



La utilización de los algoritmos de sustracción en educación primaria

Jorge Segura Beneyto

Banyeres de Mariola, segura_1992_10@hotmail.com

Fecha de recepción: 22-09-2015

Fecha de aceptación: 15-11-2015

Fecha de publicación: 15-02-2016

RESUMEN

En este trabajo de fin de grado, el estudio se centrará en investigar el algoritmo de la sustracción. Todo el análisis que se expone, se ha obtenido a partir de varios libros expuestos en la bibliografía y de un instrumento experimental caracterizado por presentar 16 restas con diferentes dificultades. En éste, han participado 201 alumnos y alumnas, que estudian actualmente los cursos de segundo y tercero de Educación Primaria, pertenecientes a cinco centros diferentes. Los resultados demuestran que el método de tomar prestado causa más aciertos, menos errores y la mayoría de los profesores lo prefieren. Además, se constatarán otros aspectos importantes en referencia al algoritmo de la sustracción.

Palabras clave: tomar prestado, llevadas, algoritmo de la sustracción, resta, matemáticas, errores.

The use of subtraction algorithm's in primary education

ABSTRACT

In this final work degree, the study will focus on researching subtraction algorithm. The whole analysis that is exposed, has been obtained from several books, which are exposed in the bibliography and an experimental instrument characterized by presenting 16 subtraction with different difficulties. 201 students have taken part in this study, who are currently studying the second and third courses of primary education, belonging to five different schools. The results show that the method of borrowing cause more hits, fewer errors and most teachers prefer it. In addition, other important aspects will be recorded in reference to the subtraction algorithm.

Keywords: borrow, carried, subtraction algorithm, subtraction, mathematics, errors, bugs.

A Salvador Llinares,
por su perseverancia y ayuda.
Sin la cual, esta andanza no se podría
haber llevado a cabo.

1. Problema a investigar: Fundamentación

Las matemáticas son un instrumento de conocimiento y análisis de la realidad, que nos ayuda a todas las personas a razonar de manera crítica sobre las diferentes realidades y problemáticas del mundo. Por ello, la educación matemática en las etapas obligatorias debe contribuir a formar ciudadanos que

conozcan el mundo en el que vivimos y que sean capaces de fundamentar sus criterios y sus decisiones, así como adaptarse a los cambios, en los diferentes ámbitos de su vida.

Una de las razones de esta investigación es que, en la actualidad y en nuestro país, este tema está un poco olvidado por lo que respecta a investigaciones, ya que todos los estudios que existen fueron realizados por los años 80 y 90 y la mayoría están en habla inglesa. Hay que decir, que pocos investigadores se han dedicado al estudio sobre este tipo de aprendizaje, sobre todo si lo comparamos con los que han investigado la resolución elemental de problemas de adición y sustracción. Pero, el conocimiento sobre el sistema de numeración resulta fundamental para entender el procedimiento de las llevadas, y tomar prestado.

En este trabajo de fin de grado, mi estudio se centrará principalmente en el algoritmo de la sustracción. Más concretamente, investigaré sobre los dos grandes métodos de restar que existen: el de "llevadas" de carácter más tradicional (Método A) y el de "Tomar Prestado" más actual (Método B). En este último, se cambia una unidad del orden superior por diez unidades del orden inmediatamente inferior cuando así es necesario. Es decir, dentro de lo que hay en cada cantidad, se cambian las cantidades parciales de un lado a otro. El método A, trata de añadir diez unidades en la columna correspondiente del minuendo, si no se puede hacer la resta. Esto, debe venir compensado con un aumento equivalente del sustraendo, entonces se le añade una unidad del orden superior en las de orden inmediatamente superior del sustraendo. Además, analizaré los errores más comunes, la cual cosa deberían hacer todos los maestros. Los docentes deben de buscar las causas de los errores cometidos, y así modificar y/o reorientar las estrategias de actuación con el fin de garantizar una educación de calidad y evitar el desaliento del alumno (aprendizaje a partir del error).

1.1. Objetivos

En la presente investigación me he propuesto los siguientes objetivos.

1. Observar qué método se utiliza más en los centros analizados
2. Observar cuál de los dos métodos presenta mejores resultados (aciertos/fallos)
3. Observar y clasificar los errores más comunes a la hora de resolver las restas
4. Señalar cuál es el método preferido por los maestros de los centros estudiados

1.2. Algoritmo de la sustracción

La resta o sustracción es una de las cuatro operaciones básicas de la aritmética. Se trata de una operación de descomposición que consiste en calcular la diferencia que hay entre dos números (el minuendo y el sustraendo). Desde el punto de vista de los matemáticos, la sustracción es simplemente el inverso de la adición. Se supone que los alumnos que pueden escribir la respuesta a preguntas como $3 + 2 = _$ están preparados para preguntas como $5 - 2 = _$. Esta suposición sólo es cierta cuando el algoritmo de la adición es completamente adquirido (Kamii, 1985). Es más, según investigaciones de Piaget y sus colaboradores, han demostrado que los niños se centran principalmente en los aspectos positivos de las acciones, los pensamientos y las percepciones, y que más tarde construyen los aspectos negativos.

Además, según Constance Kamii, en "Reinventando la aritmética II" (1992) y "El niño reinventa la aritmética" (1985), en los libros de texto tradicionales, la sustracción aparece inmediatamente después de la adición, como el puro reverso de la adición. Sin embargo, la sustracción es mucho más difícil para los niños de lo que generalmente se cree. En realidad, la secuencia natural quizás debería ser adición, multiplicación, sustracción y división.

Cuando hacemos restas en las que hay un número superior a la veintena, el procedimiento a utilizar, no es ya el recuento ni la memorización, sino la realización de un algoritmo. Un algoritmo, más que un

procedimiento rutinario, es una aplicación sistemática e iterativa de las propiedades básicas de nuestro sistema de numeración (agrupamiento y valor de posición). Uno de los reconocimientos básicos que inciden en una adecuada utilización de este procedimiento es el sistema de numeración decimal (Maza, 1999).

Como podemos ver, la sustracción es una operación compleja que debe aprenderse muy bien y muy poco a poco, y sobre todo su aprendizaje no debe ser menospreciado. Para resolver el algoritmo existen dos grandes métodos: El método A (Llevadas) y el método B (Tomar Prestado).

A continuación, se explicarán los dos métodos y podremos ver un ejemplo de cada uno.

Método A

Este método utiliza una propiedad que debe ser dominada antes por el niño. El hecho de que, sumada la misma cantidad al minuendo y sustraendo, la diferencia no varía.

La siguiente resta (Figura 1), se resuelve por el método de llevadas así: Como no podemos quitar 6 a 2, colocamos una decena en las unidades, y tenemos 12 unidades. Ahora ya puedo restar $12 - 6 = 6$, y ponemos el 6 en las unidades. Como hemos añadido una decena a las unidades del minuendo, debemos acordarnos de llevar una y añadirla a las decenas del sustraendo, para equilibrar y llevar a cabo la idea matemática de este método (añadir diez unidades al minuendo y una decena al sustraendo). Entonces $2 + 1 = 3$. Ahora restamos, $4 - 3 = 1$, y ponemos el 1 en las decenas. Por último, restamos $3 - 2 = 1$.

$$\begin{array}{r} 3 \ 4 \ 2 \\ - 2 \ 2 \ 6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 12 \\ 3 \ 4 \ 2 \\ - 2 \ 21 \ 6 \\ \hline 1 \ 1 \ 6 \end{array}$$

Figura 1. Ejemplo de resolución de un algoritmo de sustracción por el Método A

Muchas veces se excluye un aprendizaje detallado y previo de esta propiedad resultando que el algoritmo se aprende sin la capacidad conceptual necesaria y generando multitud de errores.

Método B

El algoritmo de la sustracción de $452 - 278$ (Método B) se ve representado en la Figura 2. Para resolver las restas en este método, se debe hacer lo siguiente: Primero, como a 2 no le podemos quitar 8, lo que hacemos es desagrupar una decena y pasarla a las unidades, quedando 4 decenas ($5 - 4$) y 12 unidades ($10 + 2$). Ahora ya podemos restar las unidades $12 - 8 = 4$. Una vez tenemos las unidades pasamos a las decenas. Debemos recordar que tenemos 4 decenas en lugar de 5. Ahora en las decenas a 4 no le podemos quitar 7, entonces desagrupamos una centena, y la pasamos a las decenas, quedando 3 centenas ($4 - 1$) y 14 decenas ($10 + 4$). Ahora podemos restar $14 - 7 = 7$. Por último, quedamos $3 - 2 = 1$.

$$\begin{array}{r} 4 \ 5 \ 2 \\ - 2 \ 7 \ 8 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 4 \ 12 \\ 4 \ 5 \ 2 \\ - 2 \ 7 \ 8 \\ \hline 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3 \ 14 \ 12 \\ 4 \ 5 \ 2 \\ - 2 \ 7 \ 8 \\ \hline 1 \ 7 \ 4 \end{array}$$

Figura 2. Ejemplo de resolución de un algoritmo de sustracción por el Método B

Por lo tanto, la descomposición del minuendo que justifica el algoritmo sería: $3C + 14D + 12$; Y la descomposición del sustraendo que justifica el algoritmo sería: $2C + 7D + 8U$.

1.3. Tipos de errores

Un error es una ligera modificación o perturbación de un procedimiento correcto. Los errores también son llamados reparaciones. Las reparaciones (*impasse*¹) son los caminos erróneos que optan los alumnos cuando no pueden hacer frente a las dificultades encontradas. Por ejemplo, cuando a un estudiante se le pide resolver una resta en la que tiene que tomar prestado de cero, el estudiante empieza a procesar la columna de unidades, tratando de pedir prestado a la columna de decenas, e inmediatamente llega a un callejón sin salida porque el cero no se puede disminuir. El estudiante es atrapado y él mismo pasa a una reparación errónea para poder resolver la resta.

Cuando un alumno se encuentra con una tarea que no termina de comprender, lo que hace es utilizar un procedimiento familiar para él, como puede ser el de restar el número más grande al más pequeño, independientemente si está en el minuendo o en el sustraendo (*Smaller-From-Larger*). La decisión de restar el más pequeño del más grande se puede ver reforzada por las máximas que se escuchan a menudo en las clases en las que se introduce por primera vez la sustracción "Restar siempre el más pequeño al más grande". También podemos observar, que los errores de los alumnos no son errores aleatorios, sino errores sistemáticos producto de una estrategia metódica pero incorrecta. En cualquier caso, las estrategias que presentan algún error sistemático se basan en el aprendizaje anterior del alumno.

En este trabajo, se recopilarán todas las restas erróneas y se clasificarán según el tipo de error. Según VanLehn en "Repair theory" (1983, p.205) los errores se pueden clasificar en cuatro grandes tipos:

- *Smaller-From-Larger*²
- *Zero-Instead-of-Borrow*
- *Smaller-From-Larger-Instead-of-Borrow-From-Zero*
- *Zero-Instead-of-Borrow-From-Zero*.

Además de los errores anteriores, existen más tipos, ya que los alumnos realizan más de cuatro tipos de errores. Por ello, VanLehn en "Mind bugs: The Origins of Procedural misconceptions" (1990, p. 223) muestra más tipos de errores para poder clasificar todas las restas.

Errores por tomar prestado

- *Borrow-no-decrement* (Pedir prestado pero no disminuir la llevada)
- *Borrow-no-decrement-except-last* (Pedir prestado pero no disminuir la llevada excepto la última)
- *Borrow-from-one-is-ten* (Al pedir prestado cambiar el 1 por 10)
- *Borrow-from-one-is-nine* (Al pedir prestado cambiar el 1 por 9)
- *Borrow-only-once* (Solo pedir prestado una vez)
- *Borrow-don't-decrement-unless-bottom-smaller* (Pedir prestado pero no disminuir al menos que el inferior sea menor)
- *Always-borrow* (Siempre pedir prestado incluso cuando no haga falta)
- *Always-borrow-left* (Siempre pedir prestado en la izquierda)
- *1-1=0-after-borrow* ($1-1=0$ después de pedir prestado)
- *1-1=1-after-borrow* ($1-1=1$ después de pedir prestado)

¹ VanLehn (1983, 1990) describe un *impasse* como una situación que surge ante una tarea que el aprendiz no sabe ejecutar, lo que provoca que busque el camino que le parece más adecuado para la solución, aunque no sea el correcto. Este camino generaría un error o bug.

² Los diferentes errores aparecen con su nombre original en inglés. Hay un consenso general en la utilización de la nomenclatura anglosajona para la descripción de los errores o bugs. Entre paréntesis aparece explicado en castellano.

- Forget-borrow-over-blank (Olvidar pedir prestado cuando el inferior está en blanco)
- Ignore-leftmost-one-over-blank (Ignorar el extremo izquierdo cuando el inferior está en blanco)
- Blank-instead-of-borrow (Dejar en blanco en lugar de pedir prestado)
- Doesn't-borrow-except-last (No pedir prestado excepto en la última)
- N-N-causes-borrow (N-N las causas de pedir prestado)

Errores por sumar en lugar de restar

- Add-instead-of-sub (Sumar en lugar de restar)

Errores por préstamos con cero

- Don't-decrement-zero-over-zero (No disminuir el cero sobre el cero)
- Don't-Decrement-Zero (No disminuir el cero)
- Diff-0-N=N (Diferencia de $0-N=N$)
- Diff-0-N=0 (Diferencia de $0-N=0$)
- Diff-N-N=N (Diferencia de $N-N=N$)
- Diff-N-0=0 (Diferencia de $N-0=0$)
- Borrow-from-zero-is-ten (Al pedir prestado cambiar el 0 por 10)
- Borrow-from-zero (Pedir prestado de cero)
- Borrow-across-zero (Pedir prestado mediante el cero)
- Borrow-Across-Second-Zero (Pedir prestado mediante el Segundo cero)
- Borrow-treat-one-as-zero (Intentar pedir prestado hacienda del 1 como un cero)
- Stops-borrow-at-zero (Parar de pedir prestado en llegar a algún cero)
- Stops-Borrow-at-Multiple-Zero (Parar de pedir prestado cuando hay múltiples ceros)

Errores por restar el menor al mayor

- Smaller-From-Larger (Restar el menor al mayor)
- Smaller-From-Larger-Instead-of-Borrow-From-Zero (Restar el menor al mayor en lugar de pedir prestado a cero)
- Smaller-From-Larger-Except-Last (Restar el menor al mayor excepto el último)

Errores por poner un 0 en lugar de hacer préstamo

- Zero-Instead-of-Borrow (Poner como solución 0, en lugar de pedir prestado)
- Zero-Instead-of-Borrow-From-Zero (Poner como solución 0, en lugar de pedir prestado a cero)

Errores por no poder hacer frente a la resta

- Stutter-subtract (Dudar al restar)
- Can't-subtract (No poder restar)
- Only-do-units (Solo hacer las unidades)
- Quit-when-bottom-blank (Parar de restar cuando la parte inferior (sustraendo) está en blanco)

Errores de cálculo

Errores no diagnosticables

2. Método

2.1. Participantes

La muestra está compuesta por las clases de segundo y tercero de primaria de cada centro, lo que hace un total de 201 alumnos (46% chicos y 54% chicas) y 10 maestros.

Tabla 1. Número de chicos y chicas por curso

Colegio	Chicos	Chicas	Total
2n Azorín	12	8	20
3r Azorín	14	7	21
2n San Juan Bosco	12	13	25
3r San Juan Bosco	9	12	21
2n La Foia	8	10	18
3r La Foia	9	13	22
2n Veles e Vents	6	14	20
3r Veles e Vents	5	5	10
2n Juan Ramón Jiménez	8	17	25
3r Juan Ramón Jiménez	9	10	19
<i>Total</i>	92	109	201

La población está compuesta por cinco colegios públicos de Educación Primaria que han participado desinteresadamente en la investigación. Dos centros están situados en San Vicente (Juan Ramón Jiménez y Azorín), otro en Alfàs del Pi (Veles e Vents), el otro en Petrer (La Foia) y el último en Cocentaina (San Juan Bosco).

2.2. Instrumento

Para diseñar el instrumento, la investigación se ha inspirado en la prueba de las 20 restas de VanLehn (1990: 170). A diferencia de VanLehn, se ha creado un instrumento con 16 restas, porque me parecía excesivo pasar a los centros ahora a final de curso un ejercicio con 20 restas. Aun así, 16 son muchas restas también. En este ejercicio, los alumnos resolvían las 16 restas en el aula sin límite de tiempo y sin ayuda del maestro.

La prueba de las 20 restas de VanLehn constituye para el autor uno de los instrumentos básicos de identificación de una gran variedad de errores. La fiabilidad y validez de la misma, viene avalada por la investigación realizada por el autor, el cual fundamentó su teoría "Repair Theory" sobre la adquisición de errores procesales en el algoritmo de la resta. Esta prueba sirvió como instrumento de obtención de datos y permitió categorizar los errores que se producían con mayor frecuencia.

En este estudio se han realizado tres encuestas: una para segundo de primaria, una para tercero de primaria y otra para los maestros. Las razones son las siguientes:

El motivo por el cual se han elegido estos dos niveles, es porque en segundo de primaria es cuando empiezan a trabajar el algoritmo, y en tercero ya tienen los conocimientos más adquiridos, y por lo tanto podemos ver como desarrollan algoritmos más complicados. Por ello, la idea es observar cómo desarrollan el algoritmo en su inicio (segundo de primaria) y como hacen frente a dificultades mayores (tercero de primaria).

El criterio para la selección de las restas es el siguiente: para el segundo curso restas de dos cifras y para el tercer curso restas de tres y cuatro cifras. Para segundo restas de dos cifras, ya que el instrumento se pasará en mayo y los estudiantes ya se supone que llevan todo el curso practicando y ya habrán llegado a las dos cifras. Para tercero, de tres y cuatro cifras porque están también a final de curso y según el Decreto 108/2014 deben saber resolverlas ("Calcular sumas, restas y productos, y dividir un número de hasta seis cifras por otro número de dos cifras, comprobando aritméticamente la corrección del resultado obtenido"). Algunas de las restas son de dificultad mayor, para ver qué tipo de errores realizan.

Las restas del instrumento no han sido colocadas aleatoriamente, sino por unas causas. En primer lugar he puesto 16 restas tanto en segundo como en tercero para tener un gran número de restas para la muestra y así poder extraer porcentajes y estadísticas más completas. En la Figura 3, se puede ver como en segundo de primaria, hay cuatro líneas de 4 restas cada una: en la primera línea las restas sin préstamos, y las otras tres líneas son con préstamos, ya que las operaciones sin préstamos deben preceder a las operaciones con préstamos (Maza Gómez, 1999). Si el instrumento hubiera sido pasado en octubre, y no en mayo, por ejemplo, el nivel de las restas sería diferente.

TREBALL FI DE GRAU (ALGORITME DE LA SUSTRACCIÓ)
 GRAU EN NIVESTRE D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA
 JORGE SEGURA BENEYTO

Curs: _____
 Edat: _____
 Gènere: Xic Xica

RESTES

$\begin{array}{r} 25 \\ - 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 34 \\ - 13 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 84 \\ - 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 37 \\ - 4 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 16 \\ - 9 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 11 \\ - 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 20 \\ - 7 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 21 \\ - 8 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 27 \\ - 8 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ - 17 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 40 \\ - 13 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 52 \\ - 8 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 18 \\ - 9 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 44 \\ - 19 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ - 18 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \\ - 17 \\ \hline \end{array}$

Figura 3. Instrumento en segundo de primaria.

TREBALL FI DE GRAU (ALGORITME DE LA SUSTRACCIÓ)
 GRAU EN NIVESTRE D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA
 JORGE SEGURA BENEYTO

Curs: _____
 Edat: _____
 Gènere: Xic Xica

RESTES

$\begin{array}{r} 261 \\ - 47 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 667 \\ - 45 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 742 \\ - 136 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 345 \\ - 102 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 326 \\ - 138 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 736 \\ - 598 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 433 \\ - 175 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 831 \\ - 456 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 102 \\ - 39 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 306 \\ - 138 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 702 \\ - 108 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 207 \\ - 169 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 6591 \\ - 2697 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 4015 \\ - 607 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2006 \\ - 42 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 9057 \\ - 1382 \\ \hline \end{array}$

Figura 4. Instrumento en tercero de primaria

En la Figura 4 se puede ver como en tercero de primaria hay las mismas restas: en la primera línea hay una mezcla de restas con préstamos (2 restas) y restas sin préstamos (2 restas) en las unidades, en la segunda línea hay préstamos en las unidades y en las decenas, en la tercera línea hay préstamos en las unidades y en las decenas, pero con cero en las decenas. Y en la cuarta línea son restas de cuatro cifras con préstamos en las unidades, decenas y centenas.

El instrumento se ha creado con diferentes dificultades de préstamos, con el fin de observar cómo realizan la descomposición de números, y si tienen alcanzado el sistema de numeración decimal.

Por último, también se ha realizado una encuesta breve para los maestros, para observar qué método utilizan, y saber sus opiniones y argumentos. La encuesta consta de dos preguntas:

- ¿Qué método del algoritmo de la sustracción (Llevadas / Tomar Prestado) utiliza en su clase de matemáticas? ¿Por qué?
- ¿Cree que le funciona con los alumnos? ¿Por qué?

2.3. Análisis cuantitativo

Para el análisis cuantitativo de las bases de datos obtenidas mediante las encuestas, se optará por tomar como referencia las categorías que creó, entre otros, VanLehn (1990 y 1983), y para definir la tipología de errores utilizados, se tomará como referencia el glosario de VanLehn (1990: 223). Se analizarán un total de 3188 restas siguiendo los objetivos propuestos.

La primera categoría de análisis fue ver qué método utilizaba cada clase. Entonces observé el cuestionario de los maestros para ver qué método utilizaban. La segunda fue contabilizar los aciertos y los errores. En la tercera, una vez ya se conocía qué restas eran erróneas, pasé a clasificar los errores, para ver la causa. Lo que hacía era observar cómo había hecho la resta e intentar ver, encontrar o deducir el error e identificarlo con algún tipo de error.

3. Resultados

Este apartado se dividirá en 4 subapartados, ordenados en consonancia con los objetivos.

3.1. ¿Qué método se utiliza más? Prueba 1 (objetivo 1)

El primer objetivo es observar qué método es el más utilizado en las aulas analizadas. Pues bien, es superior el método B, ya que es utilizado en la clase de tercero de primaria del centro Veles e Vents, en la clase de segundo y tercero de primaria del centro Azorín, en la clase de segundo de primaria del centro La Foia, y en segundo y tercero de primaria del centro San Juan Bosco. En cambio, el método A es utilizado en segundo y tercero de primaria del centro Juan Ramón Jiménez, en la clase de segundo de primaria del centro Veles e Vents, y en la clase de tercero de primaria del centro La Foia. En total 6 de 10 centros que han sido analizados, prefieren el método B, y los otros 4 el método A.

3.2. ¿Qué método presenta mejores resultados? Prueba 2 (objetivo 2)

El segundo objetivo es analizar qué método para restar presenta mejores resultados en las aulas de Educación Primaria. Por ello, se ha observado la cantidad de errores y de aciertos en los dos métodos y este ha sido el resultado: En la tabla 2 podemos ver el número de restas acertadas de cada método y su correspondiente porcentaje. El porcentaje más superior pertenece al método B con 86% de aciertos. Además, en la tabla 3 podemos observar que los alumnos que han completado las 16 restas correctamente pertenecen al tercer curso del centro Azorín (57%), el segundo curso del centro San Juan Bosco (76%), y también el tercer curso del centro San Juan Bosco con (43%) los cuales utilizan el método B. En la Figura 5 podemos ver como el método B con 86% de acierto en las restas es superior al método A con 80% de aciertos.

Tabla 2. Aciertos

Métodos	Aciertos	Total restas	Porcentaje
Método A	1078	1348	80%
Método B	1590	1840	86%
Total	2668	3188	84%

Tabla 3. Alumnos por centro y curso que han completado correctamente las 16 restas

Centro	Alumnos	16 restas correctas	% sobre el total de la muestra
2n Azorín	20	2	10%
3er Azorín	21	12	57%
2n San Juan Bosco	25	19	76%
3er San Juan Bosco	21	9	43%
2n La Foia	18	6	33%
3er La Foia	22	3	13%
2n Juan Ramón Jiménez	25	8	32%
3er Juan Ramón Jiménez	19	0	0%
2n Veles e Vents	20	4	20%
3er Veles e Vents	10	3	30%
TOTAL	201	66	31%

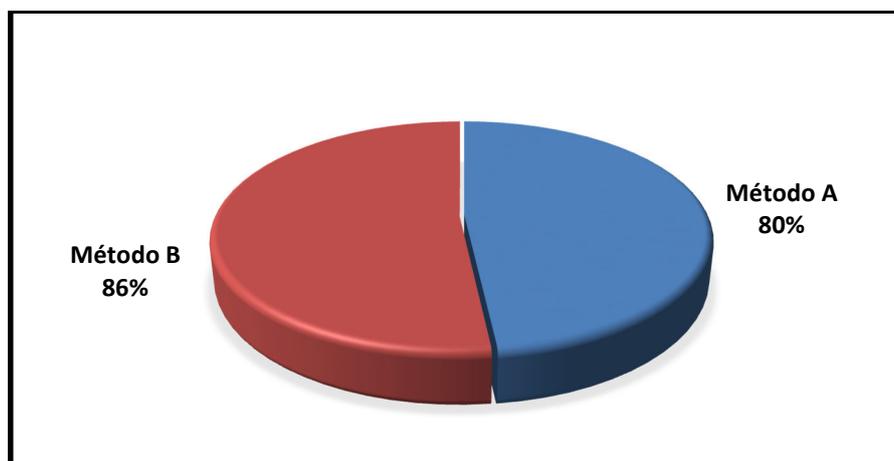


Figura 5. Aciertos

Después, se ha observado qué método es más susceptible de causar errores. Digo esto, porque algunas de las maestras cuentan que utilizan un método en concreto para que los alumnos lo entiendan más rápidamente y realicen menos errores. Pues bien, ahora en la tabla 4 veremos los errores que han realizado en cada método los alumnos.

Tabla 4. Errores

Métodos	Errores	Total restas	Porcentaje
Método A	270	1348	20%
Método B	250	1840	14%
Total	520	3188	16%

El método A realiza 270 errores de un total de 1348 restas, en cambio el método B realiza 250 errores de un total de 1840 restas. De momento, hemos podido observar, que los alumnos que realizan las restas con el método B realizan más aciertos, menos errores, y son más capaces de completar las 16 restas correctamente. En general, también podemos observar en la tabla 2 y 4 el total de aciertos (84%) y de errores (16%) de toda la investigación.

3.3. Errores y tipología. Prueba 3 (objetivo 3)

Del total de 3188 restas analizadas, el porcentaje de restas con errores es del 16%, es decir 520 restas erróneas. En este apartado se verá qué restas han sido más complicadas y cuáles menos, y se hará una clasificación con los tipos de errores que han tenido. En la Figura 6, se observan los aciertos y los errores por resta en segundo de primaria. Se puede ver que la resta que más errores ha causado es la de 16-9 con 17 errores. En cambio, la resta que menos errores y más aciertos ha tenido es la de 34-13.

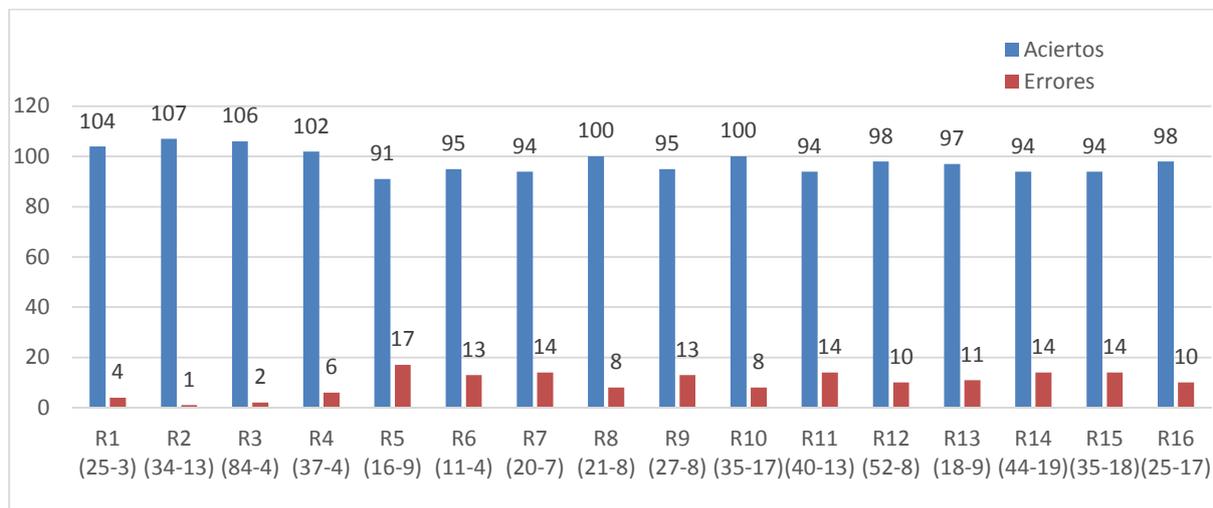


Figura 6. Errores y aciertos por resta en segundo de primaria

En la Figura 7, se observan los aciertos y los errores por resta en tercero de primaria. En este análisis se ha observado que la resta más complicada para los alumnos es 2006-42 con 35 errores. La mayoría de estos errores han sido por tener problemas en hacer préstamos de cero. Además, las líneas muestran como la dificultad influye en los aciertos y en los errores, ya que a mayor dificultad en las restas menos aciertos y más errores.

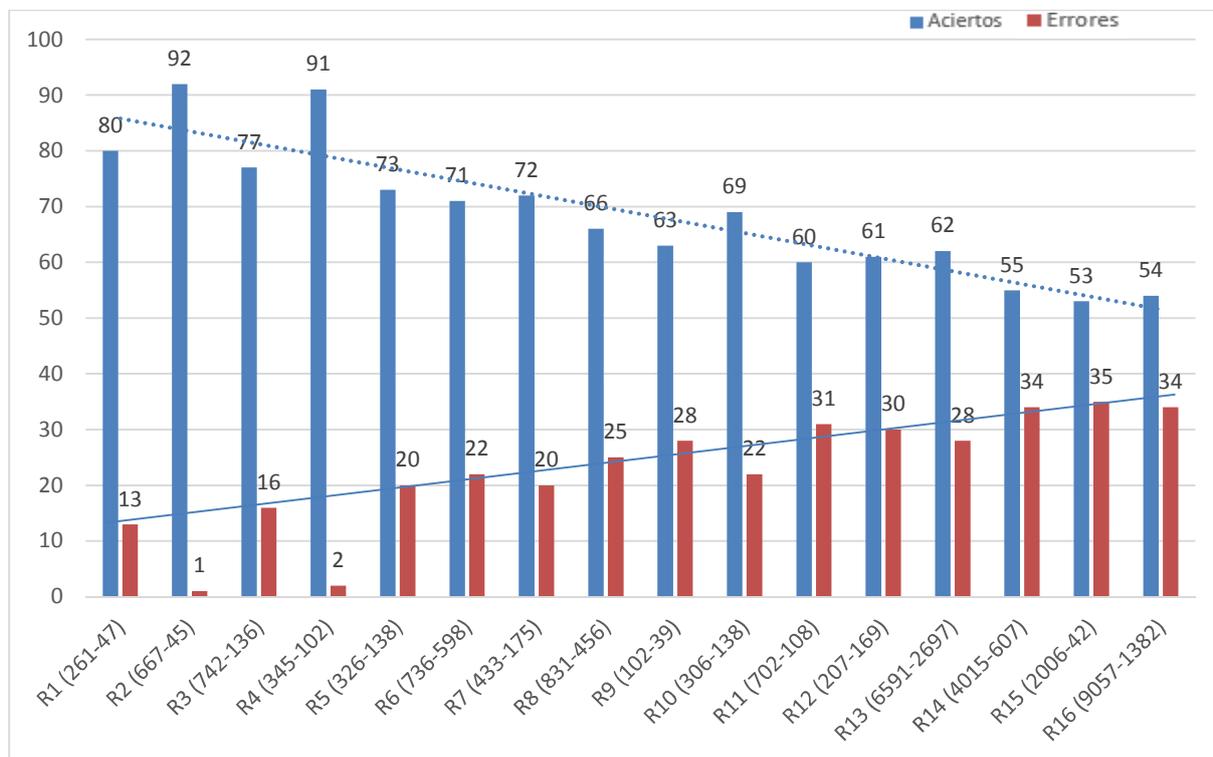


Figura 7. Errores y aciertos por resta en tercero de primaria

Para categorizar los errores cometidos por los discentes, tomamos como referente el glosario de errores (bugs³) definidos por VanLehn (1990, p.223) (1983, p.205). Asignamos a cada resta un tipo de error y, además, añadimos al catálogo dos categorías más: error de cómputo y error no diagnosticable⁴.

De los errores mencionados, algunos de ellos persisten a lo largo de los cursos (en este caso segundo y tercero de primaria). Estos errores se denominan sistemáticos⁵ ("bugs algorithmics"). En la Figura 4, se observa la clasificación de los errores y su frecuencia. El análisis se efectúa sobre el total de las restas erróneas, es decir, 520. Hay que recordar que la especificación de las características de estos errores se encuentra en VanLehn (1990, p. 223) (1983, p. 205).

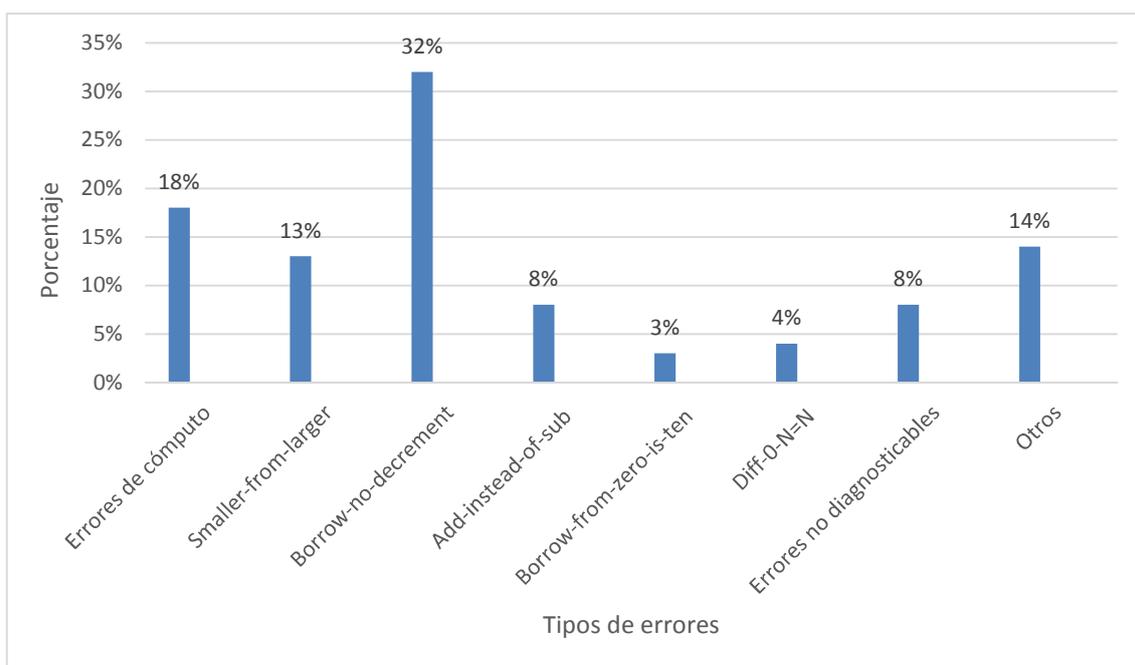


Figura 8. Clasificación de errores

En la Figura 8 se ve la clasificación de los errores más comunes en segundo y tercero de primaria. Como se observa, el error más común con 32% ha sido "Borrow-no-decrement". Este error significa que los alumnos han pedido prestado pero no han disminuido la llevada. Ejemplo: En esta resta, este alumno de tercero pidió prestado a las decenas y realizó la resta $16 - 8 = 8$ correctamente, pero luego no disminuyó el 2 de las decenas ni el tres en las centenas (Figura 9a).

El segundo error más común con 18% han sido los errores de cómputo, los cuales se caracterizan por errar en el cálculo. Por ejemplo: En la resta de la Figura 9b, el alumno de segundo con el método A, ha hecho el procedimiento correcto, pero no ha restado bien $17 - 8$, pues $17 - 8 = 9$.

Figura 9. Ejemplos de errores típicos I

³ Bugs: Error en Inglés.

⁴ Error no diagnosticable: No sigue un patrón lógico.

⁵ Errores sistemáticos: Errores que se producen en las restas a lo largo de los cursos y no desaparecen.

El tercer error ha sido el grupo llamado "Otros" con 14% en el que hay 14 errores. Un ejemplo de este error es "Zero-instead-of-borrow". En este error los alumnos cuando no pueden restar el minuendo al sustraendo, en lugar de pedir prestado ponen un 0 (Figura 10a)

Otro error con 13% es "small-from-larger". Este se caracteriza por restar el menor al mayor independientemente si está en el minuendo o en el sustraendo. Ejemplo: Este alumno de segundo, no ha sabido hacer frente a la resta 5-7, entonces ha buscado un procedimiento familiar para él, en este caso restar el mayor al menor. Luego en las decenas ya lo ha hecho bien (Figura 10b).

Seguidamente, con 8% de errores se encuentran los errores no diagnosticables y "Add-instead-of-sub". Los errores no diagnosticables, son aquellos que no se les ha podido establecer un diagnóstico claro y por lo tanto no se han podido etiquetar con un tipo concreto de error. Ejemplo: Este alumno de segundo, transforma el 1 de las decenas en 10 unidades, y le pasa una decena a las unidades. De esta forma $10 - 1 = 9$ decenas. Seguidamente, suma la decena más seis unidades quedando 16. De esta forma, ya puede restar $16 - 9$ (Figura 10c).

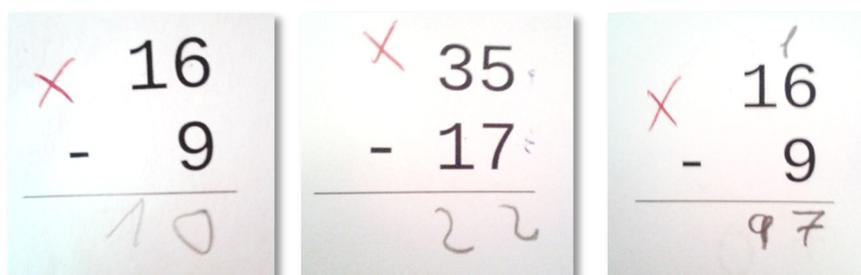


Figura 10. Ejemplos de errores típicos II

En cambio, los errores "Add-instead-of-sub" se caracterizan por llevar a cabo en algún lugar de la resta la adición en lugar de la sustracción. Por ejemplo: Este alumno de segundo, utiliza el método A y, como podemos ver, realiza la operación de las unidades correctamente, pero luego en las decenas suma $2 + 1$, en lugar de restar $2 - 1$ (Figura 11a).

Otro error, con 3%, "Borrow-from-cero-is-ten", el cual se caracteriza por transformar el 0 en 10 al pedir prestado. Por ejemplo, este alumno de tercero, ha desagrupado la centena, y ha realizado la resta de unidades correctamente ($12 - 9 = 3$), quedando 0 en las centenas (Figura 11b). A continuación, al desagrupar la centena el 0 se ha transformado en 10, pero como le hemos pasado una decena a las unidades se han quedado en 9 las decenas. Este paso es el que no ha realizado el alumno, ya que él ha transformado el 0 en 10 ($10 - 3 = 7$) en lugar de $9 - 3 = 6$.

Por último, tenemos con 4% de errores es "Diff-0-N = 0". Este se caracteriza por restar cero a un número y poner ese número como solución ($0 - N = N$). Por ejemplo, este alumno ha hecho $0 - 7 = 7$ (Figura 11c).

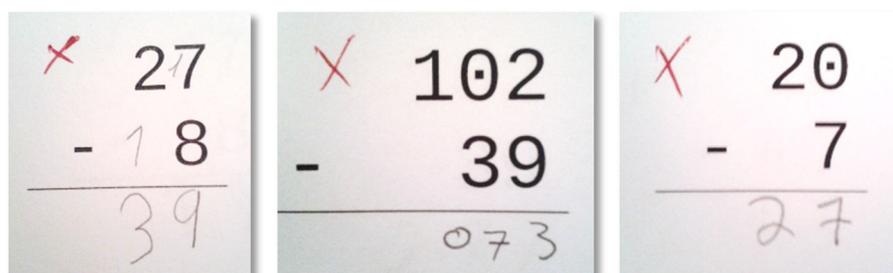


Figura 11. Ejemplos de errores típicos III

3.4. ¿Qué opinan los maestros?

Tal y como se explicó al principio del trabajo, también se hizo una encuesta para los maestros con dos preguntas. Pues bien, aquí se encuentra un resumen.

De todos los maestros, 6 prefieren el método B, y 4 el método A. Los docentes que prefieren el método B opinan que los discentes lo entienden y comprenden mejor, que el aprendizaje es constructivista y más significativo, que completa la construcción del sistema de numeración decimal, que facilita la retención a largo plazo, que conduce a enlazar unos conocimientos con otros como es la descomposición de los números, que es más sencillo a la hora de comprender, y que es lógico. En cambio, los que prefieren el método A, opinan que es más rápido de aprender, que los padres pueden ayudar a sus hijos, que es más práctico y sencillo, que lo entienden y, por lo tanto, lo aplican de forma rápida.

Otro maestro con 30 años en la docencia explica que usa el método B, y además utiliza material (botes, botones) para que el alumnado manipule y aproveche el potencial de estas representaciones. De este modo descubren y reconstruyen los diferentes pasos del algoritmo de manera significativa. Finalmente, lo representan en lenguaje simbólico y el resultado es satisfactorio.

Otro maestro, explica que usa el método B, porque está en la línea de un aprendizaje más significativo, pero añade que al final acaban automatizándolo al igual que en el otro método. También, escribe que hay padres que prefieren el método A, pero él no hace de esto un motivo de discusión, ya que al fin, el algoritmo es sólo un truco para un cálculo.

Hay otra maestra, que utiliza un método u otro dependiendo del alumnado. Por ejemplo, en su clase usa el método A, pero con los alumnos con NEE utiliza el método B.

Otra, usa el método A porque los padres y madres no pueden ayudar a sus hijos con el método B, y porque el método B al principio no dio buenos resultados. Ella, explicó los dos métodos, y lo que hizo fue darles a elegir a los alumnos el método que quisieran. Todos eligieron el método A, menos uno que eligió el otro.

4. Discusión y conclusiones

En este trabajo he querido estudiar los dos grandes métodos del algoritmo de la sustracción, pero también ver qué tipos de errores realizan los alumnos.

En la primera parte de este punto, tendrá lugar la discusión de los resultados, y en la segunda parte la conclusión del trabajo.

Los primeros resultados de la investigación, han sido que el método B es más utilizado. El segundo y tercer resultado obtenido ha sido que, en este mismo método los alumnos realizan más aciertos y a la vez menos errores.

En segundo curso por ejemplo (Figura 3), las cuatro primeras restas, eran sin préstamos, y en efecto han sido las que menos errores han causado. Cuando diseñé el instrumento, en segundo quería ver que ya dominaban las restas sin préstamos y que empezaban a dominar las restas de dos cifras con préstamos. Y así ha sido.

En cambio, en tercero había más motivos. Las cuatro primeras restas eran las más "fáciles" porque llevaban préstamos sólo en las unidades, excepto dos más fáciles sin préstamo. Si nos fijamos las cuatro primeras restas también son las que menos errores y más aciertos tienen. En la segunda fila, las restas tenían préstamos en las unidades y en las decenas. En la tercera fila, las restas eran con préstamos en cero. Y en la cuarta fila, las restas eran de cuatro cifras, con ceros, y con préstamos. En resumen, el nivel de dificultad de las restas de tercero iba en aumento, por lo tanto los errores debían ir aumentando y los aciertos debían ir disminuyendo.

En segundo coloqué restas con préstamos para ver qué errores realizaban. En tercero como ya están más familiarizados, puse excepto en la primera línea, restas complicadas para ver, al igual que en segundo, qué errores hacían y así tener suficiente muestra de errores para hacer la investigación. Los diferentes grados de dificultad en el aprendizaje del algoritmo están relacionados con el uso de las relaciones entre las unidades de diferente orden. El objetivo de estudiar los errores, ha sido porque la mayor parte de los maestros miden los logros de los estudiantes observando el resultado de las restas, y no como desarrollan y comprenden el algoritmo. Por ejemplo, si no hubiera hecho esta investigación y fuese un maestro cualquiera corrigiendo unas restas, hubiera observado y evaluado los aciertos y los errores. En cambio, al estudiar los errores he podido ver todas las carencias y dificultades que tienen los alumnos en el algoritmo.

Cabe destacar que la resta más complicada (por la cantidad de errores) en tercero es $2006 - 42$, un resta que sólo pueden llegar a hacer bien cuando ya dominan completamente las restas de dos y tres cifras con préstamos.

Después de clasificar los errores, hemos podido observar que los errores más comunes son los de cálculo, tomar prestado de cero, no contabilizar la llevada, restar el sustraendo al minuendo independientemente si es mayor o menor ... También he observado que la mayoría de niños hacen los dos métodos de manera mecánica y no piensan en el resultado que escriben. Al no pensar en el resultado encontramos restas como: $16 - 9 = 97$.

Los alumnos pueden aprender, y es frecuente que lo hagan, las reglas para realizar cálculos y préstamos con números de varias cifras sin haber comprendido los razonamientos subyacentes, por ello, esa mala comprensión de las reglas lleva a diferentes dificultades (Baroody, 1994)

- Uso mecánico de procedimientos aprendidos de memoria
- Dificultad a la hora de colocar las cifras
- Los errores sistemáticos suelen darse a consecuencia de procedimientos incorrectos, parcialmente correctos o inventados
- La inconstancia incluye el uso de un procedimiento correcto en unas ocasiones pero no en otras
- Incapacidad de aprender procedimientos carentes de significado
- Memorización incompleta o incorrecta

Después de observar las 3188 restas, vemos que muchos alumnos que no han logrado completar correctamente las 16 restas (Tabla 3), las han realizado todas correctamente menos una, dos o tres. Y os podéis preguntar ¿Porque dos restas que son iguales, una la hacen bien y la otra no? Pues bien, esto ocurre porque a veces un alumno puede emplear un procedimiento correcto y un error sistemático de forma intermitente. Esta incoherencia puede ser porque el alumno no comprende la resta y entonces utiliza procedimientos correctos (de una manera mecánica) e incorrectos alternativamente. También puede ser que reconozca el procedimiento correcto, pero debido a factores afectivos puede adoptar un método de solución incorrecto pero sistemático. Es decir, en algunas situaciones puede estar motivado para utilizar el procedimiento correcto, pero en otras no (Baroody, 1994).

A todo esto hay que añadir las opiniones de los maestros, las cuales son superiores las que se decantan por el método B, a pesar de que los dos métodos tienen inconvenientes y ventajas.

En cuanto a la conclusión del trabajo, puedo indicar que a la luz de los resultados obtenidos debo formular las siguientes consideraciones.

Como dije en la introducción, en este trabajo he analizado los dos grandes métodos de la resta y los errores más comunes. Primeramente empezaremos con los errores, y después hablaré de los métodos de la resta, de la resta en particular, de la relación de este trabajo con la etapa universitaria y del trabajo de fin de grado en general.

En primer lugar, una vez he analizado y discutido los resultados, llego a la conclusión de que los alumnos realizan en general tres grandes tipos de error: realizan errores de cómputo (18%), errores de restar el sustraendo al minuendo independientemente si es mayor o menor (Smaller-From-Larger) (13%), y olvidarse de algún préstamo (Borrow-No-Decremento) (32%). Estos errores son los que más se producen, tanto en segundo como en tercero. Entonces, podemos determinar que estos errores son sistemáticos, ya que continúan apareciendo a lo largo de los cursos. Además, que la dificultad de las restas es directamente proporcional con la cantidad de errores y, en cambio, la dificultad de las restas es inversamente proporcional con la cantidad de aciertos. Esto nos indica que los aciertos y los errores, están dentro de un parámetro lógico. Lo que sería preocupante e inexplicable, es si los alumnos hicieran más errores en restas sin préstamos, que en restas con préstamos en cero por ejemplo.

En relación a la frecuencia de error, podemos encontrar un resultado similar en la investigación llevada a cabo por Young y O'Shea (1981). En su investigación encontramos un porcentaje del 22% de restas con errores. Nosotros hemos encontrado un porcentaje de un 16%, inferior en 6%, pero debemos tener en cuenta que en su investigación la muestra de restas es superior.

En segundo lugar, en lo que respecta a los dos grandes métodos, en el estudio he observado que el método de tomar prestado es más utilizado, causa más aciertos y menos errores, y los maestros lo prefieren por su facilidad de aprendizaje y comprensión. Por lo que respecta a los maestros, pienso que no deben priorizar reglas y procedimientos, sino una enseñanza comprensiva que se dirija a desarrollar y fortalecer el sentido numérico. Por eso creo que los resultados constituyen la proyección de una enseñanza memorística. Desde mi punto de vista, los maestros también deberían construir los procedimientos aritméticos en base a la comprensión conceptual de principios aritméticos, afirmación que comparto con Ohlsson y Ress (1991, p.103), que defienden que la comprensión conceptual incide directamente en el procedimiento de ejecución, permitiendo al alumno revisar sus acciones sobre el algoritmo y detectar posibles errores.

Las razones para enseñar los algoritmos deberían cambiar, de obtener respuestas correctas mediante la manipulación rutinaria de los símbolos, a la comprensión del significado de la operación y las razones que hay detrás de cada paso en el algoritmo.

Por lo tanto, llego a la conclusión de que el método de tomar prestado es más coherente con el aprendizaje del sistema decimal de numeración. Cuando empecé este estudio, pretendía llegar a la misma conclusión que Carlos Maza en su libro "Enseñanza de la suma y de la resta" (1999). Según Maza, el método de tomar prestado, es igual de válido que el otro, pero es más coherente, por su facilidad de aprendizaje y comprensión. También, porque en consonancia con el aprendizaje del sistema decimal de numeración el algoritmo más coherente, es el de tomar prestado, y porque éste, es en mayor medida la base conceptual bajo la cual hay que entender la realización de este algoritmo.

Y es que el conocimiento sobre el sistema de numeración resulta fundamental para entender el procedimiento de las llevadas y de tomar prestado, ya que numerosos errores que realizan los estudiantes a la hora de aplicar el algoritmo se basan en un deficiente dominio de esta parcela del conocimiento numérico.

En tercer lugar, me gustaría destacar algunas consideraciones específicas sobre el algoritmo de la resta. Pienso que existe una necesidad de una enseñanza significativa de conceptos básicos, que prioricen el desarrollo del sentido numérico, frente a un aprendizaje memorístico y mecánico de procedimientos en la que naturaleza no es comprendida. Creo que el objetivo de la sustracción, como el de la adición, debería consistir en incitar al alumno a pensar y a recordar los resultados de su propio pensamiento. No debería consistir en enseñar a los alumnos técnicas específicas para la producción de respuestas escritas.

Finalmente, desde una perspectiva pedagógica, la investigación realizada tenía como objetivo, hacer un análisis sobre los dos grandes métodos del algoritmo de la sustracción, en un contexto escolar determinado para llegar a una conclusión sobre qué método sería mejor utilizar; y qué tipo de errores hacen los niños.

Referencias

- Baroody, A.J. (1994). *El pensamiento matemático de los niños: Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Madrid: Visor.
- DECRET 111/2007, de 20 de juliol, del Consell, pel qual s'estableix el currículum de l'Educació Primària a la Comunitat Valenciana. [2007/9730]
- Kamii, C. (1985). *El niño reinventa la aritmética: implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.
- Kamii, C. (1992). *Reinventando la aritmética II*. Madrid: Visor.
- Maza, C. (1999). *Enseñanza de la suma y de la resta*. Madrid: Síntesis.
- Ohlsson, S. & Rees, E. (1991). The function of conceptual understanding in the learning of arithmetic procedures. *Cognition and Instruction*, 8(2), 103-179.
- VanLehn, K. (1983). On the representation of procedures in repair theory. En H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 197-252). Nueva York: Academic Press.
- VanLehn, K. (1990). *Mind bugs: Origins of Procedural Misconceptions*. Cambridge, Mass: MIT Press.
- Young, R.M. y O'shea, T. (1981). Errors in children's subtraction. *Cognitive Science*, 5(2), 153-177.

Jorge Segura Beneyto. Graduado en Maestro de Educación Primaria en la Universidad de Alicante.

Email: segura_1992_10@hotmail.com