs résultats.

Mots clés: *Architecture, L'art des enfants, Les activités scientifiques, Matériaux de construction, Environnement.*

(*) En español, Centro Territorial de Formación e Innovación del profesorado, CTIF.

Perfil profesional de los autores

Santiago Atrio Cerezo (autor de contacto)

Arquitecto (1993). Doctor en Ciencias de la Educación (2006). Desde 2010 trabaja como profesor en el Departamento de Didácticas Específicas de la Facultad de Formación de Profesorado y Educación de la Universidad Autónoma de Madrid en el área de Ciencias Experimentales. Coordinador del Grupo de Investigación DICEMA. Ponente en cursos y seminarios de los CTIF de la Comunidad Autónoma de Madrid.
Correo electrónico de contacto: santiago.atrio@uam.es
Dirección para la correspondencia: Facultad de Formación de Profesorado y Educación de la Universidad Autónoma de Madrid. C/Fco. Tomás y Valiente, 3. CP 28049. Madrid, España.

Natalia Ruiz López

Licenciada en CC. Matemáticas, doctora en Formación e Innovación del Profesorado. Pertenece al área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Didácticas Específicas de la Facultad de Formación de Profesorado y Educación (UAM). Imparte docencia fundamentalmente en los grados de Magisterio en Educación Primaria y Magisterio en Educación Infantil. También imparte cursos

de formación permanente del profesorado de Primaria y Secundaria en la Comunidad de Madrid.
Correo electrónico de contacto: natalia.ruiz@uam.es

Sacha Gómez Moñivas

Doctor en Ciencias Físicas y licenciado en Psicología. Desde 2007 trabaja en el Departamento de Ingeniería Informática de la Universidad Autónoma de Madrid. Dirige proyectos de investigación en innovación docente de forma ininterrumpida desde 2011 en relación al uso de las nuevas tecnologías en la educación. Sus líneas de investigación más recientes tratan el uso de videojuegos como herramientas de motivación en la enseñanza y nuevos métodos de evaluación docente basados en test adaptativos.
Correo electrónico de contacto: sacha.gomez@uam.es