Cálculo de la Dimensión Fractal en Señales de Origen Caótico

Darío Domínguez Cajeli, Luz E. Palacio Duque, Julia Sierra, Watson Vargas, Antonio Mora*

Introducción

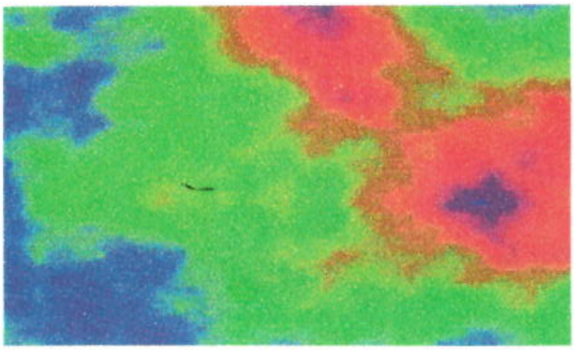
Actualmente la Facultad de Ingeniería de la Universidad Militar Nueva Granada está implementando una línea de investigación en objetos fractales, para calcular su dimensión en diversas aplicaciones, útiles para las diversas ramas de la Ingeniería. Dentro de las actividades se organizó un seminario abierto, al que se vincularon docentes de la Universidad Nacional de la Facultad de Ingeniería Química y estudiantes del Magister de la línea denominada Catálisis Química y Biotecnología, quienes habían avanzado en la relación intrínseca entre caos y fractal, y generosamente compartieron algunos de sus resultados con los docentes encargados del proyecto en la Universidad.

Fruto de las discusiones es este primer avance en el tema, que con seguridad llamará la atención de los lectores, por lo novedoso para el medio.

La dimensión fractal es una dimensión no entera que describe el grado de irregularidad de un objeto. Por ejemplo, una superficie porosa poseerá una dimensión mayor que dos (correspondiente a un plano liso) y menor que tres (correspondiente a un volumen), acercándose más a uno u otro dependiendo del grado de irregularidad (Mandelbrot, 1987). Existen muchas definiciones más específicas, y clasificaciones de acuerdo con el fenómeno al cual se dirigen y la manera de calcularlas. Matemáticamente, siempre que se posea conocimiento de la ley de conformación de la estructura, se calcula en principio tomando el límite del cambio logarítmico del tamaño del objeto y el cambio logarítmico de la escala de medición, cuando ésta tiende a cero, (Mandelbrot, 1987).

Existe una amplia diversidad de métodos de cálculo de la dimensión fractal y aún no hay un acuerdo sobre los más eficientes; estas diversas metodologías van desde las de uso

* Docentes Facultad de Ingeniería - Universidad Militar "Nueva Granada"



Representación Fractal

más popular como la denominada "box counting",(Avnir,1988), hasta métodos experimentales avanzados como la Porosimetría de Mercurio, las isotermas de Adsorción y Desorción, (Baoquan y Shaofen, 1995), y la Resonancia Magnética de Imagen, (Rigby y Gladden, 1996).

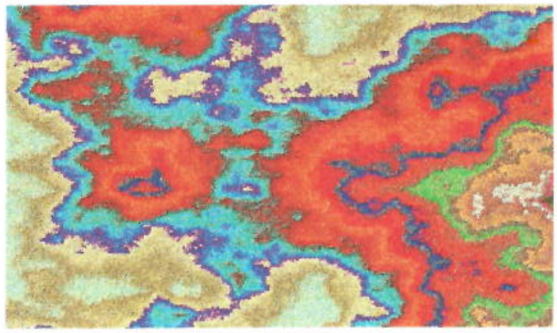
El objetivo de este artículo es mostrar una ejecución simulada de los cálculos de la dimensión fractal, en un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, ampliamente estudiado en la literatura, denominado el atractor de Rössler, con su correspondiente explicación sobre su utilidad en la Ingeniería Química.

Metodología

La determinación de la dimensión fractal se llevará a cabo por el método de "box counting", el computador genera una rejilla de lado s, y en cada iteración cuenta el número q, de cuadrados ocupados. El valor s, se va incrementando a partir de un valor mínimo, escogido arbitrariamente. La regresión de log(q) contra log(1/s), nos da un estimado de la dimensión fractal D.

Caos y Fractales

Denominamos caos al comportamiento aparentemente impredecible, que surge de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, de gran sensibilidad a las condiciones iniciales. Dentro de los muchos sistemas estudiados, centraremos la atención en uno de ellos, por su aplicación en la Ingeniería Química. El sistema de ecuaciones y las gráficas correspondientes, se realizaron en MATLAB versión profesional.



Representación Fractal

El atractor extraño, es el limite de una trayectoria caótica, y el sistema además de ser sensible a las condiciones iniciales es un sistema no conservativo.

La presencia de caos en un sistema, conlleva a la presencia de algún tipo de geometría u objeto fractal. El proceso de generación del atractor de Rössler, tiene las características de Compresión, expansión, plegamiento, ceramiento y microestructura fractal, (Montero y Morán, 1992).

Descripción del Atractor de Rossler

El primer sistema de ecuaciones desarrollado por Otto Rossler (Rossler, 1.976) resultó de un modelo de reacción química, en el cual todas las variables representaban la concentración de alguna especie química. Dicho sistema reveló que, al aumentar uno de los parámetros del modelo, la respuesta del sistema multiplicaría su periodicidad en forma de una cascada de duplicación de periodos, hasta llegar al caos químico u oscilación aperiódica de las concentraciones. Después de este descubrimiento, se reportarían otros modelos cinéticos que podían dar origen al caos, desde Isotérmicos con cinéticas simples hasta No Isotérmicos con cinéticas complejas, pero lo curioso es que la estructura del atractor caótico generado por la mayor parte de ellos es muy similar entre sí; muchos de ellos tienen la forma general del primer atractor descubierto por Rossler (Doherty et al., 1.988), y que se conocería como la "banda de Rossler" (Figura 1).

Existen varios conjuntos de ecuaciones diferenciales que generan, a determinados valores de los parámetros, atractores extraños de Rossler, al graficar los valores en el espacio x-y-z generados a medida que transcurre el tiempo en el método de integración numérica (en este caso, Runge-Kutta de 4° orden). Los siguientes son dos ejemplos, que pueden ser reproducidos al reemplazar los valores citados de los parámetros:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = xy + rx - cy \qquad [1]$$

$$\frac{dz}{dt} = x + bz$$

Con los siguientes valores de los parámetros: r = 0,4, b = 0,36 y c = 4,5.

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay \qquad [2]$$

$$\frac{dz}{dt} = b - cz + xz$$

Con los siguientes valores de los parámetros: a = 0,2, b = 0,2 y c = 5; o también con: a = 0,15, b = 0,2 y c =1.0.

En las figuras se reportan los resultados de cada uno de los modelos, analizando su comportamiento en la región de caos, mediante las técnicas de:

- Cálculo de la dimensión Fractal de la serie de tiempos, que proporciona un índice de la irregularidad de la señal.
- Mapas de Retardo, que, al graficar una señal caótica contra ella misma a un tiempo de retardo fijo, permite la reconstrucción de un atractor extraño, huella del caos.
- Análisis de Fourier, transformando el espacio de tiempo en espacio de frecuencias, que origina los espectros de Potencia y de Frecuencias. En el caso de caos, aparece un espectro de banda ancha.
- Cálculo de exponentes de Lyapunov, que, por demostrar la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales (presencia del caos), permite diferenciar éste del ruido.

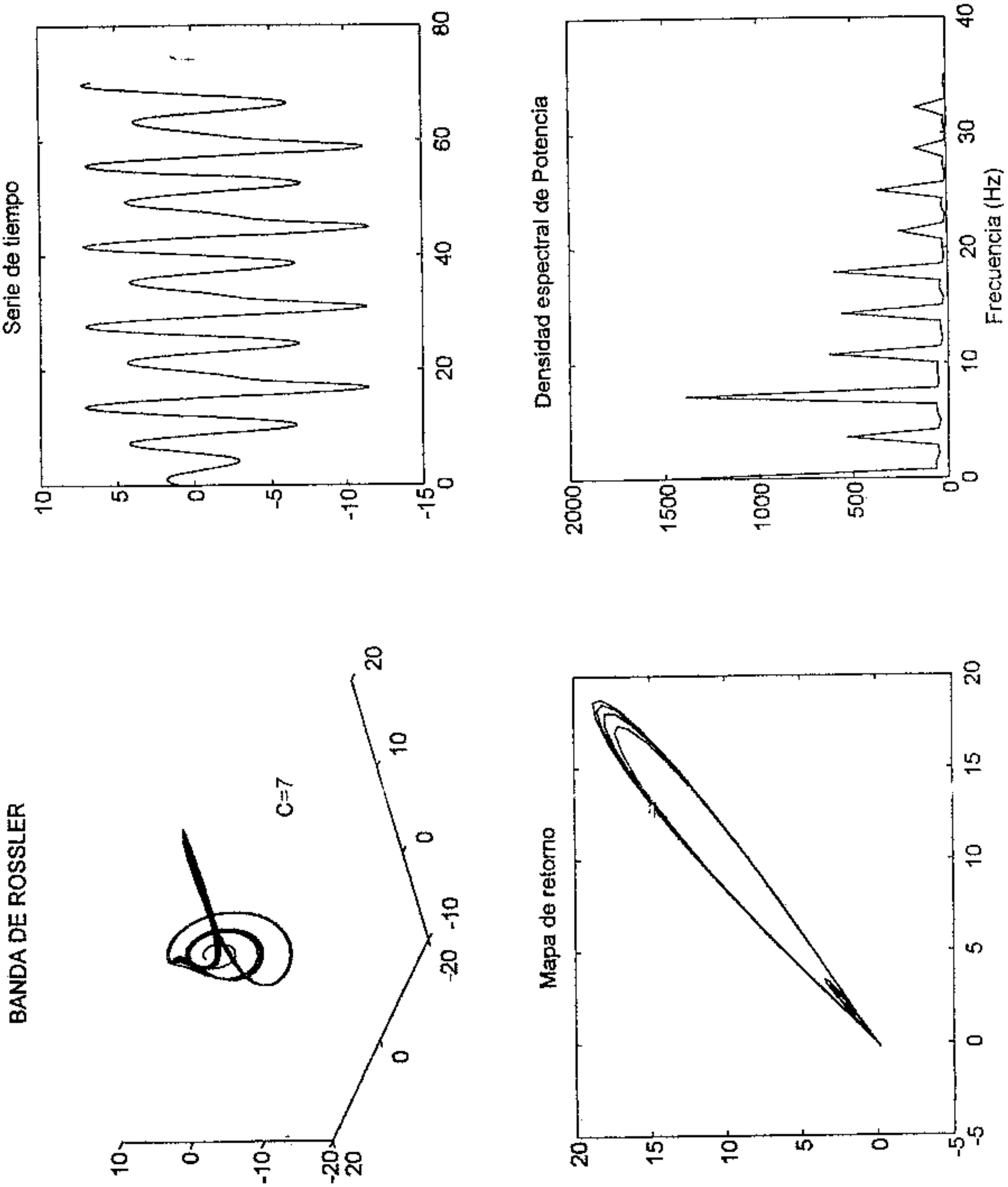

BANDA DE ROSSLER
C=7
Serie de tiempo
Mapa de retorno
Densidad espectral de Potencia
Frecuencia (Hz)

Figura 1

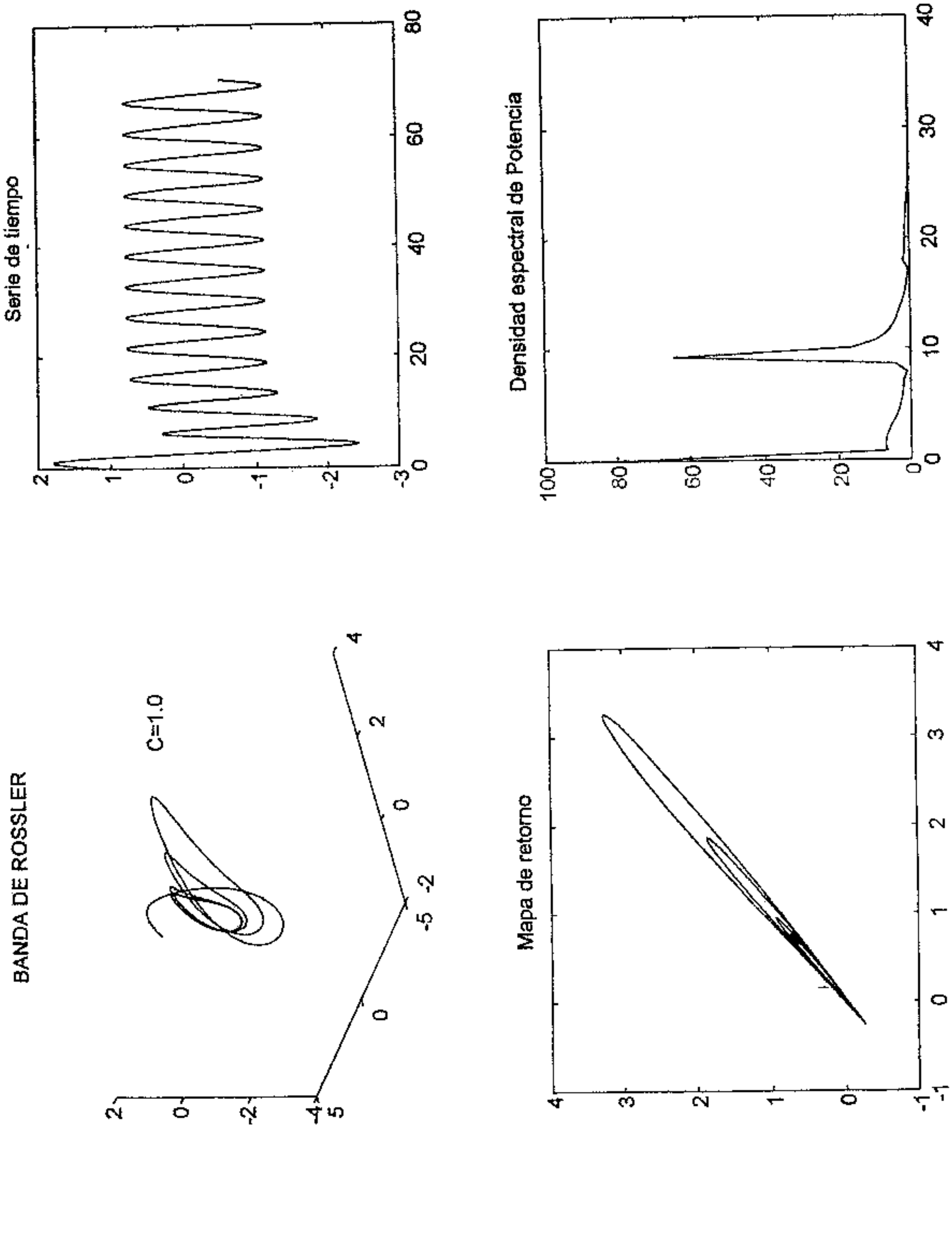

BANDA DE ROSSLER
C=1.0
Serie de tiempo
Densidad espectral de Potencia
Mapa de retorno

Figura 1

Resultados

El software utilizado para calcular la dimensión fractal (Sarraille, Di Falco, 1.992) y para calcular los exponentes de Lyapunov (Wolf, 1.996) fue capturado a través de INTERNET.

Los resultados para la dimensión fractal y el exponente de Lyapunov máximo, al correr los programas, para el atractor del sistema de ecuaciones [1] con c = 5, fueron de: D = 0,0998, s = 0,0487, con 1689 datos.

En el sistema [2], con c = 7,85, fueron: D = 0,2328, s = 0,1143, con 1389 datos.

Todos estos resultados reflejan lo que se observa en las figuras, es decir, la existencia de un comportamiento no estable ni periódico, pero con una base determinista.

Además, tales resultados muestran que el sistema es levemente caótico para los parámetros estudiados, comparado con los valores de otros sistemas que, en algún sentido, podríamos llamar "más caóticos" (incluso Rossler con mayores valores del parámetro "c"). Sin embargo, sigue teniendo las características de complejidad e impredectibilidad que determinan al caos.

Conclusiones

En este artículo se avanzó en la comprensión de las características del caos y los fractales, mediante el cálculo del exponente máximo de Lyapunov y de la dimensión fractal (por Box-Counting). Se indicó además cómo surge el caos a partir el análisis del sistema de EDO de Rossler, indicando el sentido de aplicación en Ingeniería, que raras veces se reporta junto con estos cálculos.

El análisis permitirá, a su vez, determinar resultados en otras ramas de la Ingeniería, por ejemplo el cálculo de la dimensión fractal para un terremoto, que se reportará en un artículo posterior.

Bibliografía

- AVNIR, David, "The Fractal Approach To Heterogeneous Chemistry" , 1988.
- LIEBOVITCH, TOTH, "A fast algorithm to determine fractal dimension by box counting", Physics Letters A, 141, 386-390, 1989.
- MANDELBROT, Benoit, "Las objetos Fractales", Ed: Tusquests, 1987.
- MONTERO F., MORAN F., Biofísica., Ed: Eudema, pp 465 - 490, 1992.
- MORA A., Aproximación a la ciencia de la Ing Química desde la Teoría del Caos y la Geometría Fractal, Tesis de M.Sc. en Ing Química, U. Nal. De Colombia, 1.997, En preparación.
- RIGBY S., GLADEEN L., "NMR and fractal modelling studies of transport in porous media", Chem. Eng. Sci., 1996.
- WANG F., LI S., "Determination of the Surface Fractal Dimension for Porous Media by Capillary Condensation", Ind. Eng. Chem. Res., 1997.
- WOLF A., SWIFT, J., et al., "Determining Lyapunov exponents from time series", Physica D, 16: 285-317, 1.985.
- ZHANG B., LI S., "Determination of the Surface Dimension for Porous Media by Mercury Porosimetry", Ind Eng.Chem.Res., 1995.
- MATHLAB, Versión Profesional.
- Software de InterNet.