UN ESTRATO DE LAS MATRICES NORMALES

A STRATA OF NORMAL MATRICES

Adrián Ricardo Gómez Plata.[1]
Departamento de Matemáticas - Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá-Colombia

Fecha de recepción: 26 de julio de 2005
Fecha de aprobación: 30 de agosto de 2005

RESUMEN

Se presentará un estrato para las matrices normales. Para esto se requieren aspectos de tres ramas de las matemáticas: la geometría diferencial, la topología diferencial y la teoría de matrices.

La primera se ocupa de los aspectos geométricos del análisis matemático, la segunda de los aspectos topológicos de la primera, y la última se encarga de encarar el estudio de las matrices desde diversos ámbitos y contextos matemáticos.

En primer lugar, se usará la definición de espacio estratificado como una técnica que permite caracterizar de cierta manera las matrices normales. De forma más puntual, se hablará de las matrices normales con una subvariedad estratificada conexa de ¡$^{2n^2}$.

Para estratificar las matrices normales se tomará como referente la noción de estrato de la topología diferencial. Esto requerirá elementos de geometría diferencial.

Palabras Clave: forma de estrella, subvariedad estratificada, matrices normales.

---

[1] Licenciado en matemáticas (U.Distrital), Esp. en matemáticas aplicadas (USA). Tesis de M Sc. en Matemáticas en proceso (U. Nacional). Líder Investigador del grupo matrix (U.Militar). adrian.gomez@umng.edu.co argomezp@unal.edu.co. adriangomez1975@yahoo.com. matrix_colombia@yahoo.com.mx

ABSTRACT

A strata for normal matrices is presented in this article. This requires aspects from three branches of mathematics: Differential geometry, differential topology and matrix theory. The first one studies geometrical aspects of mathematical analysis. The second one studies topology aspects of the first one, and the third branch faces the study of matrices from diverse mathematical contexts.

First of all, the definition of a stratified space is employed as a useful technique that allows us to characterize normal matrices in a certain way. More specifically, matrices with a connected stratified submanifold of ¡ $^{2n^2}$; will be treated.

In order to stratify normal matrices, the notion of topologic-differential stratum will be employed. This will require some elements of differential geometry.

Key words: star-shaped, stratified submanifold, normal matrix.

I. INTRODUCCIÓN

Marko Huhtanen en [0] construye una estratificación de las matrices normales obtenido del estrato de dimensión maximal n^2+n usando la descomposición Toeplitz y que permite resolver problemas computacionales que conllevan matrices normales; por ejemplo la aproximación de valores propios.

En este artículo se presentará una estratificación que ya Huhtanen presenta en [0] junto con unas aclaraciones matemáticas para su entendimiento y que es un primer paso para comprender la estratificación que él realiza junto con sus aplicaciones.

II. MARCO TEÓRICO

A. VARIEDADES

Una variedad es un espacio topológico M con la siguiente propiedad:

$$Si \quad x \in M, \quad \exists \ alguna\ vencidad\ U\ de\ x \ \ y$$
$$algun\ entero \quad n \geq 0 \quad tal \quad que \quad U$$
$$homeomorfico \quad a \text{ ¡ }^{n}.$$

Un simple ejemplo de variedad es el mismo espacio de ¡ ^{n}, para cada $x \in$ ¡ ^{n} se puede tomar U como todo ¡ ^{n}. Claramente ¡ ^{n} es homeofomórfico a él mismo.

Una circunferencia es localmente homeomorfa a ¡ , luego es una variedad.

El subconjunto M de ¡ ^{2} formado por las rectas $y=x$ e $y=-x$ no es una variedad ya que no es posible establecer un homeomorfismo entre $V_{(0,0)}$ I M y $V\left((0,0)\right)$.

Un subconjunto abierto L de una variedad M es también una variedad a la que se llama naturalmente SUBVARIEDAD de M.

Otro ejemplo lo proporcionan las matrices normales, ya que estas son conexas porque cada uno de sus elementos son conexos por caminos a la matriz cero, es decir las matrices normales "tienen" forma de estrella.

En [2] se puede encontrar en profundidad la relación de las subvariedades en forma de estrella con las formas diferenciales.

D. MATRICES

Se dice que A es una matriz cuadrada si $A=[a_{ij}]\in M_{n\times n}=M_n$
Una matriz $A=[a_{ij}]\in M_n$ se dice que es Hermitiana si $A=A^*$ $\quad donde \quad A^*=\bar{A}^t=[\bar{a}_{ij}]$
Se dice que es antihermitiana si $A=-A^*$. Se puede comprobar fácilmente que

$$A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -3 \end{pmatrix}$$

A no es Hermitiana y que B es Hermitiana.

Una matriz $A\in M_n$ se dice normal si: $A^*A=AA^*$; es decir, si A conmuta con su adjunta Hermitiana. Por ejemplo, toda matriz hermitiana es normal, ya que $AA^*=AA=A^*A$, pero toda matriz normal A no es Hermitiana (excepto si todos sus valores propios son reales).

Existen noventa condiciones equivalentes que caracterizan las matrices normales en [3] por Grone, Jonson, Sa y Wolkowicz y en [4] por Elsner y Ikramov. La definición estándar de normalidad es la mencionada en este artículo y es llamada la condición cero en [3].

El conjunto de las matrices normales N se puede escribir como
$Z=X+iY \quad donde\, X,Y\in ¡^{n\times n}$ y denota la parte real e imaginaria de Z respectivamente. No sobra decir que Z pertenece al espacio vectorial de las matrices complejas de $n\times n$ o al espacio vectorial real de $¡^{2n^2}$.

Una matriz $X\in M_n$ se dice que es unitaria si $X^*X=I$. Por ejemplo la matriz:

$$X=\begin{pmatrix} \dfrac{1+i}{2} & \dfrac{1+i}{2} \\ \dfrac{1-i}{2} & \dfrac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$$

Una matriz $X\in M_n$ se dice que es equivalente unitariamente a $Y\in M_n$ si existe una matriz unitaria $U\in M_n$ tal que $X=U^*YU$.

Si $A=[a_{ij}]\in M_n$ es equivalente unitariamente a una matriz diagonal se dice que A es diagonalizable unitariamente.

A es normal si y sólo si A es diagonalizable unitariamente. Por ejemplo la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable unitariamente porque es hermitiana y por tanto es normal. Algunos cálculos muestran que una matriz U que diagonaliza unitariamente a A es:

$$\begin{pmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

ya que :

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

III. ESPACIOS ESTRATIFICADOS

En esta sección se presentan algunas nociones básicas referidas a la estratificación y se muestran algunos ejemplos de espacios que admiten estratificaciones.

Sea W un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto con bases contables.

Una estratificación en W es una partición Σ *de* W en conjuntos localmente abiertos tal que:

a) Cada $X \in \Sigma$ es una variedad finito dimensional con frontera.

b) Σ es localmente finito.

c) Si

$X, Y \in \Sigma \quad y \quad X \cap \bar{Y} \neq \varnothing \quad entonces \quad X \subseteq \bar{Y}$.[3]

d) Si $X, Y \in \Sigma \quad y \quad X \subseteq Y \; con \; X \neq Y$

$\qquad entonces \; \dim X < \dim Y$

Los conjuntos de los elementos de Σ son llamados el estrato. El par (W, Σ) es llamado un espacio estratificado.

Algunos espacios importantes que admiten estratificación son:

a) Variedades con frontera donde $\Sigma = \{IntM, \partial M\}$. (Por ejemplo, el de las matrices cuadradas M_n)

b) Variedades algebraicas y espacios analíticos en ¡ o £ .

c) Conjuntos analíticos y subanalíticos .

d) Variedades con esquinas.

Para este artículo, el espacio W es un subespacio de una variedad suave M donde el estrato de W se toma coma las subvariedades regulares de M.

La siguiente definición es clave para mostrar por qué las matrices normales son una subvariedad estratificada ¡ $^{2n^2}$.

IV. ESTRATIFICACIÓN PARA FUNCIONES

Una función $f:(W,\Sigma)\rightarrow(W',\Sigma')$ entre dos espacios estratificados se dice que es una estratificación, si para cada $X \in \Sigma$ existe: $X_f \in \Sigma'$ *tal que* $f(X) \subseteq X_f \; y \; f_{|X}$ *es suave.*

En particular si f es un homeomorfismo y f^{-1} es estratificada, entonces se dice que f es un isomorfismo de estratificaciones.

[3] $\bar{Y}$ no es otra cosa que la clausura de Y.

V. CONCLUSIONES

Si vemos a N como la imagen de la función

$$\begin{aligned} N:\ & M_n \rightarrow M_n \\ & (U,D) \rightarrow UDU^* \end{aligned}$$

tenemos que N es una subvariedad[4] estratificada de ¡$^{2n^2}$ ya que esta función es suave y propia como se pide en la anterior definición. Marko Huhtanen en [0] entiende esto en forma equivalente como que $(U,D) \rightarrow UDU^*$ envía conjuntos compactos en compactos.

REFERENCIAS

[0] Huhtanen, M.,(1999), A stratification of the set of normal matrices. En: Helsinki University of Technology Institute of Mathematics Research Reports A414,3-15 p

[1] Baker, A., (2002), Matrix Groups (An Introduction to Lie Group Theory), Londres, Sringer-Verlag, 207-238 p

[2] Spivak, M., (1999), A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol 1, Houston, Publish or Perish INC, 221 p

[3] Grone, R. Johnson, R. Sa, E and Wolkowicz, H., (1987), Normal Matrices, Lin. Alg. Appl 87,213-225 p

[4] Elsner, L and Ikramov, D., (1998), Normal Matrices: an update, Lin. Alg. Appl. 285,291-303 p

[4] En forma de estrella como ya se había mostrado anteriormente.