Uso de puntos de referencia y de representaciones gráficas para resolver tareas numéricas en secundaria

Rut Almeida y Alicia Bruno

En este trabajo se reflexiona sobre dos componentes del sentido numérico: el uso de puntos de referencia y de representaciones gráficas para estimar cantidades y operaciones (con números naturales, decimales y fracciones). Se presentan los resultados de una prueba escrita contestada por 47 estudiantes de educación secundaria. Los resultados indican dificultades de los estudiantes para hacer uso de puntos de referencia numéricos y para construir sus propias representaciones gráficas, prefiriendo métodos basados en reglas. Mejores resultados se obtuvieron en la estimación numérica a partir de gráficas ya dadas. Los resultados más bajos se corresponden con tareas en las que están implicadas las fracciones.

Términos clave: Educación secundaria; Estrategias; Puntos de referencia; Representaciones gráficas; Sentido numérico

Use of Benchmarks and Graphical Representations to Solve Numerical Tasks in Secondary Education

In this paper we reflect on two components of number sense: The use of benchmarks and the use of graphical representation to estimate amount or the result of a calculation (with whole numbers, decimals and fractions). The results of a written test answered by 47 high school students are presented, in whose analysis the success and the strategies were examined. Results indicate difficulties for students when making use of numerical benchmarks and for building their own graphical representations, preferring rule based methods. Better results were obtained in numerical estimate from graphs already given. The lowest test results correspond to tasks in which fractions are involved.

Keywords: Benchmarks; Graphical representations; Number sense; Secondary education; Strategies

Almeida, R. y Bruno, A. (2016). Uso de puntos de referencia y de representaciones gráficas para resolver tareas numéricas en secundaria. *PNA, 10*(3), 191-217.

Diferentes investigaciones han puesto de manifiesto que, a pesar del tiempo y el esfuerzo educativo de las últimas décadas por desarrollar en los estudiantes sentido numérico, siguen predominado en las aulas enfoques basados en enseñar procedimientos. Esto lleva a que los estudiantes no desarrollen una adecuada comprensión numérica que les lleve a buscar formas alternativas que difieran de la aplicación directa de reglas o algoritmos (Veloo, 2010; Yang, 2003; Yang y Huang, 2004; Yang, Li y Lin, 2008; Yang y Tsai, 2010).

El sentido numérico es una red conceptual bien organizada que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas de una forma creativa y flexible (Sowder, 1988, 1992). A esta idea de creatividad y flexibilidad, McIntosh, Reys y Reys (1992) añaden la habilidad para valorar lo razonable de un resultado en el contexto de la tarea numérica. Dado que el sentido numérico es un constructo no delimitado, diferentes autores han propuesto una descripción más operativa que se concreta en su asociación al desarrollo de distintas componentes (McIntosh et al., 1992; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Yang, 2003; Yang, Hsu y Huang, 2004; Yang y Huang, 2004; Yang, Li y Lin, 2008; Yang y Tsai, 2010). Estas componentes son: (a) comprender el significado de los números; (b) reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números y magnitudes usando estimaciones o propiedades para comparar; (c) usar puntos de referencia para estimar un número o magnitud cuando se comparan o se hacen cálculos; (d) usar representaciones de los números y las operaciones; (e) comprender las operaciones y sus propiedades: identificar el efecto relativo de las operaciones, establecer las relaciones entre las operaciones, usar propiedades, estimar; (f) comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria; (g) ser consciente de que existen múltiples estrategias; y (h) reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable. Las componentes están relacionadas y, además, una misma tarea numérica puede resolverse con componentes diferentes (McIntosh et al., 1992).

Investigaciones realizadas en educación primaria han concluido que, cuando los estudiantes resuelven problemas numéricos, la mayoría tienden a hacer uso de algoritmos y presentan grandes dificultades para realizar estimaciones (Yang, 2005; Veloo, 2010). Yang, Li y Lin (2008) concluyen que estudiantes de quinto nivel tenían más éxito al "reconocer el tamaño relativo de los números [que al] juzgar lo razonable de las estimaciones de un cálculo numérico" (p. 804). Además, confirman que existe una relación significativa entre las calificaciones académicas en matemáticas y el nivel de sentido numérico de los estudiantes.

Este último resultado no coincide con los intentos de relacionar el sentido numérico con otras habilidades, como el cálculo escrito. Los estudiantes que demuestran tener buenos resultados en cuestiones de cálculo escrito, no logran los mismos éxitos en tareas en las que necesitan hacer uso del sentido numérico (McIntosh et al., 1992; Reys y Yang, 1998; Yang y Huang, 2004; Veloo, 2010). Es decir, que las habilidades en cálculo escrito, sin una adecuada comprensión, pueden resultar poco útiles en contextos en los que es necesario algo más que aplicar algoritmos (Reys y Yang, 1998; Veloo, 2010; Yang y Huang, 2004). En contrapartida, indica Sowder (1992) que la instrucción sobre estimación y cálculo mental es una vía para desarrollar sentido numérico. En España se han realizado investigaciones que abordan aspectos del sentido numérico, principalmente relacionadas con la estimación de cantidades, de medidas y de operaciones, así como de cálculo mental (Albarracín y Gorgorió, 2013; Castillo-Mateo, Segovia, Castro y Molina, 2012; De Castro, Castro y Segovia, 2004; Gómez, 1995).

Los investigadores proponen cambios en la metodología de enseñanza de los números, ya que una instrucción adecuada que fomente el sentido numérico produce aprendizajes más significativos que las metodologías tradicionales (Veloo, 2010). Estas metodologías deben proponer actividades que permitan la exploración y la discusión de razonamientos diferentes. Markovits y Sowder (1994) examinaron el efecto de una instrucción en séptimo grado que tenía como finalidad desarrollar el sentido numérico a través de actividades ricas en la exploración numérica, la búsqueda de relaciones entre los números y las operaciones, y la invención o descubrimiento de reglas. Los resultados indicaron que el sentido numérico se desarrolla a largo plazo y que más que adquirir nuevo conocimiento, los estudiantes fueron capaces de reorganizar el que ya poseían de manera diferente. Resultados similares se obtuvieron en otras investigaciones en Taiwán y Brunei Darussalam (Veloo, 2010; Yang, 2003; Yang, Hsu y Huang, 2004).

Otros estudios que han analizado metodologías que fomentan el sentido numérico incluyen el uso de herramientas tecnológicas (Yang y Li, 2013; Yang y Tsai, 2010) obteniendo resultados alentadores. En cambio, esto ocurre en la investigación realizada por Alsawaie (2011), en Abu Dhabi (Emiratos Árabes Unidos), con estudiantes de alto rendimiento en matemáticas de sexto grado; estos estudiantes recibieron desde primer grado una enseñanza con libros de texto reformados, con el objetivo de fomentar el sentido numérico. El autor concluye que una reforma en los libros de textos no es suficiente para mejorar el sentido numérico, si no va acompañada de un cambio metodológico en el aula por parte de los profesores en el uso de dichos libros.

El trabajo que presentamos forma parte de un estudio más amplio que investiga sobre cómo trabajar en el aula de secundaria el sentido numérico, en un contexto español. Presentamos resultados de la prueba inicial correspondiente a dicho estudio, sobre tareas que pueden resolverse utilizando componentes del sentido numérico anteriormente descritas. Dada la amplitud del conocimiento numérico, nos centramos en dos componentes principales: el uso de puntos de referencia y el uso de representaciones gráficas aunque, como ya comentamos, las componentes están relacionadas y una misma tarea puede resolverse haciendo uso de diferentes componentes.

El uso de puntos de referencia se refiere a la habilidad para usar apropiadamente puntos de referencia numéricos para resolver problemas sobre mediciones de objetos comunes, para comparar números y realizar cálculos. Los puntos de referencia son generalmente valores con los que una persona se siente cómoda haciendo comparaciones o cálculos. Por ejemplo, múltiplos de potencias de 10, números como $\frac{1}{2}$, 50%

o cualquier referente numérico personal. McIntosh et al. (1992) sugieren que "así como un compás es una herramienta básica para la navegación, los puntos de referencia son referentes mentales esenciales para pensar sobre los números" (p. 6).

Por otra parte, usar representaciones de los números y las operaciones, significa ser capaz de utilizar de manera flexible representaciones (gráficas, manipulativas, pictóricas o simbólicas) para resolver problemas numéricos. Por ejemplo, representar números en la recta numérica para comparar o para estimar el resultado de una operación, expresar una multiplicación de dos números como el cálculo de un área para estimar el resultado, comparar dos fracciones con una representación parte todo, etc.

Las tareas analizadas implican también analizar de manera indirecta otras componentes, en especial reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable. Esto se refiere a determinar si el resultado de una tarea numérica está en el rango de posibilidades esperable o si la respuesta tiene sentido en función del contexto y los números implicados. Indica McIntosh et al. (1992) que la reacción de muchos estudiantes cuando se les pide valorar si un resultado es razonable es volver a realizar los cálculos, antes que reflexionar sobre el resultado.

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

El principal objetivo de la investigación que estamos desarrollando es estudiar la evolución del conocimiento numérico de los estudiantes cuando se desarrollan en el aula actividades que fomentan el sentido numérico. Lo que presentamos en este trabajo corresponde a las tareas de la prueba escrita, inicial en dicho estudio. En concreto, nos planteamos con alumnado de secundaria el siguiente objetivo: analizar el uso de los puntos de referencia (matemáticos o personales) y de representaciones gráficas para: representar números, estimar cantidades y obtener resultados de operaciones (con números naturales, decimales y fracciones).

Se diseñó una prueba y se implementó en dos grupos de estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria de un centro público semiurbano de Tenerife (España), con 22 y 25 estudiantes cada uno (47 estudiantes en total).

La prueba consta de 12 ítems, algunos diseñados por las investigadoras, otros modificados de Reys (1991)[1]. Los ítems abarcan conceptos relativos a la estimación de magnitudes, el orden de fracciones, la representación gráfica estimada de la suma y el producto de fracciones, la estimación y representación gráfica de porcentajes, las fracciones, decimales y naturales, la estimación de un producto de decimales y la valoración de la validez de una colección de datos numéricos a situaciones contextualizadas.

La prueba se diseñó de modo que el contenido matemático no fuese complejo para los estudiantes. Esto para que no hubiera impedimentos de tipo matemático para hacer surgir estrategias de sentido numérico.

1 http://goo.gl/sfpWaV

Los 12 ítems del cuestionario se presentaron en hojas separadas. Los estudiantes tuvieron tres minutos para responder a cada ítem, se les indicó que utilizaran estimaciones o sus conocimientos sobre los números y las operaciones y que no era necesario realizar cálculos exactos o algoritmos precisos para llegar al resultado. Así mismo, se les pidió que escribiesen cómo habían llegado al resultado o el razonamiento utilizado. Estas instrucciones estaban escritas en la primera página de la prueba y las investigadoras las leyeron en voz alta antes de comenzar la misma.

En el análisis de los datos de la prueba se realizó un análisis cuantitativo de tipo descriptivo, atendiendo al éxito y a los tipos de razonamientos; y un análisis cualitativo buscando las variaciones dentro de cada tipología de razonamiento. Se tuvieron en cuenta las siguientes categorías y códigos de evaluación.

Éxito. Correcta (se codificó con 1) o incorrecta (se codificó con 0).

Sentido numérico (SN). Utilizan alguna componente de sentido numérico.

Parcialmente sentido numérico (PSN). La justificación combina el uso de componentes del sentido numérico con el uso de otros tipos de estrategias como reglas memorizadas y/o algoritmos.

No sentido numérico (NSN). No hacen uso de componentes del sentido numérico en su justificación, como aquellos casos en los que hacen uso exclusivo de algoritmos o reglas memorizadas.

Otro. No proporcionan suficientes argumentos para identificar qué razones les llevan a su respuesta; utilizan una justificación que no responde a la pregunta formulada, alejada de un razonamiento que responde a la cuestión; o responden al ítem pero no presentan justificación.

Blanco (B). No responden a la pregunta.

RESULTADOS DE LA PRUEBA

Los resultados los presentamos en dos apartados. En el primero mostramos los porcentajes de éxito de todos los 12 ítems de la prueba. En el segundo apartado, y por limitaciones de espacio, seleccionamos nueve ítems para mostrar los tipos de razonamientos seguidos por los estudiantes, destacando las distintas repuestas propias de un correcto sentido numérico, así como ciertas carencias mostradas por los estudiantes en la resolución de las tareas.

Análisis de resultados generales

Con el objetivo de tener una visión general de los resultados de la prueba se han analizado los resultados de éxito por ítem, distinguiendo aquellos que contenían diferentes apartados (figura 1).

Estos resultados nos muestran que la media de éxito se encuentra próxima al 50%. Este dato acompañado de una desviación típica de 23,0 y del amplio rango, entre

17,1% y 91,5 %, nos lleva a estudiar otros aspectos de la distribución de los datos. A pesar del valor de la media, si calculamos la mediana vemos como el 50% de los ítems obtuvieron un éxito inferior o igual a 38,3%.

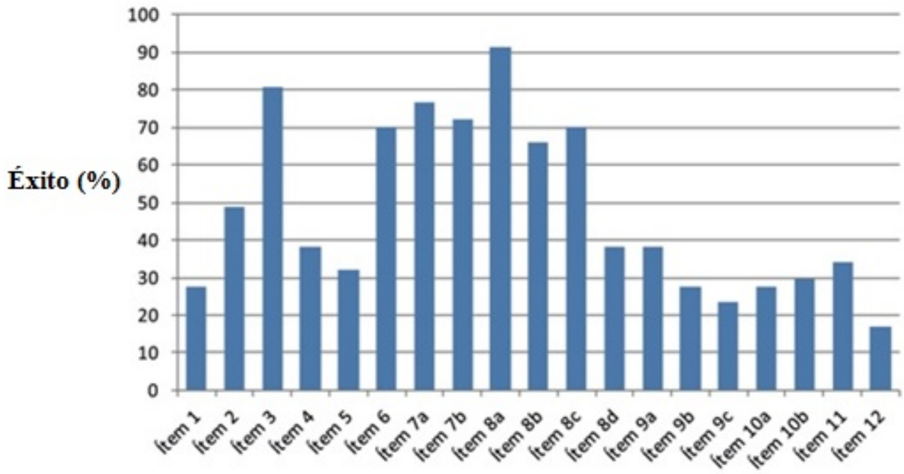


Figura 1. Porcentaje de éxito por ítem

La figura 1 proporciona una visión global de la heterogeneidad de los resultados según los ítems. Concretamente, el porcentaje de éxito por ítem es: ítem 1, 27,7%; ítem 2, 48,9%; ítem 3, 80,9%; ítem 4, 38,4%; ítem 5, 31,9%; ítem 6, 70,2%; ítem 7a, 76,6%; ítem 8a, 72,3%; ítem 8b, 91,5%; ítem 8c, 70,2%; ítem 8d, 38,3%; ítem 9a, 38,3%; ítem 9b, 27,7%; ítem 10a, 23,4%; ítem 10b, 27,7%; ítem 11, 29,8%; e ítem 12, 34,1%.

Se observa que solo un 36,8% de los ítems se encuentran por encima del 50% de éxito. Estos ítems son el 3, 6, 7a, 7b, 8a, 8b y 8c. Atribuimos el éxito del ítem 6 a los conceptos matemáticos implicados y a la cercanía del contexto. Los ítems 3, 7a, 7b, 8a, 8b y 8c se refieren a la estimación de una cantidad dada de forma gráfica (gráficos discretos y continuos). En el ítem 8d se obtuvo un éxito bajo (38,5%), hecho que asociamos a que la cantidad a estimar era un número expresado como fracción.

En el lado opuesto, encontramos que los ítems de menor éxito (inferior al 30%) son el 1, 9b, 9c, 10a, 10b y 12. Estos ítems, exceptuando el 1 y 10a, incluyen la realización por parte de los estudiantes de representaciones gráficas de fracciones y porcentajes, en concordancia con lo que se señalaba anteriormente que ocurrió en el ítem 8d.

Los ítems 1 y 10a obtuvieron el mismo éxito, aunque no trabajasen los mismos aspectos. En ambos ítems se planteaba una situación contextualizada cercana a su entorno: en el primero debían decidir qué valores (de los proporcionados) eran más apropiados a cada situación; en el segundo debían estimar una serie de porcentajes en función de la dedicación de cada uno en el día a ciertas actividades. Se esperaba en estos ítems un éxito mayor, dado que las situaciones presentadas eran cotidianas y se pedía una estimación que no requería la realización de cálculos. A continuación analizamos los resultados con mayor profundidad.

Análisis de tipos de estrategias

En este apartado hacemos un análisis más profundo de diferentes ítems de la prueba, observando el tipo de razonamiento seguido o determinados aspectos que destacan en los mismos.

Situaciones contextualizadas

Los ítems 1, 5, 6, 10 y 11 planteaban situaciones numéricas en un contexto real. En este apartado observamos los principales resultados de los ítems 1 y 10. Lo más destacable fue cómo las repuestas, en muchas ocasiones, se muestran alejadas de lo razonable.

El ítem 1 presenta un texto escrito, con espacios en blanco, que describe una situación cotidiana. El texto se acompaña de una colección de números, y se pide distribuirlos en los espacios en blanco de modo que la situación sea apropiada. El objetivo es que los estudiantes hagan uso de su sentido numérico para evaluar la opción más razonable, tomando puntos de referencia personales o matemáticos, y decidan qué tipo de número (natural, fracción o decimal) y de qué tamaño corresponde a cada caso. A priori, se consideró el ítem más sencillo de la prueba, razón por la que se colocó en primer lugar.

La respuesta a este ítem implica obligatoriamente hacer uso de componentes del sentido numérico, como comprender el significado de los números o tener puntos de referencia, por lo que los tipos de razonamientos se clasificaron únicamente en las categorías de sentido numérico y blanco (tabla 1).

Tabla 1
Porcentaje de respuestas al ítem 1

Tipo de razonamiento	Correcto	Incorrecto	Total
SN	27,7	72,3	100
B	0	0	0
Total	27,7	72,3	

Nota. SN=Sentido numérico; B= Blanco.

En la categoría sentido numérico distinguimos entre correcto o incorrecto, dependiendo de si los números elegidos eran adecuados o no. Así, clasificamos como erróneas las respuestas que no situaban a todos los números en el lugar correcto.

Desde nuestro punto de vista, los resultados no fueron óptimos. Como refleja la tabla 2, solo el 27,7% de estudiantes escogieron un valor razonable para todas las situaciones descritas. Si bien es cierto que en ocasiones confundieron solo dos de los números dados. Muchos estudiantes de los que contestan de forma incorrecta, parece que sitúan determinados números con seguridad y los demás los distribuyen sin preocuparse de que tengan sentido con el texto. De ahí que se dieran selecciones de números como las siguientes: pagar con un billete de 2, 9, o 60 euros; hacer la compra a las 2 de la mañana; tardar 2 de hora en hacer la compra (de naranjas y queso); decir que la compra costó $\frac{1}{4}$ euro; comprar 2 gramos de queso; gastar 10 euros y pagar con un billete de 2 euros y obtener una devolución de 1,65 euros; etc.

Otros estudiantes, una vez que colocan los primeros números, si los que les quedan piensan que no son los adecuados, optan por repetir números de los ya escritos. De esta manera, manifiestan una inclinación o preferencia por dar un resultado razonable, aunque la valoración del ítem sea incorrecta, por no utilizar todos los números dados.

En el ítem 10a, se pide a los estudiantes estimar los porcentajes del día que dedican a diferentes actividades (dormir, estar en clase, comer y otras actividades); y en el 10b, deben representarlos en un diagrama de sectores.

El ítem 10a se codificó como correcto si los porcentajes estimados eran razonables y el ítem 10b si la representación de los porcentajes era correcta, fueran o no razonables los porcentajes escritos en 10a. Los resultados se muestran en la tabla 2 y se observa el bajo éxito del ítem en ambos apartados, inferior al 30%. Dado que en este ítem deben realizar estimaciones basadas en puntos de referencia personales y representaciones gráficas no hay otro tipo de estrategias que las asociadas al sentido numérico (correctas e incorrectas).

Tabla 2
Porcentaje de respuestas al ítem 10

Tipo de razonamiento	Correcto	Incorrecto	Total
	Ítem 10a		
SN	27,7	68,1	95,8
B	-	4,2	4,2
	Ítem 10b		
SN	29,8	59,6	89,4
B	-	10,6	10,6

Nota. SN=Sentido numérico; B= Blanco.

Para considerar correcta cada actividad del ítem 10a se estableció un rango amplio de porcentaje de horas del día: dormir, entre 25% y 50%; estar en clase, entre 25% y 40%; comer, menor al 20%; resto de actividades, lo que faltara para llegar al 100% una vez que las otras actividades indicaban un porcentaje correcto.

A continuación, se muestra un ejemplo de respuesta correcta y otras respuestas con errores en la estimación de la situación cotidiana y/o en la representación gráfica de sectores.

A partir de la categoría SN, en la figura 2 se muestra que un estudiante realiza una estimación correcta de los porcentajes de las actividades y la representación gráfica correcta a partir de los valores escogidos.

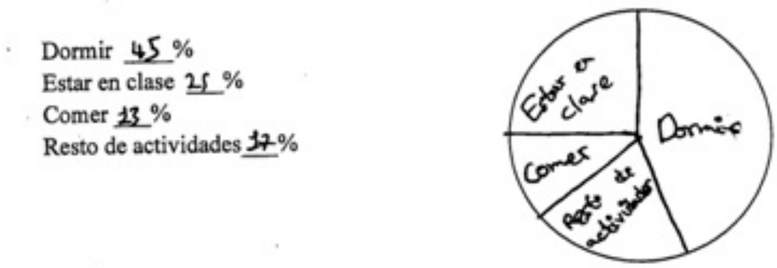


Figura 2. Respuesta correcta sentido numérico del ítem 10a y 10b

En la figura 3, se observa que un estudiante realiza una estimación correcta de los porcentajes de las actividades, pero realiza una representación gráfica incorrecta de los mismos.

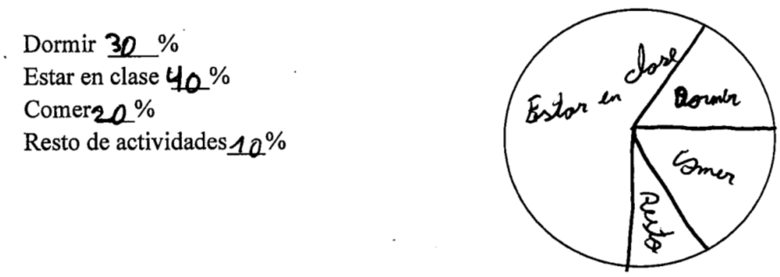


Figura 3. Respuesta correcta de sentido numérico del ítem 10a e incorrecta del 10b

La figura 4 muestra el caso de un estudiante que realiza una estimación de porcentajes no razonables y una correcta representación gráfica de estos.

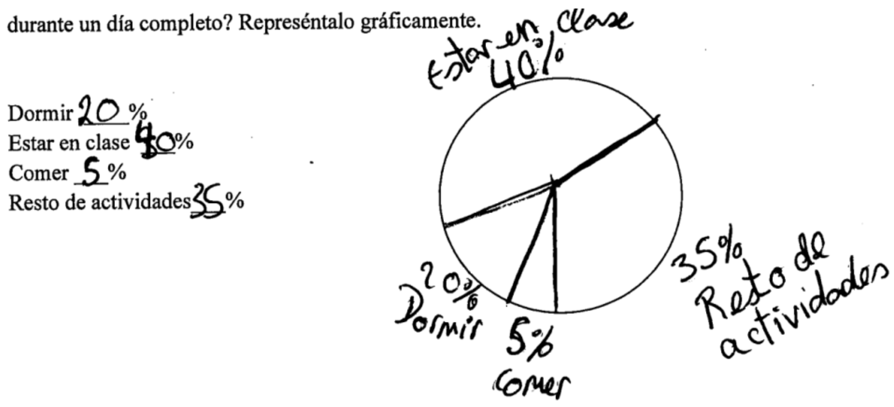


Figura 4. Respuesta incorrecta de sentido numérico del ítem 10a y correcta del 10b

La figura 5 presenta una estimación de porcentajes superando el 100% así como representación gráfica incorrecta de estos.

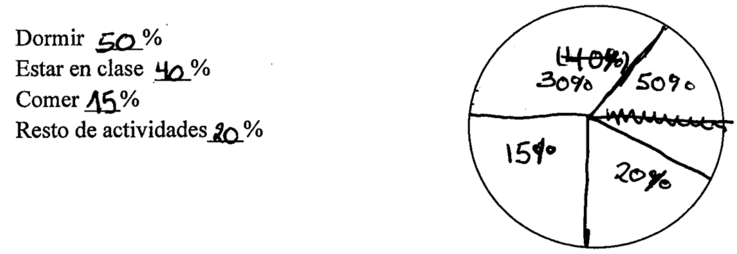


Figura 5. Respuesta incorrecta de sentido numérico de los ítems 10a y 10b

Pensamos que la dificultad del ítem no está en decidir el tiempo en horas, que se dedica a cada actividad, sino expresarlo como un porcentaje. El error más llamativo para este nivel escolar es dar distribuciones de porcentajes que suman más del 100% (figura 5).

Los estudiantes no escribieron ningún cálculo en sus respuestas y parece que aplican una estimación personal. En algunos casos creemos que esa estimación responde a ciertas "sensaciones", por ejemplo, cuando dicen que el 50% del día están en clase, probablemente no hayan pensado en que eso significa doce horas de clase cada día, sino que sienten que están "muchas horas en clase" o que consideran que pasan en clase la mitad del día, haciendo referencia al día como a las horas en las que estás despierto. Lo mismo pensamos cuando asocian el 50% de horas a dormir, que puede reflejar un pensamiento del tipo "la mitad del día duermo y la otra mitad estoy despierto". Los estudiantes deben aprender a usar sus referencias personales, pero también a valorar la exactitud de las mismas cuando está en un contexto matemático.

El predominio de las reglas

Analizamos en este apartado dos ítems en contextos matemáticos abstractos (ítems 2 y 4) con formatos de cuestiones estándares, que los estudiantes han realizado frecuentemente por medio de reglas o algoritmos, pero que en este caso se les indica que pueden resolverse sin realizar cálculos exactos.

El ítem 2 se presenta con el objetivo de que los estudiantes hagan uso del sentido numérico para ordenar fracciones, en este caso: comparar con puntos de referencia $\left(1, \frac{1}{2} \text{ y/o } \frac{1}{3}\right)$ (aunque con los dos primeros valores era suficiente, $\frac{1}{3}$ ayudaba a que la estimación del tamaño de las fracciones fuese más preciso); utilizar el concepto de fracción para reconocer el tamaño relativo de los números; o bien apoyarse en representaciones gráficas de los números.

Los resultados de este ítem muestran que el éxito está próximo al 50% (48,9%) y que los razonamientos más frecuentes pertenecen a la categoría NSN (46,8%). Entre las respuestas correctas, el tipo de razonamiento más frecuente es NSN, con un 31,9% frente a un 14,9% de sentido numérico (ver tabla 3).

Tabla 3
Porcentaje de respuestas al ítem 2

Tipo de razonamiento	Correcto	Incorrecto	Total
SN	14,9	17	31,9
NSN	31,9	14,9	46,8
Otro	2,1	19,2	21,3
Total	48,9	51,1	

Nota. SN=Sentido numérico; NSN=No sentido numérico.

A continuación mostramos ejemplos de las estrategias que aparecieron en este ítem, tanto de respuestas correctas como incorrectas, desde la categoría SN.

Un estudiante busca fracciones equivalentes para comparar las fracciones menores que la unidad. También, utiliza el concepto de fracciones equivalentes para ordenarlas (figura 6).

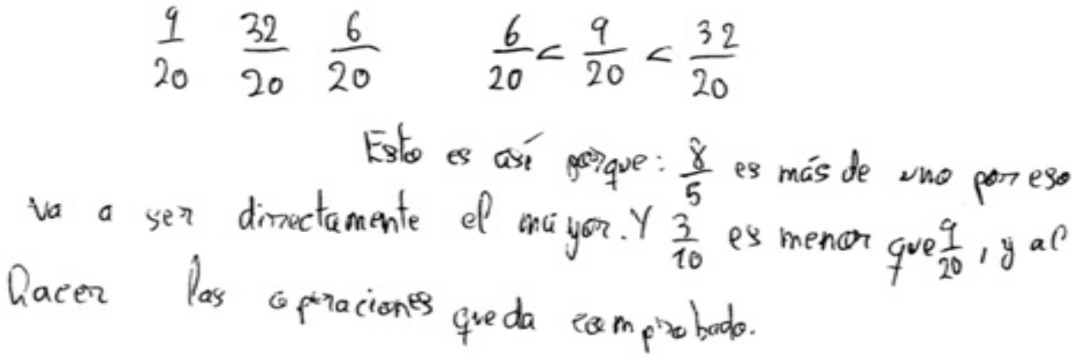


Figura 6. Respuesta correcta de sentido numérico al ítem 2

En este caso, se hace uso de los puntos de referencia 1 y $\frac{1}{2}$ para comparar las fracciones con los mismos y decidir el orden correcto (figura 7).

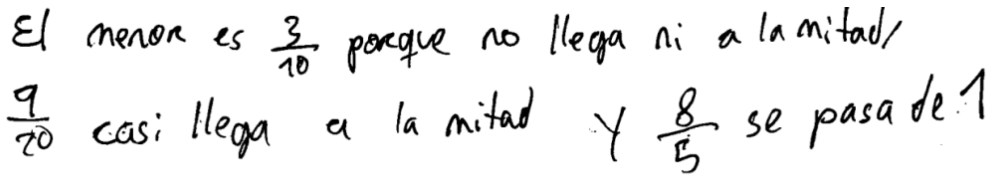


Figura 7. Respuesta correcta de sentido numérico al ítem 2

En la figura 8, se muestra cómo se utiliza la representación gráfica de las fracciones en sectores para decidir el orden de las mismas.

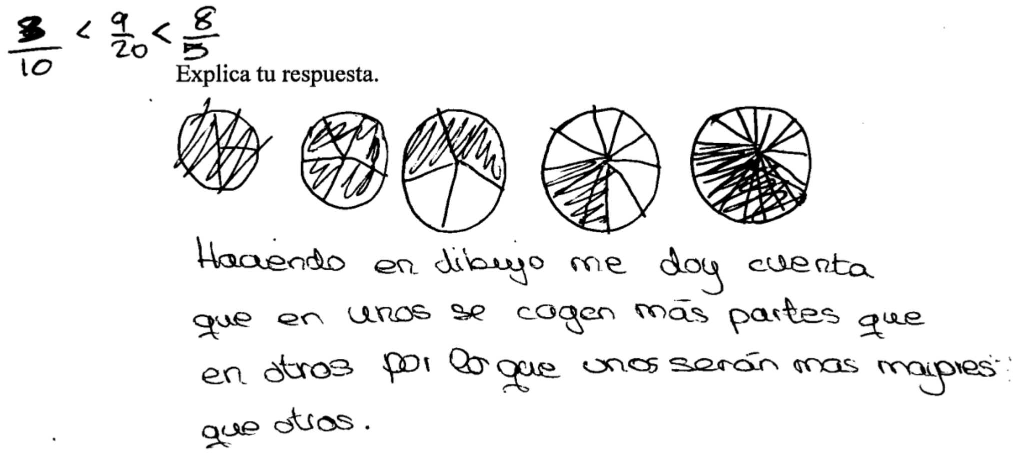


Figura 8. Respuesta correcta de sentido numérico al ítem 2

Por su parte, se encuentran casos de sentido numérico incorrecto, al usar el concepto de fracción, pero de una forma incorrecta, como la respuesta de la figura 9, en la que el estudiante ordena sólo observando el tamaño del denominador. Aquí, se analizan las fracciones a partir del concepto de fracción y ordena según el tamaño del denominador.

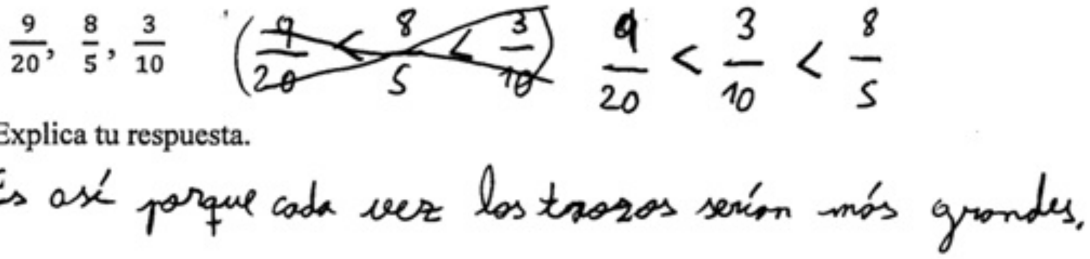


Figura 9. Respuesta incorrecta de sentido numérico del ítem 2

También encontramos estrategias de sentido numérico incorrectas al usar representaciones gráficas de las fracciones, como la solución del estudiante que se muestra en la figura 10, quien cambia el tamaño de la unidad para cada número.

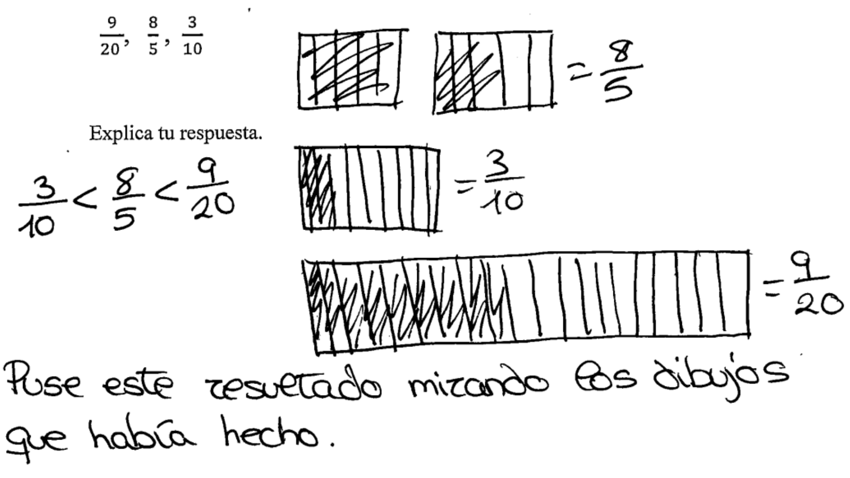


Figura 10. Respuesta incorrecta de sentido numérico del ítem 2

Las estrategias de NSN en este ítem se refieren al uso del mínimo común múltiplo o a expresar las fracciones en su forma decimal, realizando la división exacta.

Por ejemplo, en la figura 11 se muestra que un estudiante expresa las fracciones como decimales a partir del algoritmo de la división.

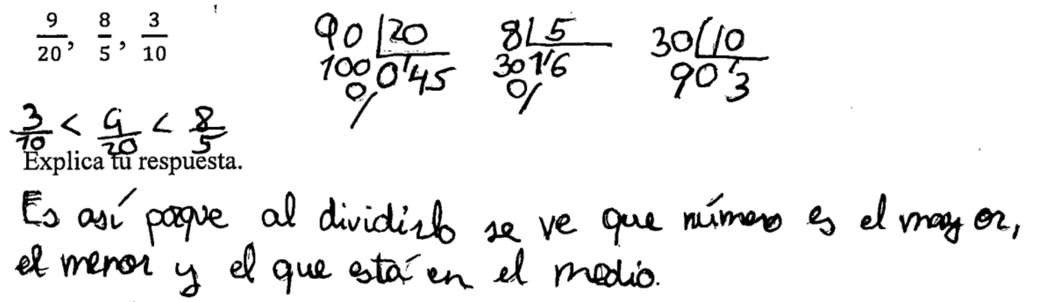


Figura 11. Respuesta correcta de no sentido numérico del ítem 2

En esta categoría de NSN también encontramos respuestas con errores de cálculo o de uso de una regla memorizada incorrecta. En estos casos no se observa que evalúen si el resultado obtenido es razonable, y normalmente la aplicación de reglas no va acompañada de justificaciones del proceso o de la comprensión del concepto de fracción.

Un estudiante aplica una regla memorizada incorrecta basada en la diferencia entre el numerador y el denominador (figura 12).

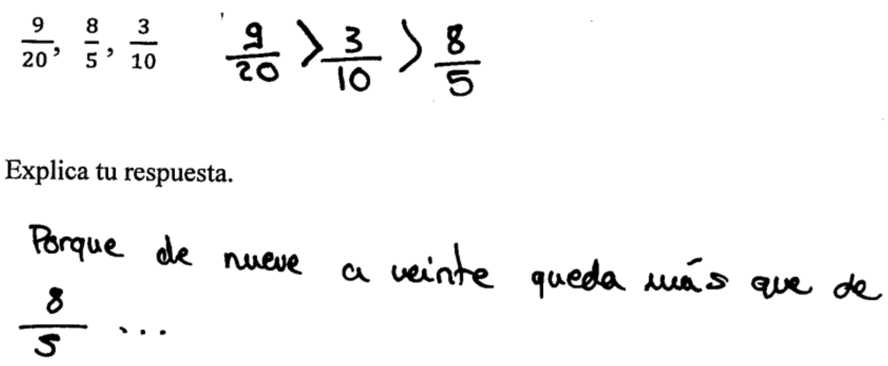


Figura 12. Respuesta incorrecta de no sentido numérico del ítem 2

El ítem 4 tiene como objetivo observar si los estudiantes utilizan puntos de referencia para estimar el resultado de una multiplicación de un número entero por un número decimal. Se resalta en el enunciado que elija la opción más próxima al resultado, sin realizar un cálculo exacto.

Los resultados a este ítem mostrados en la tabla 4 indican los bajos porcentajes tanto en el éxito (38,4%), como en el uso de sentido numérico (34,1%). Sólo un 12,8% de los estudiantes contesta de forma correcta con sentido numérico y sólo 14,9% con NSN correcto.

Tabla 4
Porcentaje de respuestas al ítem 4

Tipo de razonamiento	Correcto	Incorrecto	Total
SN	12,8	21,3	34,1
PSN	4,3	0	4,3
NSN	14,9	21,3	36,2
Otro	6,4	17	23,4
B	0	2,1	2,1
Total	38,4	61,7	

Nota. SN=Sentido numérico; PSN=Parcialmente sentido numérico; NSN=No sentido numérico; B= Blanco.

A continuación, se muestran las estrategias que surgieron en la resolución del ítem. En primer lugar, mostramos las que hacen uso de sentido numérico, correcto e incorrecto.

Un estudiante utiliza la descomposición de un factor y la propiedad asociativa del producto para estimar el resultado (figura 13).

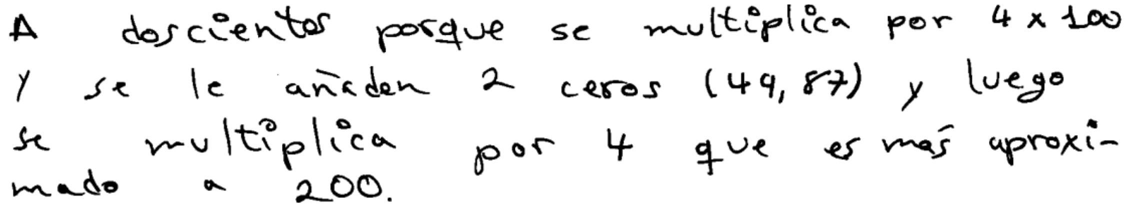


Figura 13. Respuesta correcta de sentido numérico del ítem 4

En la figura 14 se presenta el caso de un estudiante que escoge un punto de referencia para uno de los factores y aplica el efecto de las operaciones para estimar el resultado.

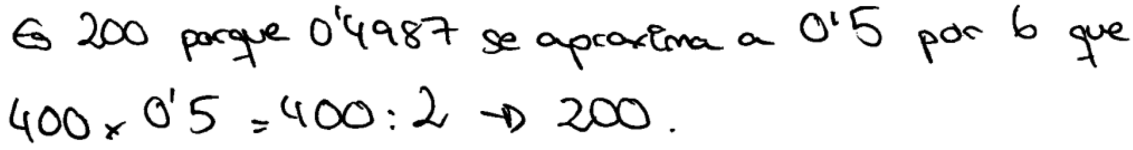


Figura 14. Respuesta correcta de sentido numérico del ítem 4

La figura 15 muestra cómo un estudiante realiza una estimación de la multiplicación.

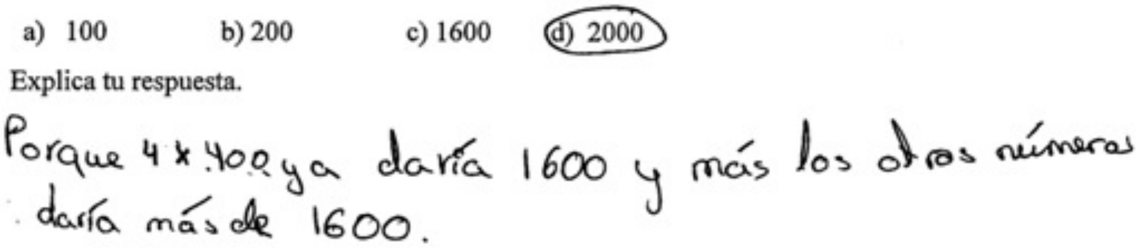


Figura 15. Respuesta incorrecta de sentido numérico del ítem 4

Entre las respuestas de la categoría NSN encontramos algunas correctas de aplicación del algoritmo, y otras incorrectas en las que se aplican reglas memorizadas injustificadas y no se evalúa lo razonable del resultado obtenido.

En la figura 16 se muestra la solución de un estudiante que realiza el algoritmo de la multiplicación.

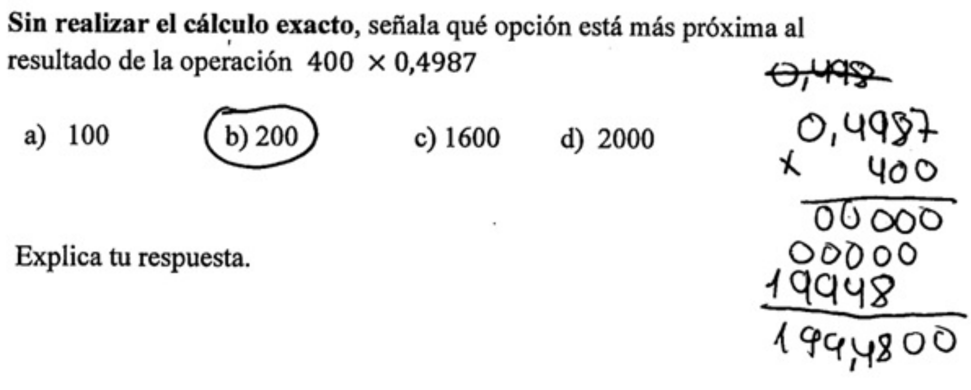


Figura 16. Respuesta correcta de no sentido numérico del ítem 4

También, se identifica el caso del estudiante que aplica una regla memorizada en la que decide el número de decimales del resultado en función del número de decimales de los factores “rodar la coma” (figura 17).

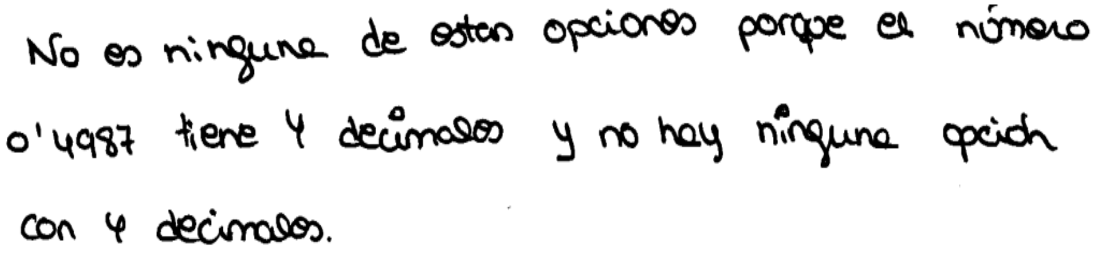
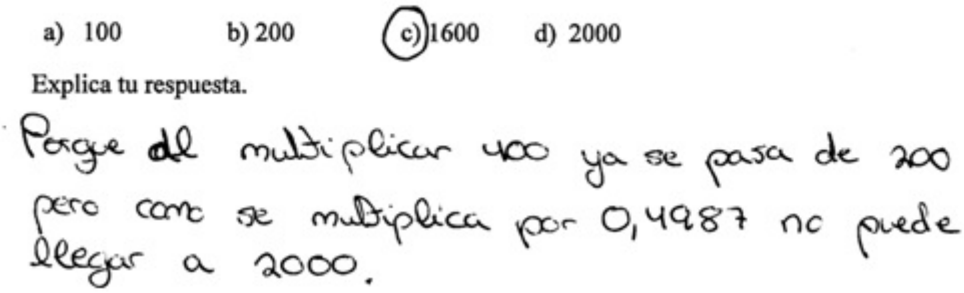

No es ninguna de estas opciones porque el número 0'4987 tiene 4 decimales y no hay ninguna opción con 4 decimales.

Figura 17. Respuesta incorrecta de no sentido numérico del ítem 4

La figura 18 muestra cuando un estudiante aplica una regla memorizada incorrecta en la que considera que un producto siempre obtiene un resultado mayor que ambos factores.


a) 100 b) 200 c) 1600 d) 2000

Explica tu respuesta.

Porque al multiplicar 400 ya se pasa de 200 pero como se multiplica por 0,4987 no puede llegar a 2000.

Figura 18. Respuesta incorrecta de no sentido numérico del ítem 4

La tercera categoría más frecuente entre las respuestas es la de otros, en la que se incluyen justificación que no presentaron argumentos suficientes para determinar cuál el razonamiento seguido en su respuesta. Esto refleja la dificultad de seguir razonamientos diferentes a la aplicación de algoritmos o bien la dificultad para expresarlos verbalmente por escrito. Diferentes autores resaltan que los estudiantes tienen dificultades con la coma decimal que muchas veces quedan ocultas cuando el trabajo se realiza con algoritmos escritos (De Castro, Castro y Segovia, 2004; Gómez, 1995).

Por último, aparecen creencias erróneas sobre el efecto de las operaciones, en este caso, “la multiplicación implica obtener un número mayor”, ya recogido en diferentes estudios.

Contestar a este tipo de preguntas usando razonamientos diferentes a las reglas, algoritmo o procedimientos mecánicos, implica poner en marcha conceptos numéricos, de manera integrada y relacionada. Lo que desde nuestro punto de vista es lo que da valor e importancia al trabajo del sentido numérico en el aula.

Estimación numérica a partir de un gráfico

En este apartado exponemos los resultados de dos ítems en los que se da a los estudiantes una representación gráfica para que estimen el valor numérico que representa. Distinguimos una representación discreta para el ítem 3, y otra continua, en el ítem 8.

El ítem 3 presenta una figura que incluye una cantidad de triángulos a estimar y en la que se proporcionan cinco opciones de estimaciones distintas, de manera que los estudiantes no tienen la necesidad de realizar un conteo exacto, sino que es suficiente con escoger la opción más razonable de entre las cuatro dadas. Se trata por lo tanto de una estimación discreta de objetos.

El éxito de este ítem es alto, aunque se podría esperar mayor, dado que los conceptos numéricos implicados son menores a otros ítems de la prueba (tabla 5). También desatacamos el alto uso del sentido numérico correcto (63,8%).

Tabla 5

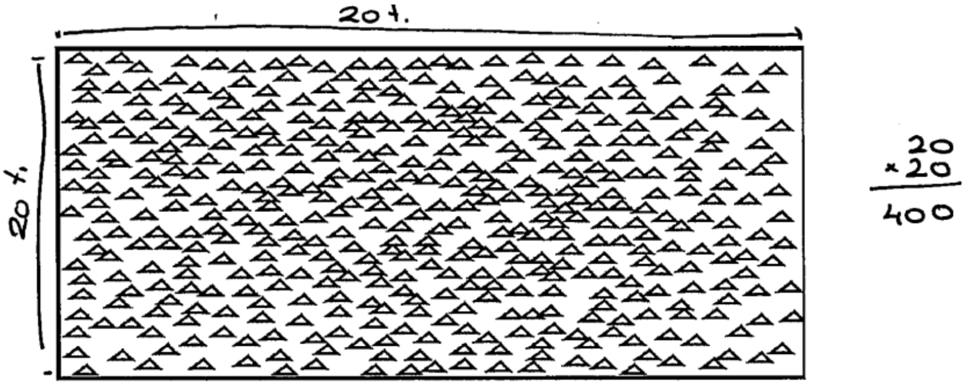
Porcentaje de respuestas al ítem 3

Tipo de razonamiento	Correcto	Incorrecto	Total
SN	63,8	17	80,8
PSN	4,3	0	4,3
NSN	10,7	0	10,7
Otro	2,1	0	2,1
B	0	2,1	2,1
Total	80,9	19,1	

Nota. SN=Sentido numérico; PSN=Parcialmente sentido numérico; NSN=No sentido numérico; B= Blanco.

A continuación, se muestran ejemplos de los diferentes tipos de razonamientos, deteniendo especialmente en los de sentido numérico, completo o parcial.

En cuanto al SN, se reconocen casos en que se utiliza el concepto de área de un rectángulo, tomando como medida del lado, el número de triángulos de dos lados perpendiculares (figura 19).



a) 50 b) 100 c) 200 d) 300 e) 400

Explica tu respuesta.

Hay aproximadamente 400 triángueos porque al multiplicar ~~tantos~~ los triangulos de un lado por los del otro lado da 400 triángulos.

Figura 19. Respuesta correcta de sentido numérico del ítem 3

También, se utiliza como referente una fracción de la imagen para después estimar el total (figura 20).

Conté la mitad y habían aproximadamente 200 entonces en la otra mitad habrán otros 200 más, por lo cual 200+200=400.

Figura 20. Respuesta correcta de sentido numérico del ítem 3

Entre las respuestas de sentido numérico encontramos casos en los que cometieron algún error, como se ejemplifica en la figura 21 en el que el estudiante realiza una buena estrategia pero toma un referente erróneo. En este caso, divide la imagen en partes iguales para tomar como referente la cantidad de triángulos en una de ellas y estimar el total.

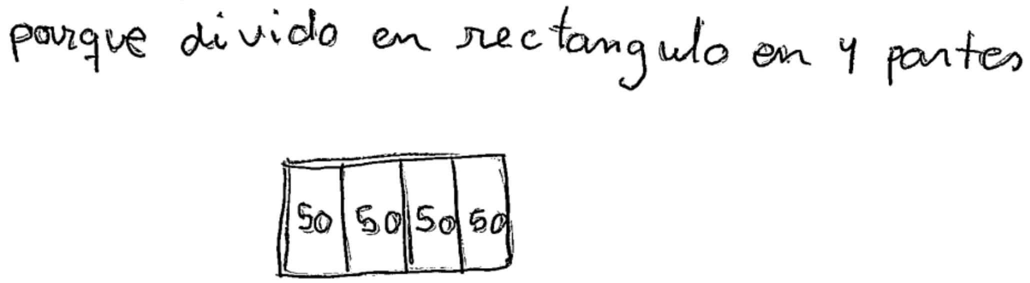


Figura 21. Respuesta incorrecta de sentido numérico del ítem 3

Para la categoría PSN, en la figura 22 se muestra cómo un estudiante utiliza el concepto de área de un rectángulo pero hace uso del algoritmo de la multiplicación para realizar un cálculo exacto.

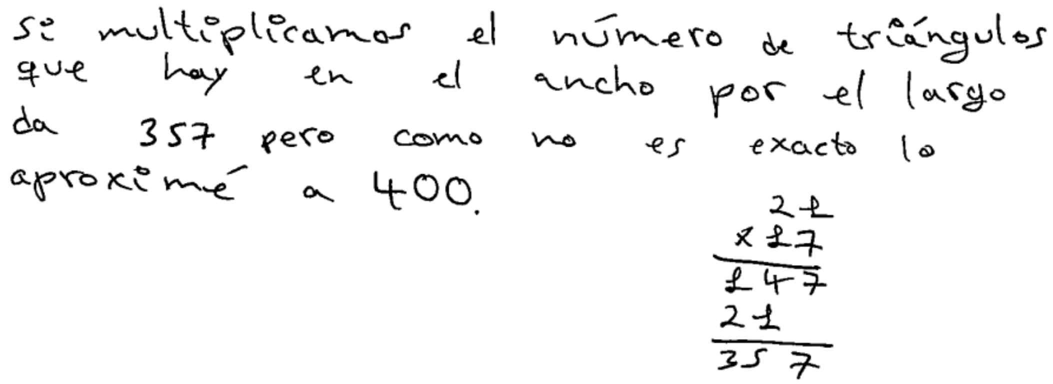


Figura 22. Respuesta correcta parcialmente de sentido numérico del ítem 3

Las respuestas de NSN en este ítem consistieron en contar todos los triángulos, lo cual se observa porque lo manifiesta de forma escrita (“los conté”), o bien, porque hacen una marca sobre cada triángulo para seguir el recuento.

En el ítem 8 (a, b, c y d) los estudiantes debían decidir qué número estaba representado en un gráfico de rectángulo. El objetivo consistía en analizar en qué medida en las estimaciones gráficas influye el tipo de número (porcentaje, decimal, natural y fracción). Se trata en este caso de una representación gráfica continua, a diferencia del ítem 3 que era una representación discreta de objetos. Dado que en este ítem todas las respuestas implican hacer uso de sentido numérico, mostramos en la tabla 6 los datos de las opciones elegidas en cada apartado. Se señala en negrita la opción correcta en cada caso.

Se observa que las estimaciones de mayor éxito fueron aquellas en las que se proponen porcentajes, decimales o naturales, en cambio, en el caso del apartado de las fracciones, el éxito fue muy inferior (38,30%).

Tabla 6
Porcentaje de cada opción en el ítem 8

Ítem	A	B	C	D
8a	6,38	91,49	0	2,13
8b	19,15	6,38	65,96	8,51
8c	2,13	14,89	12,77	70,21
8d	6,38	36,17	19,15	38,30

El ítem de mayor éxito fue el 8a, en el que se proponía la representación gráfica de un porcentaje. Este hecho lo relacionamos con que es un gráfico usual en entornos informáticos y porque el tamaño del rectángulo corresponde a un número entero relativamente bajo (100%). Aspecto que no ocurre en el ítem 8c, en el que, aunque es entero, la representación de un millón es menos habitual.

Destaca el bajo éxito del ítem 8d, en el que se dio aproximadamente el mismo número de estudiantes que escogieron la opción incorrecta B $\left(\frac{2}{5}\right)$ que la opción correcta D $\left(\frac{2}{7}\right)$, posiblemente por la proximidad de dichas fracciones en comparación con las dos opciones restantes.

Los resultados en los ítems 3 y 8 muestran que la capacidad para realizar una estimación dependió del tipo de números. En general, los estudiantes de este estudio tuvieron una buena capacidad para realizar estimaciones de una cantidad numérica cuando estaba asociada a números enteros y decimales, en cambio, encontraron dificultades cuando se trataba de fracciones, aspecto que se completa en el siguiente apartado.

La dificultad de las fracciones

Aunque este estudio no ha tenido como objetivo realizar una comparación exhaustiva de las respuestas según tipologías de números, quedaron reflejadas las dificultades de los estudiantes para manejar las ideas relacionadas con las fracciones. Los ítems en los que estaban implicadas fracciones fueron en los que se mostró menor porcentaje de éxito. Un ejemplo es el apartado 8d anteriormente comentado, y en este caso lo ampliamos con otros ítems que implicaban operaciones con fracciones.

En el ítem 11 se presenta una situación en un contexto tradicional en la enseñanza de las fracciones (las pizzas), cuyo objetivo es observar cómo se estima el resultado de una suma de fracciones que sirven de referentes habitualmente $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$. Para ello se les proporcionaron cuatro opciones de respuestas y dos circunferencias que representaban las pizzas a las que hacía referencia el enunciado, con el fin de que se apoyaran en ellas para simular la situación planteada en un gráfico que facilitase la estimación.

En la tabla 7 se observa que el éxito del ítem 11 fue bajo, 34,1%, con un 80,9% de respuestas clasificadas en la categoría de sentido numérico, aunque en la mayoría de los casos incorrectas (53,2%).

Tabla 7
Porcentaje de respuestas al ítem 11

Tipo de razonamiento	Correcto	Incorrecto	Total
SN	27,7	53,2	80,9
NSN	2,1	2,1	4,2
Otro	4,3	6,4	10,7
B	0	4,3	4,3
Total	34,1	66	

Nota. SN=Sentido numérico; PSN=Parcialmente sentido numérico; NSN=No sentido numérico; B= Blanco.

Todas las respuestas incluidas en la categoría de sentido numérico hicieron uso de la representación gráfica de las fracciones, siendo una gran proporción de ellas incorrectas, debido a que la sección sombreada no se corresponde con la fracción. Especialmente compleja resultó la representación de la fracción $\frac{1}{3}$. Veamos algunos ejemplos de respuestas.

En las figuras 23, 24 y 25, se muestra cómo algunos estudiantes realizan una representación gráfica de la situación para estimar la suma de las fracciones.

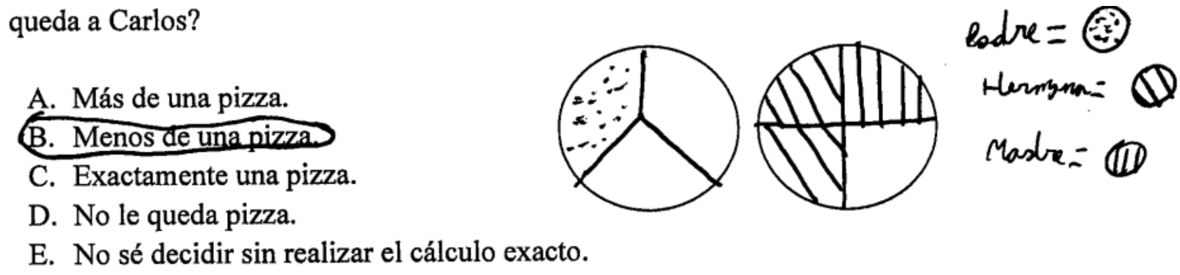


Figura 23. Respuesta correcta de sentido numérico del ítem 11

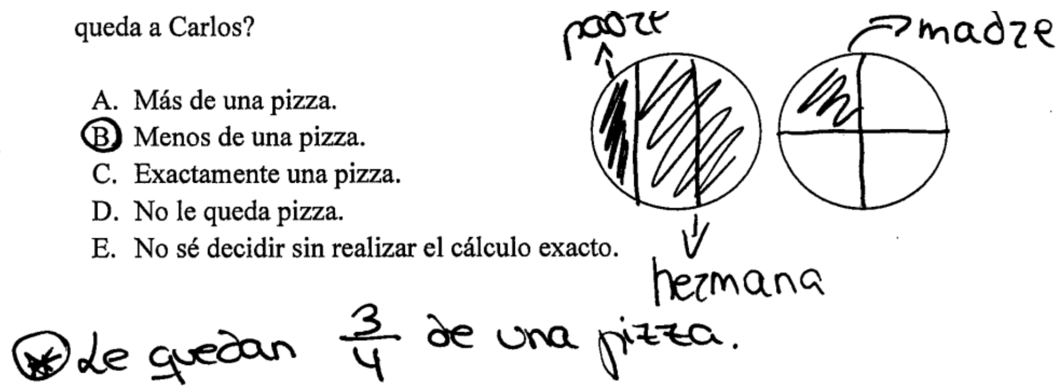


Figura 24. Respuesta incorrecta sentido numérico del ítem 11

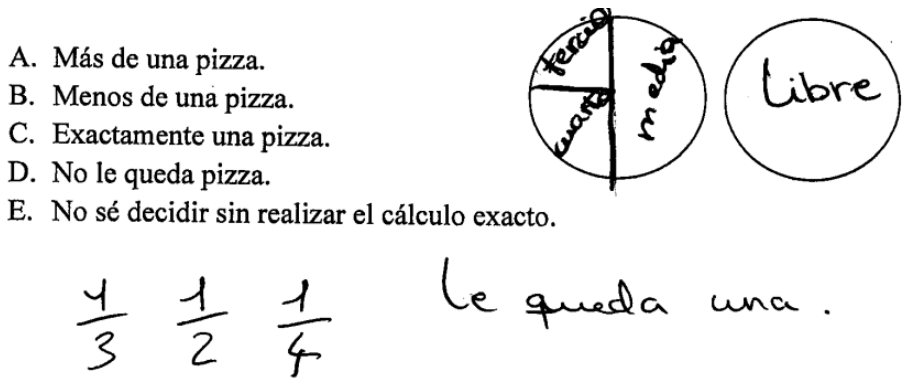


Figura 25. Respuesta incorrecta de sentido numérico del ítem 11

Observamos que para muchos estudiantes, la fracción $\frac{1}{3}$ es la que produce las dificultades del ítem, pues no la representaron de forma exitosa ni establecieron la comparación correcta con $\frac{1}{4}$. Lo que refleja que no es una fracción que sirva de punto de referencia útil para los estudiantes de este estudio.

Las estrategias de NSN son las que realizan algoritmo de la suma de fracciones con distinto denominador, mediante el cálculo del mínimo común múltiplo, aunque el número de estudiantes que siguió ese procedimiento fue escaso.

En el ítem 12 los estudiantes debían identificar qué área sombreada en un cuadrado de lado uno representaba mejor el producto de dos fracciones proporcionadas, de entre cuatro opciones propuestas. Se trataba del ítem de mayor dificultad a priori, cuyos resultados confirman dicha dificultad (ver tabla 8).

El éxito del ítem es el más bajo de toda la prueba escrita 17,1%. Además, ningún estudiante utilizó una estrategia que hiciese uso exclusivo del sentido numérico mediante la asociación del producto como área de un rectángulo cuyos lados eran cada uno de los factores de la multiplicación. También se podría estimar usando puntos de referencia a cada factor $\left(\frac{1}{2}\right)$, resultando el área de un cuadrado de lado $\frac{1}{2}$.

Tabla 8
Porcentaje de respuestas al ítem 12

Tipo de razonamiento	Correcto	Incorrecto	Total
PSN	12,8	38,3	51,1
Otro	4,3	40,4	44,7
B	0	4,3	4,3
Total	17,1	83	

Nota. PSN=Parcialmente sentido numérico; B= Blanco.

Por el enunciado del ítem, el uso de una representación gráfica es necesario. Por lo que no cabe en el tipo de razonamiento el uso exclusivo de reglas o algoritmos para su resolución, de ahí que las respuestas sean PSN.

La respuesta habitual fue escribir el resultado exacto de la multiplicación $\left(\frac{4}{18}\right)$ mediante un algoritmo y estimar el resultado como próximo a 0,25. Veamos algunos ejemplos que surgieron en este grupo de estudiantes.

En cuanto a la categoría PSN, en la figura 26, el estudiante utiliza el algoritmo de la multiplicación de fracciones para después identificar la representación gráfica del resultado.

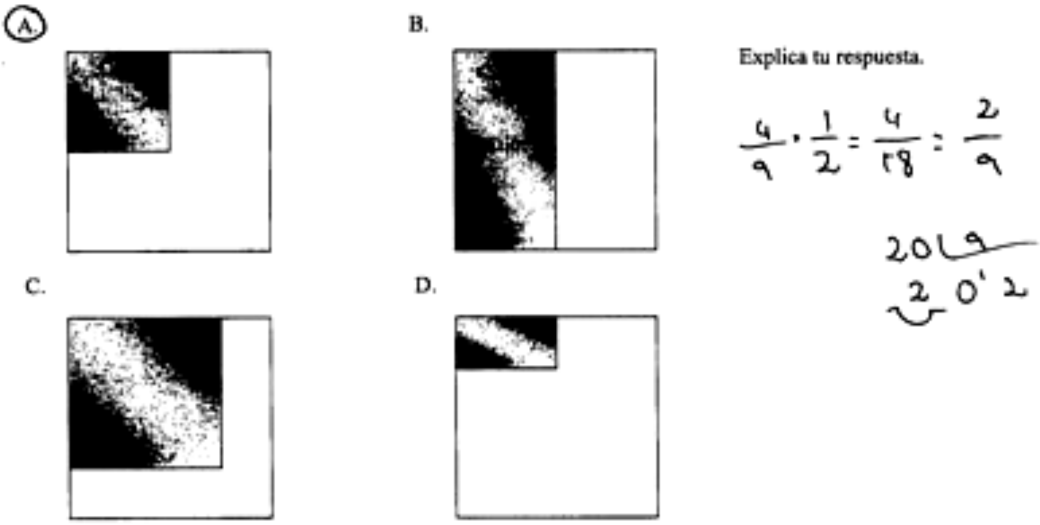


Figura 26. Respuesta correcta parcialmente de sentido numérico del ítem 12

Las respuestas incorrectas se deben a errores de cálculo o a no asociar el resultado obtenido con la representación gráfica correspondiente. También encontramos un tercer tipo de error en esta categoría, se trata del caso de los estudiantes que aplican una regla memorizada que establece que un producto siempre devuelve un resultado mayor que sus factores.

En la misma categoría, en otra de las soluciones se aplica una regla memorizada del producto para después identificar la representación gráfica del resultado (figura 27).

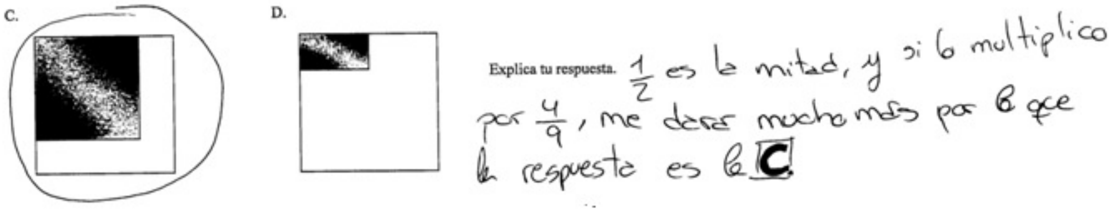


Figura 27. Respuesta incorrecta parcialmente de sentido numérico del ítem 12

Las respuestas restantes se concentran en su mayoría en la categoría otro (44,7%) y son aquellas que simplemente seleccionan una opción, sin dar una explicación de la misma.

En resumen, los ítems de la prueba, relativos a fracciones en los que deben estimar a partir de una representación gráfica, hacer una representación de fracciones u operaciones, ponen de manifiesto que los estudiantes de este estudio tienen serias dificultades para interpretar el concepto de fracción.

Conclusiones

Los resultados de esta prueba invitan a reflexionar sobre determinadas habilidades y carencias que demuestran dos grupos de estudiantes de segundo curso de secundaria, al resolver tareas en las que se evalúan aspectos de su sentido numérico. Principalmente, el uso de puntos de referencia y de representaciones gráficas. La prueba se diseñó de modo que el nivel de los conocimientos numéricos a utilizar no fuera un impedimento para hacer surgir formas diferentes de razonar, asociadas con la estimación numérica y gráfica, y con propiedades de los números. Este trabajo presenta limitaciones en los contenidos analizados y los resultados no son generalizables, pero lleva a plantearse si el conocimiento numérico adquirido por estos estudiantes ha resultado efectivo en determinadas situaciones o tareas numéricas.

En el análisis de los resultados se observa una amplia variedad en el éxito y en las estrategias según los ítems, lo que se explica por la diferencia en los enunciados y en los contenidos que abordan. La prueba no tenía como objeto establecer comparaciones entre los ítems, pero consideramos que el éxito es muy bajo en algunos de ellos, teniendo en cuenta el nivel de dificultad matemática que implicaban.

Creemos que el bajo éxito del ítem 1, sobre asociar números a situaciones cotidianas, se debe a que los estudiantes no evalúan su primera respuesta. Este ítem no es una tarea habitual para ellos y muchas de las respuestas erróneas son la primera opción numérica elegida, pues no se observa que hayan corregido o intercambiado los números que pudieran no ser correctos. Simplemente les basta con que el tipo de número "encaje" (entero, decimal,… o según su tamaño). Esa es la razón por la que "hacen la compra a las 2 de la madrugada", o "pagan con un billete de 9 euros". En cierta forma, no valoran que además de que el tipo o tamaño del número sea adecuado, es necesario que describa una situación real.

Esta misma idea podemos extenderla al ítem 10a en el que hacen una distribución de porcentajes de actividades cotidianas, sin evaluar si las horas que implicarían responde realmente a su vida cotidiana. Aunque también en este ítem encontramos dificultades de contenido matemático cuando realizan una distribución de los porcentajes cuya suma es superior al 100%.

La enseñanza debe llevar a que los estudiantes den sentido a lo que responden, y en definitiva, evalúen lo razonable de un resultado (Yang, Li y Lin, 2008).

Encontramos un predominio de las reglas para resolver las tareas, en contraposición con la búsqueda de razonamientos alternativos en los que se pongan en marcha propiedades matemáticas, como ya se había concluido en otros estudios internacionales, citados en la introducción. Esto se observa en varios ítems de la prueba, cuyos porcentajes de razonamientos de sentido numérico son muy bajos, y en su mayoría incorrectos (ver ítems 2 y 4). Los estudiantes tuvieron dificultad para usar puntos de referencia que les permitiera llegar a un resultado aproximado. Por el contrario, prefirieron razonamientos que les llevaran a un resultado exacto al ordenar, al multiplicar o al hacer un cálculo de una magnitud (ítems 5 y 6). La explicación que damos es que, por un lado, se sienten seguros con los métodos que llevan a respuestas exactas, pues están habituados a ellos, y por otro, puede ocurrir que piensen que esas son las respuestas que se esperan de ellos y que valoran los profesores. Por lo que, de nuevo, es la práctica de aula diaria la que debe hacer surgir las formas alternativas de razonar.

Mejores resultados se han encontrado en los ítems en los que se pide una estimación a partir de una representación gráfica dada, tanto de tipo discreta (ítem 3), como continua (ítems 7, 8), con excepción del ítem 12 relativo a la multiplicación de fracciones. Destacamos en este tipo de ítems la influencia importante del tipo de número que deben estimar, siendo más sencillas la estimación de cantidades enteras y expresadas en forma decimal que en forma fraccionaria. No ocurre lo mismo cuando son ellos los que deben construir la representación gráfica para obtener un resultado. Son llamativas las dificultades para realizar un diagrama de sectores con porcentajes (ítem 10b) o para representar fracciones menores que la unidad $\left(\frac{1}{4} \text{ y } \frac{1}{3}\right)$ (ítems 9 y 11).

En general, la prueba ha dejado patente que estos dos grupos de estudiantes tienen dificultades importantes con las fracciones, en sus distintos usos, ordenar, representar una fracción menor que la unidad, o estimar a través de un gráfico el resultado de una operación de suma y de multiplicación.

Los resultados de la prueba nos sirvieron para concluir que los estudiantes no estaban habituados a tareas que implicaran el uso de puntos de referencia o la construcción de representaciones gráficas. Sin embargo, respondieron mejor a las estimaciones gráficas ya dadas. Todo ello nos ayudó en el diseño de la secuencia de aprendizaje que se aplicó posteriormente.

La propuesta para desarrollar el sentido numérico persigue que los estudiantes adquieran ciertas habilidades en el manejo de los números que les sean útiles en el estudio de la propia matemática y fuera del contexto escolar. Se trata de realizar un aprendizaje de los números que les permita ser más flexibles, reflexivos y críticos en la resolución de problemas numéricos, y que no les lleve a actuar siempre siguiendo un método estándar de ejecución.

Agradecimiento
Este trabajo forma parte del proyecto EDU2011-29324: Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de estudiantes de primaria, de secundaria y de profesorado de primaria en formación. Ministerio de Ciencias e Innovación, Madrid.

Referencias

Albarracín, L. L. y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de magnitudes no alcanzables: estrategias y éxitos en la resolución. *PNA*, *7*(3), 103-115.

Alsawaie, O. N. (2011). Number sense-based strategies used by high-achieving sixth grade students who experienced reform textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*, 1071-1097.

Castillo-Mateo, J. J., Segovia, I., Castro, E. y Molina, M. (2012). Categorización de errores en la estimación de cantidades de longitud y superficie. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 63-74). Valencia, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: estudio con maestros en formación. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Actas del VIII Simposio de la SEIEM* (pp.183-194). A Coruña, España: Universidad da Coruña.

Gómez, B. (1995). Tipología de errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *13*(3), 313-325.

Markovits, Z. y Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 4-29.

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, *12*(3), 2-8.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standars for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, B. J. (1991). *Developing number sense: Addenda series, Grades 5-8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, B. J. y Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(2), 225-237.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. En Hiebert, J. y Behr, M. (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Reston, VA: Erlbaum.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 245-275). New York, NY: MacMillan Publishing Company.

Veloo, P. K. (2010). *The development of number sense and mental computation proficiencies: An intervention study with secondary one students in Brunei Darussalam*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Otago, Nueva Zelanda.

Yang, D. C. (2003). Teaching and learning number sense–an intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *1*(1), 115-134.

Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by 6th grade students in Taiwan. *Educational Studies, 31*(3), 317-333.

Yang, D. C. y Huang, F. Y. (2004). Relations among computational performance, pictorial representation, symbolic representation and number sense of sixth-grade student in Taiwan. *Educational Studies, 30*(4), 373-389.

Yang, D. C., Hsu, C. J. y Huang, M. C. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*, 407-430.

Yang, D. C. y Li, M. N. (2013). Assessments of animated self-directed learning activities modules for children's number sense development. *Educational Technology and Society*, *16*(3), 44-58.

Yang, D. C., Li, M. N. y Lin, C. I. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*, 789-807.

Yang, D. C. y Tsai, Y. F. (2010). Promoting sixth graders' number sense and learning attitudes via technology-based environment. *Educational Technology and Society, 13*(4), 112-125.

Rut Almeida
Universidad de La Laguna
rutalca@gmail.com

Alicia Bruno
Universidad de La Laguna
abruno@ull.es