

MEDIDA BORROSA PARA EVALUAR LA EFICIENCIA DE LA REPRESENTACIÓN DE SEÑALES GRAFOS

Roberto Uzcátegui y Ennodio Torres

Universidad Nacional Experimental Politécnica “Antonio José de Sucre”, Vicerrectorado Barquisimeto
ruzcategui@unexpo.edu.ve, ennodiotorrescruz@gmail.com

RESUMEN. La investigación que se presenta a continuación, de naturaleza proyectiva, tiene como objetivo proponer una medida borrosa de la eficiencia de la representación de señales grafos basada en la dispersión espectral. La metodología utilizada consiste en cinco fases: (1) descriptiva, (2) analítica, (3) explicativa, (4) proyectiva y (5) evaluativa. Partiendo de los conceptos de productividad y eficiencia que se estudian en disciplinas diferentes al procesamiento de señales, como la economía y la ingeniería industrial, y utilizando un principio de incertidumbre equivalente al de Heisenberg desarrollado para señales grafos, se propone una medida borrosa no regular para evaluar la eficiencia de la representación en el dominio de la frecuencia basada en la dispersión espectral de las señales. Se concluye que la propuesta es factible y se recomienda realizar otras investigaciones, de naturaleza interactiva, para ponerla a prueba.

Palabras clave: Medida borrosa, eficiencia, procesamiento de señales grafos

FUZZY MEASURE TO EVALUATE THE EFFICIENCY OF THE REPRESENTATION OF GRAPH SIGNALS

ABSTRACT. The research presented in the following pages, projective in nature, has the objective of proposing a fuzzy measure of the efficiency of the representation of graph signals based on the spectral spread. The methodology employed consists in five phases: (1) descriptive, (2) analytic, (3) explicative, (4) projective, and (5) evaluative. Starting from the concepts of productivity and efficiency that are studied in disciplines different from signal processing, such as economy and industrial engineering, and using an uncertainty principle equivalent to Heisenberg's developed for graph signals, a non-regular fuzzy measure is proposed to evaluate the efficiency of the representation in the frequency domain based on the spectral spread of the signals. It is concluded that the proposal is feasible, and it is recommended that other investigations, interactive in nature, are performed to test it.

Keywords: Fuzzy measure, efficiency, graph signal processing

1. INTRODUCCIÓN

La capacidad de circunscribir la información contenida en una señal a conjuntos pequeños del dominio del tiempo o de la frecuencia es una de las características deseables de ciertas transformadas utilizadas en procesamiento de señales [1], como, por ejemplo, las ondículas [2] y [3]. Infortunadamente, es imposible confinar la información de una señal arbitrariamente en ambos dominios al mismo tiempo, ya que las dispersiones temporal y frecuencial de una señal clásica se relacionan entre sí por medio de un principio de incertidumbre equivalente al de Heisenberg en Física, el cual establece que el conjunto de los posibles valores de la multiplicación de dichas cantidades tiene un ínfimo [2] y [3].

Recientemente ha surgido el estudio formal de una nueva clase de señales cuyo dominio es un grafo [1], lo cual ha motivado a los investigadores a extender a esta nueva familia las nociones desarrolladas anteriormente para otras clases de funciones. En tal sentido, Agaskar y Lu ([4]-[6]) han formulado un principio de incertidumbre para una clase de señales grafos según el cual, dada una señal con una determinada dispersión en el dominio del grafo, su representación en el dominio de la frecuencia (dominio espectral) tiene una dispersión que no puede ser arbitrariamente pequeña. Si se desea reducir la dispersión espectral, hay que cambiar la representación de la señal.

Partiendo de que distintas transformaciones producen dispersiones espectrales diferentes para una señal con dispersión fija en el dominio del grafo, se conjetura que unas formas de representación deben ser más eficientes que otras y se formula la siguiente pregunta: ¿cómo se puede medir la eficiencia de la representación espectral de señales grafos usando la dispersión en el dominio de la frecuencia? El objetivo de este trabajo es proponer una medida borrosa de la eficiencia especialmente concebida con este fin.

La investigación que se describe en este artículo es de tipo proyectiva [7] e involucra el análisis de teorías existentes para el diseño y evaluación de una propuesta.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la primera sección se indica el tipo de investigación realizada y las fases en las que se llevó a cabo el trabajo. Le sigue una sección en la que se presenta y discute el fundamento teórico de la propuesta. Posteriormente se explica la

propuesta en sí misma y se evalúa su factibilidad. Finalmente, se formulan conclusiones y recomendaciones sobre el tema tratado.

2. METODOLOGÍA

El enfoque de este trabajo corresponde a la modalidad de investigación proyectiva descrita en [7]. La investigación proyectiva “consiste en la elaboración de una propuesta [...] como solución a un problema o necesidad de tipo práctico, [...] a partir de un diagnóstico preciso de las necesidades [...]” ([7], p. 567).

La investigación se llevó a cabo en las fases sucesivas indicadas en la Figura 1, comenzando por la descriptiva. A los efectos de este artículo las fases analítica y explicativa se combinan en la sección titulada “Fundamento teórico”, la fase proyectiva queda reflejada en la sección “Propuesta diseñada” y la fase evaluativa, en la sección “Evaluación de la propuesta”.

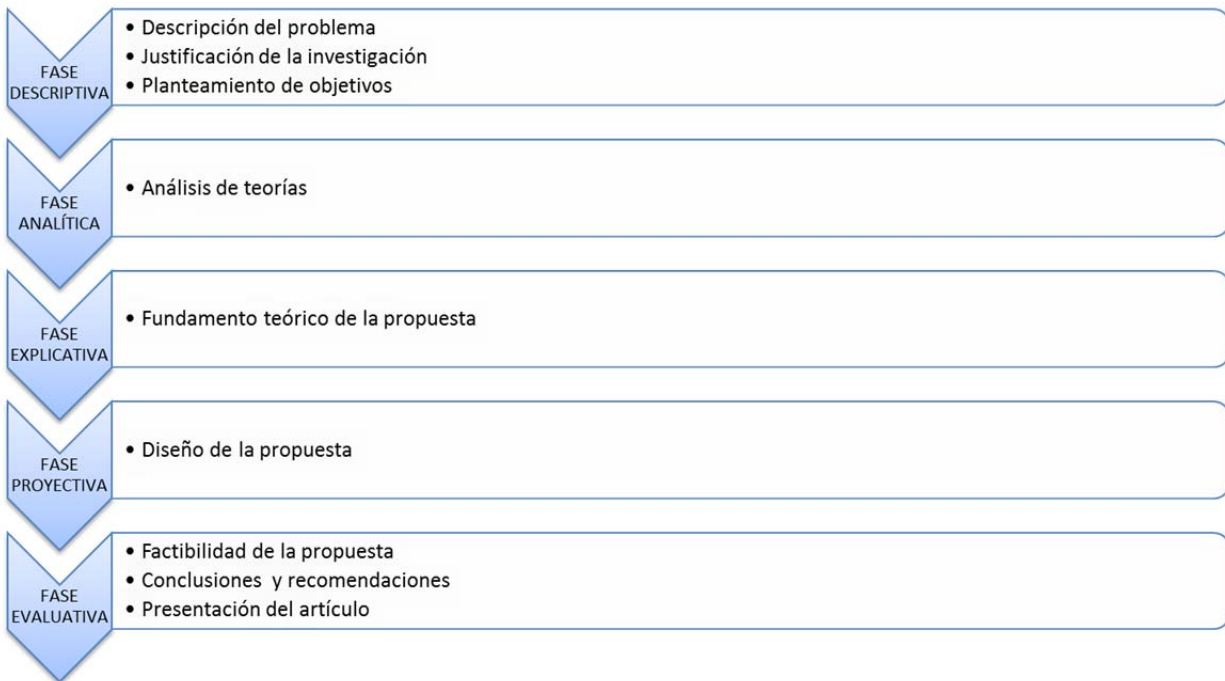


Figura 1. Fases de la investigación proyectiva llevada a cabo.

Los contenidos matemáticos presentados en esta ponencia fueron redactados siguiendo las pautas formales que se encuentran en las referencias [8]-[10].

3. FUNDAMENTO TEÓRICO

Productividad y eficiencia

A continuación se presentan algunas nociones sobre productividad y eficiencia que sirven de base para la formulación de la medida borrosa propuesta en este trabajo.

Supóngase que en un determinado ámbito se utilizan m insumos (*inputs*) para producir s productos (*outputs*). Si se representan las cantidades de los insumos por $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0$, y las de productos por $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_s \geq 0$, se puede pensar que una unidad de producción—persona, empresa, industria, región o país—usa un vector de insumos $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T \in \mathbb{R}_+^m$ para producir un vector de productos $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_s]^T \in \mathbb{R}_+^s$, siendo $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. El conjunto de posibilidades de producción (CPP) para dicho ámbito es el conjunto

$$P = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s : \mathbf{x} \text{ puede producir } \mathbf{y}\}, \quad (1)$$

donde cada pareja ordenada $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in P$ representa una unidad de producción.

La frontera eficiente es el subconjunto de P que representa la mayor cantidad posible de productos para unos insumos dados o la menor cantidad posible de los insumos para unos productos dados [11]. Las parejas ordenadas que se encuentran en la frontera se llaman “técnicamente eficientes” [11]. La eficiencia técnica “pone de manifiesto la capacidad que tiene una unidad [de producción] para obtener el máximo Output a partir de un conjunto dado de Inputs” [12]. En otras palabras, eficiencia es la “capacidad [...] de producir el máximo de resultados con el mínimo de recursos” [13].

Los elementos de P que están fuera de la frontera eficiente se llaman “técnicamente ineficientes”; los elementos que están en el complemento \bar{P} se llaman “técnicamente imposibles”.

La productividad se define como cantidad de productos dividida entre cantidad de insumos [11]. Dadas dos unidades de producción técnicamente eficientes, las mismas no tienen por qué ser igualmente productivas.

Los rendimientos de escala tienen que ver con cuánto aumentan las cantidades de productos cuando se incrementan las cantidades de insumos. Supóngase que $y = f(x)$; si $\alpha > 1$, entonces se dice que hay rendimientos constantes de escala cuando $\alpha y = f(\alpha x)$; rendimientos crecientes de escala, cuando $\alpha y > f(\alpha x)$; y rendimientos decrecientes de escala, cuando $\alpha y < f(\alpha x)$.

La Figura 2, tomada de [11], sirve para ilustrar los conceptos de frontera eficiente, eficiencia técnica, productividad y rendimientos de escala en el caso en que se utiliza un solo insumo (representado mediante la letra x) para producir un solo producto (denotado mediante la letra y). La curva OF' representa la frontera eficiente. Todos los puntos del primer cuadrante del plano cartesiano que se encuentran enmarcados entre el eje horizontal y la línea OF' (incluyendo ésta) constituyen el CPP. Los puntos B y C representan unidades técnicamente eficientes porque se encuentran sobre la frontera eficiente. El punto A representa una unidad técnicamente ineficiente. Esta ineficiencia se debe a que la unidad A utiliza la misma cantidad de insumo que la unidad B, pero produce una cantidad menor de producto. La productividad, definida como el cociente cantidad de productos entre cantidad de insumos, es numéricamente igual a la pendiente de la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto correspondiente a una unidad de producción. Con base en esto, se puede decir que la unidad A es menos productiva que la B, y ésta, a su vez, menos que la C. Nótese que una unidad puede ser técnicamente eficiente y aun así ser menos productiva que otra (tal es el caso de B que es tan eficiente como C, pero menos productiva que esta última). La productividad se puede mejorar, como lo dicen Coll y Blasco [12] “al explotar economías de escala”. En el caso de la Figura 2, los rendimientos de escala para las unidades B y C se pueden comparar mediante la pendiente de la curva OF' en el punto correspondiente. C tiene mayor rendimiento de escala que B. De hecho, C está produciendo a la escala óptima para esa curva en particular porque la recta de productividad es tangente a la frontera eficiente en ese punto. Si las unidades no se encuentran sobre la curva (por ejemplo, A), hace falta observar cómo cambia la producción con el tiempo para determinar el tipo de rendimiento.

En general, la frontera eficiente no se conoce a priori. Dadas n unidades de producción, la frontera eficiente debe ser determinada empíricamente utilizando técnicas tales como el análisis envolvente de datos (DEA, por sus siglas en inglés) [11] y [12] o el análisis de frontera estocástica [11].

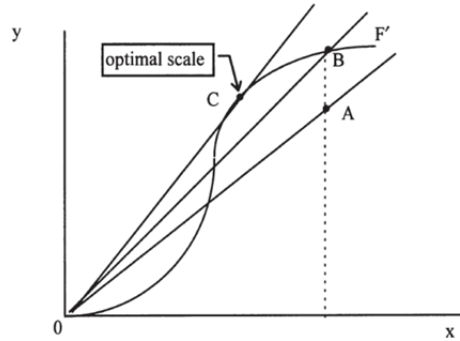


Figura 2. Frontera de producción, eficiencia técnica, productividad y rendimientos de escala (Fuente: [11]).

La Figura 3, tomada de [12], muestra otro ejemplo de frontera eficiente. En este caso hay dos insumos (x_1 y x_2) y un producto (y). Para dibujar el gráfico, la cantidad de cada insumo se normaliza por unidad de producto (x_1/y y x_2/y). La frontera eficiente es la línea que pasa por A, B, C y D. Las Unidades A, B, C y D son técnicamente eficientes, en tanto que la Unidad E es técnicamente ineficiente. La Unidad E puede mejorar su eficiencia reduciendo proporcionalmente las cantidades de ambos insumos que utiliza para generar una unidad de producto hasta trasladarse al punto E'; sin embargo, esta no es la única forma de hacerlo.

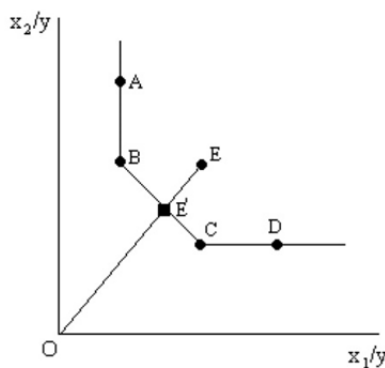


Figura 3. Frontera eficiente en el caso de dos insumos y un producto (Fuente: [12]).

La Figura 4, tomada de [12], muestra una frontera de producción y tres maneras en que la unidad ineficiente A puede mejorar su eficiencia. (1) La unidad A podría reducir la cantidad C de

insumos que requiere para producir la misma cantidad B de productos; a esto se le llama “orientación *input*” en la Figura 4. (2) La unidad A podría aumentar la cantidad B de productos que genera con la misma cantidad C de insumos; a esto se le llama “orientación *output*” en la Figura 4. (3) la unidad A podría reducir la cantidad C de insumos que utiliza y a la vez aumentar la cantidad B de productos que genera; a esto se le llama “orientación *input-output*” en la Figura 4.

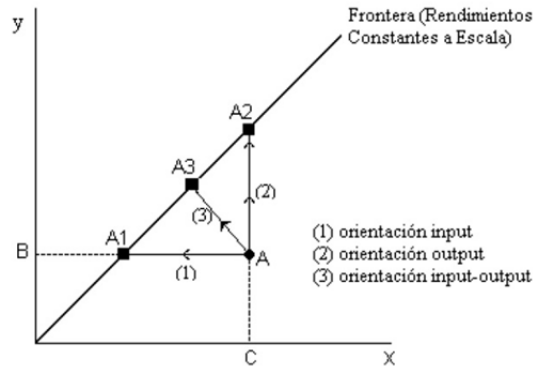


Figura 4. Orientación del DEA. (Fuente: [12]).

Grafos y señales grafos

Dados dos conjuntos finitos A y V , sea $\mathcal{P}_2(V) = \{\{v_i, v_j\} : v_i \in V \wedge v_j \in V\}$. Un *grafo* es una terna $G = (A, V, \gamma)$, donde:

- A es el conjunto de *aristas* de G , lo cual se denota $A(G)$;
- V es el conjunto de *vértices* de G , lo cual se denota $V(G)$; y
- $\gamma : A \rightarrow \mathcal{P}_2(V)$ es la función que a cada arista $a \in A$, le asocia un único conjunto binario de vértices $\{v_i, v_j\} \in \mathcal{P}_2(V)$, y por ende se escribe $\gamma(a) = \{v_i, v_j\}$.

Las aristas y los vértices de un grafo también se denominan, respectivamente, *lados* y *nodos*.

Un conjunto de aristas que conecte los nodos v_i y v_k se denomina un *camino* entre v_i y v_k . Un grafo que posee un solo camino entre cualquier par de nodos se denomina *árbol* [4].

Sea G un grafo cuyo conjunto de nodos es $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Una *señal grafo* es una función $x : V(G) \rightarrow \mathbb{C}$ que a cada vértice $v_i \in V(G)$, le asocia un único número complejo $c \in \mathbb{C}$; de donde, $x(v_i) = c$. En este trabajo se considera que el conjunto de llegada de las señales grafo es $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Además se supone que las señales son de cuadrado sumables, es decir, que

$$\sum_{i=1}^n |x(v_i)|^2 < \infty, \quad (2)$$

lo cual se denota $x \in \ell^2(G)$.

Dispersión de una señal en el dominio del grafo y en el dominio espectral

Dado un grafo G cuyo conjunto de vértices es $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, sea $x : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ una señal grafo tal que $x \in \ell^2(G)$. Según Agaskar y Lu [4]-[6]:

- La dispersión de x alrededor del nodo u_0 en el dominio del grafo, $\Delta_{g,u_0}^2(x)$, se calcula mediante la fórmula:

$$\Delta_{g,u_0}^2(x) = \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{v \in V(G)} [d(u_0, v)]^2 |x(v)|^2, \quad (3)$$

siendo $d(u_0, v)$ es una medida de distancia sobre el grafo [15] y $\|x\|$ es la norma- l_2 de la señal x [16].

- La dispersión espectral de x , $\Delta_s^2(x)$, se calcula mediante la fórmula:

$$\Delta_s^2(x) = \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 |\hat{x}(i)|^2, \quad (4)$$

siendo λ_i , para $i \in \mathbb{N}_{[1,n]}$, el i -ésimo autovalor de la matriz laplaciana normalizada del grafo G [14] y $\hat{x}(i)$, para $i \in \mathbb{N}_{[1,n]}$, el i -ésimo coeficiente de la transformada de Fourier

de la señal grafo, tomando como base los autovectores de la matriz laplaciana normalizada del grafo G [1].

Se deduce de (3) y (4) que, dada una señal y una distancia, el valor de la dispersión en el dominio de grafo es constante, pero el valor de la dispersión espectral se puede variar cambiando la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.

Principio de incertidumbre para señales grafos

Sea $G = (A, V, Y)$ un grafo cuyo conjunto de nodos es $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Si $v \in V(G)$, el *grado* de v , denotado $\deg(v)$, se define como el cardinal del conjunto de aristas que contienen a v , es decir:

$$\deg(v) = |\{a \in A(G) : (\exists u \in V(G)) [Y(a) = \{u, v\}]\}|. \quad (5)$$

Los nodos de grado igual a uno (1) de un árbol se denominan *hojas*.

Para una señal grafo $x : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre un árbol, con $\Delta_{g, u_0}^2(x) \neq 0$, tal que el valor de la señal en cada hoja es cero, es decir, $(\forall v \in V(G))[(\deg(v) = 1) \Rightarrow (x(v) = 0)]$, se demuestra en [4] que

$$\Delta_{g, u_0}^2(x) \Delta_s^2(x) \geq \frac{1}{k} \quad (6)$$

donde o $k = 8$ o $k = 32$, dependiendo de ciertas condiciones impuestas a $x(u_0)$, las cuales no vienen al caso en este trabajo (para más detalles, consultar [4]).

La desigualdad (6) se conoce como un *principio de incertidumbre para señales grafos* [4]-[6]. La misma establece que no se puede reducir la dispersión de una señal en el dominio del grafo todo lo que se desee sin a la vez incrementar la dispersión espectral y viceversa.

Región factible

Sea $x \in \ell^2(G)$ una señal grafo. En [6] hay una descripción del siguiente conjunto:

$$\mathcal{D} = \{(s, g) : \Delta_s^2(x) = s \wedge \Delta_{g, u_0}^2(x) = g\}, \quad (7)$$

el cual contiene todos los valores de $\Delta_s^2(x)$ y $\Delta_{g, u_0}^2(x)$ que son factibles usando u_0 como vértice de referencia. A ese conjunto se le llama la *región factible*. La forma general del mismo se ilustra en la Figura 5.

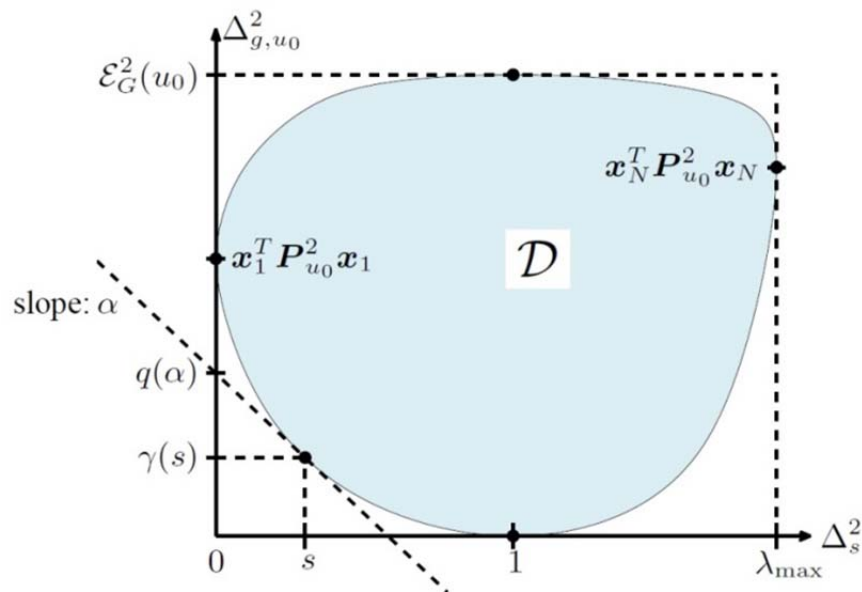


Figura 5. Forma general de la región factible (fuente: [6]).

El conjunto

$$L = \{(s, g) \in \mathcal{D} : (\forall s \in [0, \lambda_{\max}]) [g = \inf \{ \Delta_{g, u_0}^2(x) : x \in \ell^2(G) \wedge (s, \Delta_{g, u_0}^2(x)) \in \mathcal{D} \}]\} \quad (8)$$

se denomina en [6] la *curva de incertidumbre*. Este conjunto representa, para cada valor de la dispersión espectral, el mínimo valor posible de la dispersión en el dominio del grafo para todas

las señales de cuadrado sumable definidas en G . En [6], los autores presentan un algoritmo para estimar la curva de incertidumbre. En la Figura 6 se muestran los resultados obtenidos con dicho algoritmo para tres grafos diferentes. Comparando las Figuras 5 y 6 es fácil deducir qué subconjunto de \mathcal{D} se estima en cada caso en la Figura 6.

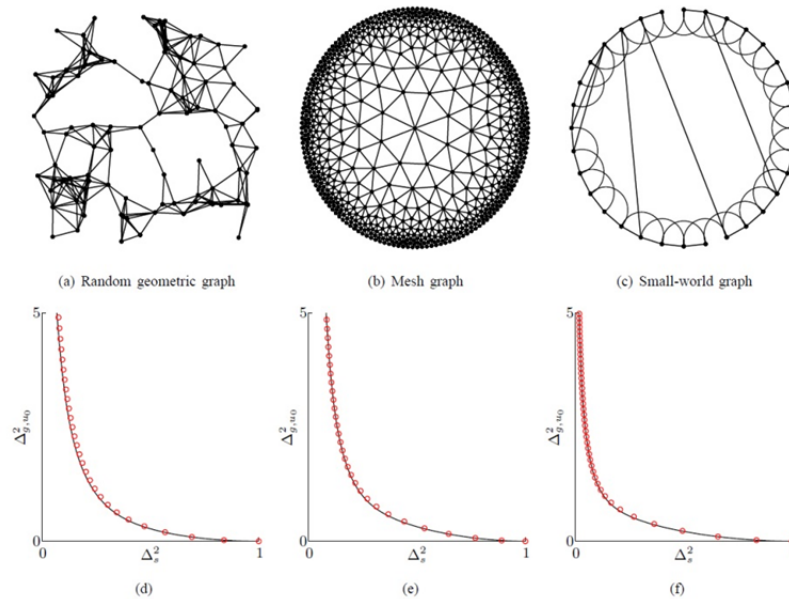


Figura 6. Curvas de incertidumbre para tres grafos diferentes en la región $[0,1] \times [0,5]$ del plano cartesiano. Para el grafo (a), la curva es (d); para (b), (e); y para (c), (f) (Fuente: [6]).

Aunque no se hace en [6], se puede definir el conjunto

$$U = \left\{ (s, g) \in \mathcal{D} : (\forall s \in [0, \lambda_{\text{máx}}]) \left[g = \sup \left\{ \Delta_{g, u_0}^2(x) : x \in \ell^2(G) \wedge (s, \Delta_{g, u_0}^2(x)) \in \mathcal{D} \right\} \right] \right\} \quad (9)$$

el cual representa la frontera superior de la región \mathcal{D} de la Figura 5.

Los autores de [6] consideran que la curva de incertidumbre es más interesante que el conjunto U debido a que la primera representa gráficamente el principio de incertidumbre (6); por tanto, no proponen un procedimiento para determinar U .

En este trabajo se asume que el algoritmo puede encontrarse si hace falta.

4. PROPUESTA DISEÑADA

La Figura 7 servirá para ilustrar en cómo se define la medida borrosa de eficiencia propuesta.

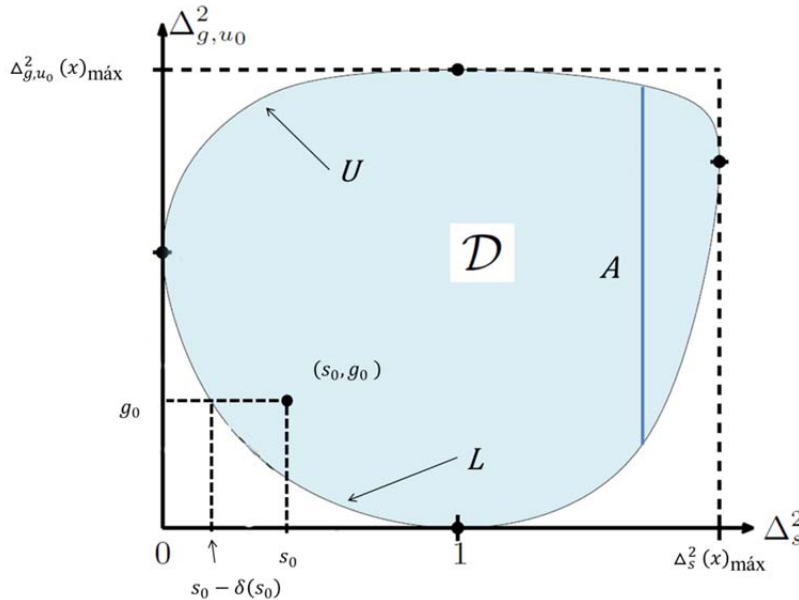


Figura 7. Ilustración de la medida de eficiencia (adaptación propia de la Figura 5).

Sea $x \in \ell^2(G)$ una señal grafo cuyas dispersiones en el dominio del grafo y en el dominio espectral son $\Delta_{g,u_0}^2(x) = g_0$ y $\Delta_s^2(x) = s_0$, respectivamente. El par (s_0, g_0) es un elemento del conjunto \mathcal{D} definido con la proposición (7). Haciendo una analogía con las nociones de productividad y eficiencia técnica discutidas en la sección “Productividad y eficiencia”, si se consideran los conjuntos L y U definidos con las proposiciones (8) y (9) como los análogos de las fronteras eficientes de las Figuras 2 a 4, el punto (s_0, g_0) del plano cartesiano no es eficiente, ya que hay otra señal con la misma dispersión g_0 cuya dispersión espectral es $s_0 - \delta(s_0)$, con $\delta(s_0) > 0$. Como se indica en la Figura 7, $\delta(s_0)$ es la distancia euclidiana del punto (s_0, g_0) al punto con la misma ordenada sobre la curva de incertidumbre (frontera eficiente). Volviendo a la analogía con los sistemas de producción, si el punto considerado fuese una unidad de producción, la misma podría incrementar su eficiencia reduciendo la dispersión espectral como lo hace la unidad A en el caso (1) de la Figura 4. Por tanto, el número $\delta(s_0)$ facilita un tratamiento cuantitativo de la ineficiencia de la representación espectral de esa señal en particular.

Sea X el conjunto \mathcal{D} . La siguiente proposición es verdadera:

$$(\forall s \in [0, \Delta_s^2(x)_{\text{máx}}])[\{(s, g) \in \mathcal{D} : g \in [0, \Delta_{g, u_0}^2(x)_{\text{máx}}]\} \subset X] \quad (10)$$

Uno de tales conjuntos, llamado A , se muestra en la Figura 7 como una línea vertical.

Sea \mathfrak{C} la familia no vacía de subconjuntos de X formada por todas las líneas verticales que existen dentro de \mathcal{D} unidas con el conjunto vacío, es decir:

$$\mathfrak{C} = \left\{ \{(s, g) \in \mathcal{D} : g \in [0, \Delta_{g, u_0}^2(x)_{\text{máx}}]\} : s \in [0, \Delta_s^2(x)_{\text{máx}}] \right\} \cup \{\emptyset\} \quad (11)$$

Sea $g : \mathfrak{C} \rightarrow [0, 1]$ la función definida por:

$$g(A) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow (s_0, g_0) \notin A \\ 1 - \frac{\delta(s_0)}{\Delta_s^2(x)_{\text{máx}}} & \Leftrightarrow (s_0, g_0) \in A \end{cases} \quad (12)$$

Entonces g es una medida borrosa no regular (ver la definición en [17], p. 39) de eficiencia. Efectivamente g es una medida borrosa pues:

- $g(\emptyset) = 0$, ya que $(\forall (s_0, g_0) \in \mathcal{D})[(s_0, g_0) \notin \emptyset]$.
- La función g es monótona. Efectivamente, $(\forall A, B \in \mathfrak{C})[A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset]$. Por lo tanto, el único conjunto de \mathfrak{C} que es subconjunto de cualquier otro conjunto de \mathfrak{C} es \emptyset , lo cual implica que $(\forall A \in \mathfrak{C})[\emptyset \subseteq A \Rightarrow 0 = g(\emptyset) \leq g(A)]$.
- No hay secuencias infinitas crecientes ni decrecientes de elementos de \mathfrak{C} encajados unos dentro de otros, por lo cual las condiciones de continuidad por debajo y por encima (ver [17], p. 39, y [18], p. 178) no aplican.

No hace falta requerir que la medida sea regular, es decir, $X \in \mathfrak{C}$ y $g(X) = 1$ ([17], p. 40), pues tal regularidad no tiene sentido para el problema bajo estudio.

5. EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA

Para poder utilizar la medida borrosa propuesta en la sección anterior es necesario conocer la distancia euclidiana $\delta(s_0)$ entre el punto de interés (s_0, g_0) y el punto con la misma ordenada g_0 sobre la frontera de la región factible. Así mismo, es necesario conocer el supremo del conjunto de valores factibles de la dispersión espectral, $\Delta_S^2(x)_{\text{máx}}$. Esto requiere estimar los conjuntos L y U definidos con las proposiciones (8) y (9). Aunque los procedimientos para hacer esto están fuera del alcance de esta investigación, Agaskar y Lu proponen uno para aproximar el conjunto L , el cual podría ser adaptado para construir U .

Si se desea utilizar la medida propuesta para comparar la eficiencia de varias representaciones de la misma señal, hay que repetir el proceso de determinación de los parámetros mencionados en el párrafo anterior para cada representación. Esto no es imposible de hacer.

Por lo anterior, se considera que la propuesta diseñada es factible.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente trabajo se propone una medida borrosa de la eficiencia de la representación de una señal grafo basada en la dispersión espectral.

Para el problema bajo estudio, la eficiencia tratada en este trabajo en forma cuantitativa es el equivalente de la eficiencia técnica de las unidades de producción que se define en los libros de texto de disciplinas tales como economía o ingeniería industrial.

Partiendo del principio de incertidumbre para señales grafos y de las propiedades de la región factible para los pares de dispersión espectral y dispersión en el dominio del grafo, se identifica la frontera eficiente y se mide la eficiencia por medio de la distancia euclidiana a la misma.

La medida borrosa resultante no es regular, pues no tiene sentido definir la medida del conjunto universal en el problema bajo estudio.

La medida propuesta permite comparar varias representaciones espectrales de una misma señal si se calcula para cada una por separado.

Finalmente, se recomienda realizar futuras investigaciones relacionadas con el tema, tales como: (1) implementación de la medida propuesta, (2) cálculo de la eficiencia de la representación usando la medida propuesta para señales grafos sintéticas y reales, y (3) comparación de la eficiencia de distintas formas de representación de señales grafos utilizando la medida propuesta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Shuman, D. I., Narang, S. K., Frossard, P., Ortega, A. and Vandergheynst, P. The emerging field of signal processing on graphs. *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 30, No. 3, May 2013. Pp: 83-98.
- [2] Vetterli, M. and Kovacevic, J. *Wavelets and subband coding*. Englewood Cliffs, NJ, USA. Prentice Hall PTR. 1995. 519 pp.
- [3] Mallat, S. *A wavelet tour of signal processing: The sparse way*. Third Edition. Burlington, MA, USA. Elsevier. 2009. 824 pp.
- [4] Agaskar, A. and Lu, Y. M. An uncertainty principle for functions defined on graphs. SPIE Conf. on Wavelets and Sparsity. San Diego, CA, USA. August, 2011. 11 pp.
- [5] Agaskar, A. and Lu, Y. M. Uncertainty principles for signals defined on graphs: Bounds and characterizations. 2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Kyoto, Japan. March, 2012. Pp: 3493-3496.
- [6] Agaskar, A. and Lu, Y. M. A spectral graph uncertainty principle. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 59, No. 7, July 2013. Pp: 4338-4356.
- [7] Hurtado de Barrera, J. *Metodología de la investigación*. Cuarta Edición. Caracas, Venezuela. Quirón Ediciones. 2012. Pp: 565-600.
- [8] Torres, E. *Lógica Formal Postmoderna*. Material con fines didácticos. Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, mención Productividad. UNEXPO, Barquisimeto, Venezuela, 2013.

- [9] Wallis, W. D. *A Beginner's guide to graph theory*. Second Edition. Boston, MA, USA. Birkhauser. 2007. Pp: 2-3.
- [10] Torres, E. *Relaciones borrosas*. Traducción, adaptación y ampliación del Capítulo 5 de la referencia [18]. Material con fines didácticos. Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, mención Productividad. UNEXPO, Barquisimeto, Venezuela, 2014.
- [11] Coelli, T., Rao, D. S. P., O'Donnell, C. J. and Battese, G. E. *An introduction to efficiency and productivity analysis*. Second Edition. New York, NY, USA. Springer. 2005. Pp: 1-9.
- [12] Coll V y Blasco O. *Evaluación de la Eficiencia Mediante el Análisis Envolvente de Datos*. Valencia, España. Universidad de Valencia. 2006. 202 pp.
- [13] Sander, B. *Educación, administración y calidad de vida*. Buenos Aires, Argentina. Editorial Santillana. 1990. Pp: 151-153.
- [14] Grady, L. J. and Polimeni, J. R. *Discrete calculus: Applied analysis on graphs for computational science*. London, UK. Springer. 2010. Pp: 60-63.
- [15] Goddard, W. and Oellermann, O. R. Distance in graphs. En Dehmer, M. (Ed.), *Structural analysis and complex networks*. Dordrecht, Netherlands. Birkhäuser. 2011. Pp: 49-72.
- [16] Horn, R. A. and Johnson, C. R. *Matrix analysis*. Third Edition. New York, NY, USA. Cambridge University Press, 2013. 320 pp.
- [17] Wang, Z. and Klir, G. J. *Fuzzy measure theory*. New York, NY, USA. Springer Science+Business Media. 1992. Pp: 39-41.
- [18] Klir, G. J. and Yuan, B. *Fuzzy sets and fuzzy logic. Theory and applications*. Upper Saddle River, NJ, USA. Prentice Hall PTR. 1995. Pp: 177-180.