UNICIENCIA 9
pp. 19-28
1992

INTERPRETACION DE LA CUANTIZACION DEL TENSOR ANTISIMETRICO

M. Chaves
Escuela de Física, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica

RESUMEN

Se cuantiza el tensor antisimétrico por el método canónico. Los problemas de cuantización generados por la invariancia ***gauge*** *(de medida) se superan fijando progresivamente la medida con base en un análisis del espacio de Hilbert. Se demuestra que la teoría cuantizada es equivalente a la de un campo escalar cuantizado. Finalmente, se informa de curiosas relaciones que existen entre la teoría del tensor antisimétrico y la electrodinámica; en particular, que la última es la libertad de medida de la primera, y que la electrodinámica clásica ocurre al imponerse una condición de Lorentz al tensor antisimétrico.*

ABSTRACT

The antisymmetric tensor is quantized using the canonical method. The problems of quantization due to ***gauge*** *invariance are overcomed by means of a process of progressively fixing the gauge on the basis of an analysis of the Hilbert space. It is shown that the quantized theory is equivalent to a quantized scalar field theory. Finally, curious relations are shown to exist between the theory of the antisymmetric tensor and electrodynamics; the last is the freedom of gauge of the former, and classical electrodynamics occurs when a Lorentz condition is imposed on the antisymmetric tensor.*

INTRODUCCION

El paradigma fundamental de la física contemporánea son las teorías de Yang-Mills, i.e., teorías cuánticas de campo, cuyo lagrangiano es invariante localmente ante algún grupo (o grupos) compactos de Lie. La teoría basada en el grupo $SU(3)$ modela correctamente la interacción fuerte, con una constante de acoplamiento cercana a la unidad, y la basada en $SU(2) \times U(1)$ modela la interacción electrodébil, que luego de un rompimiento espontáneo de simetría se convierte en las interacciones débil y electromagnética. La cuantización de estas teorías es totalmente satisfactoria, y el programa de renormalización se puede llevar a cabo sin ningún inconveniente (Pokorski 1987). La confianza absoluta que se tiene hoy en día en su corrección descansa en cientos de miles de experimentos efectuados en todo el mundo en el último cuarto de siglo, que verifican las predicciones de estas teorías tanto a primer orden como con lazos cuánticos.

Hace unos años, dentro del contexto de teorías de supergravedad fue estudiado el tensor antisimétrico $B\mu\nu$. Nuestras convenciones serán que las letras griegas tomen los valores 0, 1, 2 y 3 y las latinas solamente los últimos tres, es decir, la parte espacial, y usaremos la métrica de Minkowski con la diagonal (1, -1, -1, -1). Recientemente, se ha vuelto a despertar el interés en él, y se ha hecho notar que tiene una aplicación en superfluidos y superconductores (R.L. Davis y E.P.S. Shellard 1989). El parámetro de orden de los superfluidos, que es complejo, tiene una fase que puede ser expresada por medio del campo tensorial antisimétrico. Ambos campos, la fase y el tensor antisimétrico, se relacionan por medio de una transformación canónica, según demostró R.L. Davis (1988), a la que llamaremos la transformación dual. Es interesante notar que al hacer esa transformación surge un término adicional, que es precisamente la interacción entre el tensor antisimétrico y la fase del superfluido. Este acoplamiento ya había sido observado antes, pero su origen no había sido tan claramente identificado (E. Witten 1985, A. Vilenkin y T. Vachaspati 1987). Los vórtices del superfluido se pueden tratar muy convenientemente utilizando este formalismo, pues resultan ser soluciones de ecuaciones diferenciales del campo, en las cuales la fase cambia en un múltiplo de 2π, al darse una vuelta alrededor del vórtice. Estas soluciones son estables, dado que se conserva el número cuántico topológico asociado con el cambio de fase. A la línea de singularidades en el centro del vórtice se le llama cuerda, y la interacción entre un vórtice y el campo de fondo (el superfluido) resulta ser una interacción local entre la cuerda y el tensor antisimétrico, fruto de la transformación dual. Debido a la existencia de este esquema, llamaremos *vortodinámica* al estudio de la teoría del tensor antisimétrico. Por otro lado, ya a principio de la década de los setenta fue hecha la observación de que el tensor antisimétrico tiene solamente un grado dinámico de libertad (E. Cremmer y J. Scherk 1974, Y. Nambu 1976, P.G.O. Freund y M.A. Rubin 1980). El problema de la cuantización de la vortodinámica fue estudiado primero utilizando el método de Dirac para Hamiltonianos con restricciones (R.K. Kaul 1978), luego utilizando integrales funcionales para una situación en que esté acoplado al campo gravitatorio (M.A. Namazie y D. Storey 1979, E. Sezgin y P. van Nieuwenhuizen 1980) y finalmente utilizando el operador BRST (P.K. Townsend 1979). Nuestra motivación para continuar este estudio es que los fenómenos cuánticos son fundamentales en la teoría de superfluidos. Específicamente nos interesa la relación entre las cuantizaciones del tensor antisimétrico y la de un campo escalar, con el fin de poder usar libremente ambos cuadros en el tratamiento de superfluidos. Este estudio es necesario, pues es posible que una teoría sea equivalente a otra clásicamente, pero no cuánticamente. Como ejemplo de los problemas que se pueden presentar, considérese que el fotón tiene dos grados de libertad cuando está *on-shell*, pero tres cuando es virtual y está *off-shell*. Si fuera equivalente a nivel clásico a alguna otra teoría, habría que analizarla para ver si sus grados de libertad también cambian cuando está *off-shell*.

Veremos que existe una gran analogía entre la vortodinámica y la electrodinámica, y que están relacionadas de un modo inesperado: la electrodinámica es la libertad de *gauge* (medida) de la vortodinámica, y su ecuación clásica de movimiento se obtiene al fijar la medida. En la sección «El caso electrodinámico» repasaremos la cuantización de la electrodinámica en la medida de radiación, que utilizamos como ejemplo y guía para la cuantización de la vortodinámica, llevada a cabo en la sección «El caso vortodinámico». En la última sección, «Interpretación de los resultados y discusión», se mostrará que la vortodinámica es equivalente a un campo escalar aun en el caso cuántico, y se comentarán este y otros resultados del artículo.

EL CASO ELECTRODINAMICO

Estudiaremos la cuantización de la electrodinámica, que nos servirá como guía para nuestra labor en la próxima sección. El lagrangiano de la electrodinámica, con un acoplamiento entre el potencial electromagnético A^μ y una corriente j_μ, está dado por:

$$L = -j_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \qquad (1)$$

En esta ecuación he incluido la carga del electrón en la corriente j_μ. La parte espacial de A^μ es el potencial magnético A, y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. La ecuación de Euler-Lagrange para el potencial electromagnético asociada con este lagrangiano es

$$\Box A_\mu - \partial_\mu \partial . A = j_\mu, \tag{2}$$

donde $\Box \equiv (\partial_t)^2 - \nabla^2$. El lagrangiano es invariante ante la transformación local

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda, \tag{3}$$

donde $\Lambda = \Lambda(x)$ es una función arbitraria, siempre y cuando el término de acoplamiento se transforme (debido al grado dinámico de la corriente) del siguiente modo:

$$j_\mu A^\mu \rightarrow j_\mu A^\mu - j_\mu \partial^\mu \Lambda. \tag{4}$$

Está claro que si se agrega el término debido al grado dinámico del potencial vectorial, el lagrangiano se mantiene invariante. La teoría generada por el lagrangiano (1) no experimenta ningún cambio físico si se realiza la transformación (3).

La cuantización de la teoría utilizando el método hamiltoniano se puede llevar a cabo de un modo expedito en la llamada «medida de radiación». Hablando en términos generales, el problema que se presenta en la cuantización de la electrodinámica es que la invariancia de medida reduce los grados cuánticos dinámicos de libertad del problema, y los métodos usuales de cuantización, que se fundamentan en grados de libertad independiente, fallan. Otro asunto que debe recordarse es que la simetría de medida implica la conservación de una corriente:

$$\partial \cdot j = 0; \tag{5}$$

esto es siempre cierto, en cualquier medida que se escoja.

El campo eléctrico E^i y el magnético B^i pueden definirse en términos del potencial:

$$E^i \equiv -\partial^0 A^i + \partial^i A^0 = -\dot{A}^i - \frac{\partial}{\partial x^i} A^0, \; B^i \equiv (\nabla \times \mathrm{A})^i. \tag{6}$$

Los campos conjugados a los A^μ están dados por $\pi^\mu = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{A}_\mu$, y específicamente son:

$$\pi^0 = 0, \; \pi^i = -\partial^0 A^i + \partial^i A^0 = E^i. \tag{7}$$

Expresaremos la densidad hamiltoniana en estos términos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}, \\ &= \partial^0 A^i (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) - \frac{1}{2} (\partial^0 A^i - \partial^i A^0)^2 + \frac{1}{4} (\partial^i A^j - \partial^j A^i)^2 + j^\mu A_\mu. \end{aligned} \tag{8}$$

Los términos sumados sobre un índice latino y el índice cero, correspondiente al tiempo, adquieren un factor adicional de dos, que no tienen los términos con dos índices griegos o latinos, debido a que cuando hemos puesto el componente del tiempo y un índice latino, no hemos incluido explícitamente el término en que están transpuestos estos dos índices. Ahora utilizamos integración por partes y la ecuación de movimiento (2) para obtener:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathrm{E}^2 + \mathrm{B}^2) - j^0 A^0 - j^i A^i. \tag{9}$$

El campo A^0 conmuta con su campo conjugado (que es cero). Además, conmuta con todos los demás operadores, por lo que concluimos que es un c-número, usando la terminología de Dirac. La cuantización se lleva a cabo estableciendo los conmutadores a tiempos iguales:

$$[A^i(x,t), A^j(x',t)] = [\pi^i(x,t), \pi^j(x',t)] = 0, \tag{10}$$

$$[\pi^i(x,t), A^j(x',t)] = i\delta^{ij}_{tr}(x - x'), \tag{11}$$

donde δ^{ij}_{tr} no es la función tridimensional usual de Dirac, sino su versión transversalizada:

$$\delta^{ij}_{tr}(x - x') \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot(x-x')} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2}\right). \tag{12}$$

Esta modificación debe hacerse, pues si usáramos la función de Dirac el conmutador no sería consistente con el contenido cuántico de la teoría. Por ejemplo, multiplicando la Ec. (11) por ∇_x, obtenemos en la izquierda de la ecuación, tras haber utilizado (2), el conmutador del campo vectorial A^j y menos la densidad eléctrica $-j^0$, que debe ser cero, ya que no son grados conjugados de libertad. En la derecha de la ecuación no obtenemos cero si hemos usado la función usual de Dirac. Por otro lado, usando la función transversalizada de Dirac es inmediato que en la derecha también se obtiene cero. Multiplicando por ∇_x la Ec. (11), obtenemos la conmutación de $\nabla \cdot A$ con los operadores de cantidad de movimiento, y es obvio que conmuta con las A^μ. Así, pues, concluimos que los campos $\nabla \cdot A$ y A^0 son ambos c-números, i.e., son simplemente funciones complejas, valga la expresión. Este método de cuantización no es invariante, pero el resultado de una cantidad medible sí lo es. Por el contrario, en el método covariante se incluye un término adicional en el lagrangiano que rompe la simetría de medida, y luego se impone una condición de Gupta-Bleuler $\partial \cdot A^{(+)} | \Psi > = 0$, de modo que solamente los vectores $| \psi >$ del espacio de Hilbert, que cumplan con esta propiedad son aceptables para calcular valores esperados. De hecho, usando vectores que no cumplan esa condición es posible encontrar probabilidades negativas, cosa que carece de sentido. El método que estamos utilizando nos permite establecer condiciones de medida a nivel de campo clásico, y tener un espacio de Hilbert, en el que todos los vectores tienen pleno sentido físico; pero, tal como dijimos, no es un procedimiento invariante.

A continuación fijaremos la medida, de modo que, al eliminar los campos dinámicos espurios, podamos cuantizar sin problemas. Supongamos que para algún potencial $\tilde{A}^\mu$ no se da que $\partial \cdot \tilde{A} = 0$. Realizando la transformación (3) con el campo escalar $\tilde{\Lambda}$ obtenemos

$$\partial \cdot \tilde{A} + \Box\tilde{\Lambda} = \partial \cdot \bar{A}, \tag{13}$$

donde $\bar{A}^\mu$ es el potencial en la nueva medida. Si los dos términos en la izquierda de (13) se cancelaran entre ellos, es decir si:

$$\Box\tilde{\Lambda} = -\partial \cdot \tilde{A}, \tag{14}$$

el nuevo potencial satisfacería la condición de Lorentz

$$\partial \cdot \bar{A} = 0; \tag{15}$$

esto es posible, pues (14) es una ecuación diferencial en el campo $\tilde{\Lambda}$, que siempre tiene solución. Todavía podemos hacer una transformación (3) adicional sin salirnos de la medida dada por la condición de Lorentz. En efecto, si modificamos a $\bar{A}^\mu$ sumándole un campo Λ tal que

$$\Box\bar{\Lambda} = 0, \tag{16}$$

para arribar al nuevo campo A^μ, este cumpliría que $\partial \cdot A = 0$. De las transformaciones que satisfacen (16) escogemos específicamente la determinada por la ecuación

$$\Lambda'^0 - \bar{A}^0 = 0. \tag{17}$$

De (17), (15) y (16), se concluye que:

$$A^0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathrm{A} = 0; \tag{18}$$

esta última condición constituye la llamada medida de radiación. Nos permite esta escogencia de la medida eliminar los campos que no constituyen grados de libertad dinámicos, tales como A^0 y la parte longitudinal del A^i. Con esto se elimina la dificultad de tener un campo (el A^0) que no tiene campo conjugado. Los vectores del espacio de Hilbert tienen todos sentido físico, y no hay necesidad de utilizar ninguna condición del tipo de Gupta-Bleuler.

Agregaremos, por lo que pueda ayudar a iluminar la situación, que, usando la condición (18) e integración por partes, es posible escribir el hamiltoniano (9) en la forma familiar para un vector tridimensional de campos:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\pi^i)^2 + \frac{1}{2}(\nabla A^i)^2 - \mathrm{j} \cdot \mathrm{A}. \tag{19}$$

EL CASO VORTODINAMICO

Cuantizaremos aquí a la vortodinámica, y veremos que es correcto aplicar la transformación dual aún en el caso cuántico. El lagrangiano es el siguiente:

$$\mathcal{L} = j_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{6}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}, \tag{20}$$

donde

$$H^{\mu\nu\rho} = \partial^\mu B^{\nu\rho} + \partial^\nu B^{\rho\mu} + \partial^\rho B^{\mu\nu}. \tag{21}$$

El tensor antisimétrico tiene solamente un grado de libertad, aunque parezca extraño, dado sus 6 componentes independientes. El potencial electromagnético tiene 4 componentes independientes, y la libertad de medida los reduce a dos grados de libertad, que son conocidos como las dos polarizaciones del fotón. Similarmente la invariancia de medida de la vortodinámica reduce los 6 componentes a solamente un grado de libertad. La ecuación clásica de movimiento correspondiente al lagrangiano (20) es:

$$\partial_\rho H^{\mu\nu\rho} = j^{\mu\nu}. \tag{22}$$

El lector puede verificar fácilmente que este lagrangiano es invariante ante la transformación

$$B^{\mu\nu} \rightarrow B^{\mu\nu} + A^{(\mu,\nu)}, \tag{23}$$

donde A^μ es un campo vectorial arbitrario, si la corriente tensorial se transforma del siguiente modo:

$$j_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \rightarrow j_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - j_{\mu\nu}A^{(\mu,\nu)}. \tag{24}$$

La libertad de medida de la electrodinámica consiste en poder sumar una uno-forma exacta, es decir, la derivada exterior de una función escalar, al potencial eléctrico. La de la vortodinámica consiste en poder sumar una dos-forma exacta, es decir, la derivada exterior de una uno-forma arbitraria, al potencial vortodinámico. Ahora bien, una uno-forma es precisamente el campo de medida de la electrodinámica.

Para cuantizar la vortodinámica utilizaremos una medida muy parecida a la de radiación de la electrodinámica. Análogamente a lo que ocurre en la teoría de supercuerdas, donde la cuantización en la medida del *time-cone* o como de luz, simplifica el álgebra y permite evadir dificultades matemáticas, el uso de esta medida en electrodinámica y vortodinámica permite un tratamiento especialmente expedito. Los campos canónicos (antisimétricos) conjugados a los $B^{\mu\nu}$ están dados por $\Pi^{\mu\nu} = \partial L/\partial \dot{B}_{\mu\nu}$; específicamente son:

$$\Pi^{0i} = 0,\ \Pi^{ij} = H^{0ij} = \partial^0 B^{ij} + \partial^i B^{j0} + \partial^j B^{0i} \equiv E^{ij}. \tag{25}$$

Llamaremos al campo E^{ij} con el nombre de tensor eléctrico, y al campo

$$B = \partial^1 B^{23} + \partial^2 B^{31} + \partial^3 B^{12}, \tag{26}$$

con el de escalar magnético, una vez más en analogía con la electrodinámica. La corriente del lagrangiano vortodinámico se conserva debido a la simetría que posee la teoría, con lo que:

$$\partial^\mu j_{\mu\nu} = 0. \tag{27}$$

La vortodinámica es invariante ante la transformación (23), que involucra al campo A^μ. Sin embargo, este campo se presenta antisimetrizado, y una transformación (23) no se vería afectada si se modifica el campo A^μ sumándole una derivada total. Es decir, existe una libertad de medida dentro de la libertad de medida de la vortodinámica, y viene dada precisamente por la Ec. (3). *La libertad de medida de la vortodinámica es precisamente la electrodinámica.*

La densidad hamiltoniana resulta ser:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi^{ij}\dot{B}_{ij} - L, \\ &= (\dot{B}^{ij} + \partial^i B^{j0} + \partial^i \dot{B}^{0i})B^{ij} + \frac{1}{6}(\partial^i B^{jk} + \partial^j B^{ki} + \partial^k B^{ij})^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(\dot{B}^{ij} + \partial^i B^{jo} + \partial^j B^{0i})^2 \cdot j_{\mu\nu}B^{\mu\nu,} \\ &= \frac{1}{2}(E^{ij})^2 + B^2 + 2j^{0i}B^{0i} - j^{ij}B^{ij}. \end{aligned} \tag{28}$$

En el cálculo de estas ecuaciones hemos utilizado integración por partes y la ecuación de movimiento. Además, debe recordarse que cada índice latino que se sube es un factor de -1 que debe incorporarse. Este hecho hace que en los signos la vortodinámica y la electrodinámica no se parezcan.

Los campos B^{0i} conmutan con sus campos conjugados (que son cero) y, además, como es natural, con todos los demás operadores de la teoría, con lo que concluimos que son c-números. La cuantización la llevamos a cabo estableciendo los conmutadores a tiempos iguales (no incluimos los campos B^{oi}, que conmutan con todos los demás). Así:

$$[B^{ij}(\mathrm{x}, t), B^{kl}(\mathrm{x}', t)] = [\Pi^{ij}(\mathrm{x}, t), \Pi^{kl}(\mathrm{x}', t)] = 0, \tag{29}$$

$$[\Pi^{ij}(\mathrm{x}, t), B^{kl}(\mathrm{x}', t)] = i\delta_{tr}^{ij,kl}(\mathrm{x} - \mathrm{x}'), \tag{30}$$

donde la función de la derecha de (30) es una función generalizada dada por:

$$\delta_{tr}^{ij,kl}(\mathrm{x} - \mathrm{x}') \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{ik.(\mathrm{x}-\mathrm{x}')} \times$$

$$\left(\delta^{ik}\delta^{jl} - \delta^{il}\delta^{jk} + \frac{k^ik^k\delta^{jl} - k^jk^k\delta^{il} + k^jk^l\delta^{ik} - k^ik^l\delta^{jk}}{\mathrm{k}^2}\right), \tag{31}$$

$$= \epsilon^{mij}\,\epsilon^{nkl} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{ik.(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}\, \frac{k^mk^n}{\mathrm{k}^2}\,.$$

Demostrar la igualdad entre las dos formas de la función $\delta_{tr}^{ij,kl}$ que se observan en esta ecuación es un ejercicio que dejaremos al lector. Debe emplearse esta función en lugar de la usual de Dirac, debido al mismo motivo que en el caso anterior: si uno multiplica (30) por ∇_x y utiliza la Ec. (22), obtiene cero en el lado izquierdo de (30). Debe, entonces, modificar el lado derecho para que esté transversalizado. Multiplicando por ∇_x, obtenemos que $\partial^i B^{i0}$ conmuta con todos los demás operadores. En resumen concluimos que B^{0i} y su divergencia son ambos c-números. Podemos, entonces, utilizar la libertad de medida (23) para imponer una condición análoga a la que aparece en el caso de la electrodinámica, y que llamaremos simplemente de Lorentz:

$$B^{io} = 0, \;\; \partial^i B^{ij} = 0. \tag{32}$$

Demostraremos a continuación que esto siempre es posible. Supongamos que para algún potencial $\tilde{B}^{\mu\nu}$ no se da que $\partial_\mu B^{\mu\nu} = 0$. Realicemos en ese caso una transformación (23) con base en $\tilde{A}^\mu$ para obtener:

$$\partial_\mu \tilde{B}^{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{A}^{(\mu,\nu)} = \partial_\mu \bar{B}^{\mu\nu}. \tag{33}$$

Si los dos términos de la izquierda de (33) se cancelaran entre ellos, es decir, si:

$$\Box\tilde{A}^\nu - \partial^\nu\partial\,.\,\tilde{A} = \partial_\mu \tilde{B}^{\mu\nu}, \tag{34}$$

el potencial transformado $\bar{B}^{\mu\nu}$ satisfacería la condición de Lorentz

$$\partial_\mu \bar{B}^{\mu\nu} = 0. \tag{35}$$

Pero esto siempre es posible, pues en (34) hay cuatro incógnitas y cuatro ecuaciones. Esta condición es compatible con las dos ecuaciones (32). Podemos volver a transformar sin invalidar (34), siempre y cuando el campo de transformación $\bar{A}^\mu$ cumpla la ecuación:

$$\Box A^\mu - \partial^\mu\partial \cdot \bar{A} = 0, \tag{36}$$

pues en ese caso siempre sigue siendo cierto que $\partial_\mu B^{\mu\nu} = 0$. Entre todas estas transformaciones especiales, vamos a escoger la que cumpla que

$$B^{i0} + A^{(i,0)} = 0. \tag{37}$$

Entonces, se vuelve (32) una consecuencia inmediata de (35) y (36). En esta medida, que llamaremos también de radiación, como en el caso electrodinámico, los campos no físicos han sido eliminados. Asimismo, todos los vectores del espacio de Hilbert son de contenido físico, y no hay necesidad de recurrir a condiciones de Gupta-Bleuler ni cosa parecida.

Utilizando la medida de radiación, los campos no nulos son los B^{ij} y los $\Pi^{ij} = \dot{B}^{ij}$, y el hamiltoniano (28) se puede escribir como si fuera el de tres campos escalares, aunque sujetos a la condición de medida (32).

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\Pi^{ij})^2 + \frac{1}{2}(\nabla B^{ij})^2 - j^{ij}B^{ij}. \tag{38}$$

INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS Y DISCUSION

Hemos cuantizado la vortodinámica, y nuestros principales resultados se pueden resumir en las Ecs. (29) y (30), que nos dicen cómo conmutan los campos de la teoría. Es, especialmente, curiosa la forma de función generalizada transversal $\delta_{tr}^{ij,kl}$. Sin embargo, nuestros resultados son de sencilla interpretación en el contexto de la transformación dual. En la referencia de R.L. Davis (1988) se demuestra que a nivel clásico la teoría del lagrangiano (20) es equivalente a la del lagrangiano

$$\mathcal{L}_{dual} = \frac{1}{2}(\partial\alpha)^2. \tag{39}$$

El hamiltoniano correspondiente es:

$$\mathcal{H}_{dual} = \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}(\nabla\alpha)^2, \tag{40}$$

donde $\pi = \dot{\alpha}$. Es bien sabido que los conmutadores apropiados a la cuantización de este lagrangiano son:

$$[\alpha(x,t),\alpha(x',t)] = 0,\ [\pi(x,t),\pi(x',t)] = 0, \tag{41}$$

$$[\pi(x,t), \alpha(x',t)] = i\delta(x - x'), \tag{42}$$

donde la función en la derecha de la última ecuación sí es esta vez la de Dirac. Las relaciones entre estos campos y los vortodinámicos son:

$$\pi = B = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial^i B^{jk}, \tag{43}$$

$$\epsilon^{ijk}\partial^i\alpha = \Pi^{jk}, \tag{44}$$

según se prueba en la citada referencia. El campo B es el escalar magnético, que ya topamos en (26). Demostraremos a continuación que estos conmutadores son equivalentes a los de la vortodinámica, Ecs. (29) y (30), con lo cual quedaría demostrada la identidad entre la vortodinámica y el campo escalar bosónico, tanto en el caso clásico como en el cuántico, y se visualizaría el porqué de la curiosa forma de los conmutadores de la vortodinámica.

Por motivos de simplicidad pusimos en el lagrangiano (39) términos interactivos. El que está en el lagrangiano vortodinámico original (20), puede representar una interacción con alguna corriente tensorial externa, o bien solamente el acoplamiento entre la hoja del mundo de la cuerda (es decir, la superficie que ella barre al avanzar en el tiempo), con el campo $B^{\mu\nu}$, que fue el término hallado por R.L. Davis (1988). En todo caso, mientras los términos interactivos que agreguemos no dependan de las derivadas de $B^{\mu\nu}$ y se mantenga la invariancia de medida, una rápida revisión convencerá al lector de que los resultados que hemos obtenido no necesitan ser modificados. (Usualmente los acoplamientos con vectores y tensores de medida, se hacen con el vector o tensor mismo y no con sus derivadas). En particular los conmutadores a tiempos iguales (29) y (30) no sufren ninguna modificación y, en consecuencia, los conmutadores (41) y (42) tampoco. *Por lo tanto concluimos que nuestros resultados son válidos aún en el caso de que el campo vortodinámico interactúe con otros campos.*

De los tres conmutadores a tiempos iguales dados por las Ecs. (41) y (42) trataremos solamente el caso del último, que es el que presenta las mayores dificultades. Este conmutador de dos campos conjugados es equivalente al (30), que es también de dos campos conjugados. Tomemos en (30) la parcial $\partial/\partial x'^p$, y contraigamos luego con el tensor $\in^{pkl}$. Usando la igualdad $\in^{pkl}\in^{nkl} = 2\delta^{pn}$, la segunda forma de la función $\delta_{tr}^{ij,kl}$ definida en (31) y la Ec. (43), arribamos a:

$$[\Pi^{ij}(\mathrm{x}, t), \pi(\mathrm{x}', t)] = \in^{nij} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{ik.(\mathrm{x}-\mathrm{x}')} k^n,$$

$$= -i\in^{nij} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial x^n}\, e^{ik.(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}. \qquad (45)$$

De aquí podemos obtener inmediatamente que:

$$[\pi(\mathrm{x}, t), \alpha(\mathrm{x}', t)] = i\delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}') + C, \qquad (46)$$

donde C es una constante de integración. Esta constante se puede identificar con cero, pues si tomamos el caso $\mathrm{x} \neq \mathrm{x}'$ la causalidad local nos obliga a poner el lado izquierdo de la ecuación (46) igual a cero (pues los campos tienen que ser totalmente independientes, para un momento dado, en lugares distintos), con lo que $C = 0$, obteniendo así el conmutador (30).

En resumen, hemos solventado las dificultades de cuantización de la vortodinámica, debido a su invariancia de medida, eliminando los campos dinámicos espurios. Así hemos obtenido los conmutadores a tiempos iguales para los campos con sentido físico. Luego hemos reexpresado los conmutadores en una forma sencilla, que corresponde a la de los conmutadores de la teoría dual a la vortodinámica. De todo esto concluimos que la vortodinámica y su teoría dual son equivalentes tanto cuántica como clásicamente. Podemos escoger, entonces, la formulación que más nos convenga para alguna aplicación sin la menor preocupación.

La equivalencia entre la vortodinámica y su dual tiene, además, de su interés teórico, otro más práctico. En efecto, tiene aplicaciones en el estudio de superfluidos y superconductores (R.L. Davis y E.P.S. Shellard 1989). Por ejemplo, da el acoplamiento entre la hoja del mundo y el campo vortodinámico

$B^{\mu\nu}$, permite hacer los cálculos de la fuerza de Magnus de un modo diferente, a menudo más sencillo, y relaciona a dicha fuerza con la teoría de campo de los superfluidos (E.M. Lifshitz y L.P. Pitaevskii 1981).

Un punto extremadamente interesante que sale a la luz es que la electrodinámica y la vortodinámica están íntimamente relacionadas. Según vimos en la sección anterior, la libertad de medida de la vortodinámica es precisamente un campo vectorial A^{μ}, que no tiene que obedecer la ecuación de movimiento clásica. Si transformamos el campo A^{μ} como en la Ec. (3), sumando una gradiente, la transformación vortodinámica (25) sigue siendo la misma. Esto quiere decir que un campo A^{μ} y sus transformaciones (3) no tienen un sentido independiente, exactamente como ocurre en la electrodinámica física. Ahora bien, si fijamos la medida en la vortodinámica por medio de la condición de Lorentz, ya no todos los campos A^{μ} son aceptables, sino solamente los que obedecen la Ec. (34), que es precisamente la ecuación de movimiento (2) de la electrodinámica con la corriente $j^{\nu} = \partial_{\mu}\tilde{B}^{\mu\nu}$. Así pues, el comportamiento clásico del campo A^{μ} se da cuando se fija la medida en la vortodinámica. No sabemos si existe algún motivo profundo para estas «casualidades», pero no dejan de ser muy sugestivas.

REFERENCIAS

Cremmer, E. and J. Scherk, 1974. Spontaneous symmetry breaking of gauge symmetry in dual models. **Nucl. Phys.** B72: 117-124.

Davis, R.L. and E.P.S. Shellard, 1988. Antisymmetric tensors and spontaneous symmetry breaking. **Phys. Lett.** 214B: 219-222.

_____, 1989. Global strings and superfluid vortices. **Phys. Rev. Lett.** 63: 2.021-2.024.

Freund, P.G.O. and M.A. Rubin, 1980. Dynamics of dimensional reduction. **Phys. Lett.** 97B: 233-235.

Kaul, R.K., 1978. Quantization of free field theory of massless antisymmetric tensor gauge fields of second rank. **Phys. Rev.** D18: 1.127-1.136.

Lifshitz, E.M. and L.P. Pitaevskii, 1981. **Landau and Lifshiz: Statistical Physics.** Part. 2. Pergamon Press.

Namazie, M.A. and D. Storey, 1979. Supersymmetric quantization of linearized supergravity. **Nucl. Phys.** B157: 170-188.

Nambu, Y., 1976. Magnetic and electric confinement of quarks. **Phys. Rep.** 23C: 250-280.

Pokorski, S., 1987. **Gauge Field Theories.** Cambridge University Press.

Sezgin, E. and P. van Nieuwenhuizen, 1980. Renormalizability properties of antisymmetric tensor fields coupled to gravity. **Phys. Rev.** D22: 301-307.

Townsend, P.K., 1979. Covariant quantization of antisymmetric tensor gauge fields. **Phys. Lett.** 88B: 97-101.

Vilenkin, A. and T. Vachaspati, 1987. Radiation of goldstone bosons from cosmic strings. **Phys. Rev.** D35: 1.138-1.140.

Witten, E., 1985. Cosmic superstrings. **Phys. Lett.** 153B: 242-246.