

Optimización del Diseño en Armaduras

Truss Design Optimization

Myriam R. Pallares Muñoz¹ y Wilson Rodríguez Calderón²

Resumen

Las estructuras formadas por elementos lineales articulados constituyen una tipología importante de los sistemas estructurales que se utilizan en ingeniería y por ello resultan un campo muy interesante para la aplicación de métodos de optimización. La optimización en estas estructuras se refiere a las dimensiones de las secciones transversales de las barras y a la posición de los nudos, teniendo en cuenta las restricciones que el pandeo introduce sobre las barras solicitadas a compresión que se traducen en límites de tamaño de las secciones transversales para evitar la disminución de capacidad resistente. En este artículo se determinan secciones optimizadas de elementos articulados identificando la función objetivo a minimizar, las variables de diseño y las restricciones del problema. Se reportan dos casos de estudio de peso mínimo: una celosía y una armadura de puente, ambos con restricciones de esfuerzos admisibles. Se realiza una validación comparando los resultados de modelos de elementos finitos acompañados de esquemas de optimización en Ansys[®] y la solución teórica. Se concluye que el diseño de las estructuras en ingeniería puede ser refinado para obtener un mejor diseño, *el óptimo*, llevando a cabo el cálculo inicial y mejorándolo mediante técnicas de optimización sin decisiones subjetivas.

Palabras clave: Optimización, función Objetivo, variables de diseño, variables de estado, minimización, Ansys[®].

Abstract:

Articulated structures formed by linear elements are an important type of structural systems which are used in engineering and are therefore a very interesting field for application of optimization methods. Optimization in these structures refers to the dimensions of the cross sections of the bars and the position of the nodes taking into account the constraints included by buckling over compression bars which are translated into limits on the size of the cross sections to prevent loss of strength capacity. In this paper, we want to find optimized sections of hinged elements, for that, is necessary to determine the objective function, design variables and constraints of the problem. Two case studies of minimum weight are reported: a lattice and a bridge truss, both constrained allowable stresses. Validation is performed by comparing the results of finite element models accompanied by Ansys[®] optimization schemes and the theoretical solution. We concluded that the

1 Magister Métodos Numéricos en Ingeniería. Universidad Surcolombiana. Avenida Pastrana Borrero Carrera 1, Neiva-Colombia. : E-mail: myriam.pallares@usco.edu.co

2 Magister Métodos Numéricos en Ingeniería. Universidad de La Salle. Carrera 2 # 10- 70, Bloque D Piso 7, Bogotá-Colombia. E-mail: wrodriguez@unisalle.edu.co

Recibido 4 de febrero de 2014

Aprobado 28 de abril de 2014

design of engineering structures can be refined for better design, optimum, for that, we must make initial computation and then improve it by optimization techniques without subjective decisions.

Keywords: Optimization, objective function, design variables, state variables, minimization, Ansys.

1. Introducción

El proceso de diseño tradicional se caracteriza por cierto carácter subjetivo y porque su desarrollo depende en gran medida del criterio y la experiencia del analista, que normalmente está presionado por límites de tiempo que no hacen posible contrastar todas las posibilidades o alternativas de diseño para escoger la más adecuada (Oñate, 2011). El propósito de un diseño tradicional generalmente consiste en encontrar la estructura que cumpla los requisitos impuestos por una normativa o en general por criterios basados en la mecánica de los materiales sin entrar a establecer criterios de optimización de la misma (Schmit, 1980). La tarea que realiza un diseñador puede ser planteada de manera analítica con miras a generar ciclos de análisis – diseño que permitan comparar diferentes alternativas y decidir bajo ciertas restricciones en las variables de entrada y de respuesta de la estructura que permitan optimizar alguna característica importante para el desempeño o el costo como puede ser el peso o un límite de desplazamiento (Cosmos/M, 2012)). Los aspectos de diseño a intervenir no siempre son los mismos y pueden ser clasificados en cuatro categorías: el tipo de material y sus características; la morfología de la estructura; la disposición geométrica de los elementos; y por último, la forma y dimensiones de la sección transversal de los elementos (Zienkiewicz, 2010). El último caso es de amplio interés en estructuras articuladas y sobre éste se plantean los casos investigados y reportados en este artículo.

2. Metodología

En el proceso de diseño existen algunas magnitudes que pueden considerarse constantes y que en el diseño óptimo de estructuras suelen llamarse parámetros fijos. Estos parámetros, de

manera general, pueden agruparse en un vector $\bar{p} = (p_1, \dots, p_k)$, mientras que las características que pueden variar en la estructura y que se denominan *variables de diseño* se encuentran contenidas en el vector $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Las acciones sobre las estructuras normalmente inducen condiciones que deben ser cumplidas y que en la práctica se relacionan con: los esfuerzos del material, los desplazamientos de los nudos, las deflexiones, etc. Muchas de ellas son *variables de estado* de la estructura que dependen de \bar{x} y \bar{p} , están sujetas a límites, condiciones o restricciones y pueden ser expresadas en la forma $g(\bar{x}, \bar{p}) \leq 0$. Estas condiciones usualmente están ligadas al comportamiento o al diseño mismo. Las *condiciones de comportamiento* están relacionadas con los estados límite de la estructura o los modos de colapso considerados. No pueden violarse ya que se puede poner en peligro la estabilidad, la seguridad o la funcionalidad de la estructura. En el caso de esfuerzos o movimientos estas condiciones tienen la forma de las ecuaciones (1) y (2).

$$\sigma(\bar{x}, \bar{p}) \leq \sigma_{adm} \quad (1)$$

$$u(\bar{x}, \bar{p}) \leq u_{adm} \quad (2)$$

donde σ_{adm} y u_{adm} , representan los esfuerzos y desplazamientos admisibles de acuerdo al material constitutivo de la estructura o a requerimientos basados en normativas. En ocasiones se acostumbra normalizar estas condiciones por lo que pueden re-escribirse en la forma de las ecuaciones (3) y (4).

$$\frac{\sigma(\bar{x}, \bar{p})}{\sigma_{adm}} - 1 \leq 0 \quad (3)$$

$$\frac{u(\bar{x}, \bar{p})}{u_{adm}} - 1 \leq 0 \quad (4)$$

Por su parte, las *condiciones de diseño* dependen de criterios de forma o técnicos y no se encuentran vinculadas al comportamiento resistente de la estructura. La mayoría de las veces sirven para limitar el campo de existencia de las variables de diseño y pueden representarse a través de (5).

$$\bar{x}_{\min} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_{\max} \quad (5)$$

También, el analista debe decidir qué característica desea perfeccionar u optimizar en el diseño y formularla analíticamente en términos de una función de la forma $F = f(\bar{x}, \bar{p})$ denominada *función objetivo*. A partir de estas consideraciones puede plantearse el problema de optimización o de diseño óptimo como la búsqueda del conjunto de variables contenidas en el vector \bar{x} que cumpla la condición expresada en (6).

$$\text{Minimizar (o Maximizar)} F = f(\bar{x}) \quad (6)$$

Sujeto a las condiciones descritas por (7) y (8).

$$g_j(\bar{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (7)$$

$$x_{i \min} \leq x_i \leq x_{i \max} \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

En las expresiones (6), (7) y (8) se omite el vector de parámetros \bar{p} dado que es invariante durante el proceso de optimización. La metodología de optimización descrita, permite plantear problemas de diversa índole. Para el caso de estructuras lineales de nodos articulados, se propone: a) el diseño óptimo "de menor peso" (o de menor volumen) de una celosía de tres barras solicitada por dos estados alternantes de carga (Figura 1a), y b) la configuración simétrica de peso mínimo de una armadura de puente solicitada por una carga que puede actuar en cualquiera de los nodos del cordón inferior de la misma (Figura 1b).

Para el caso (a) de la celosía, la alternancia de la carga P genera una simetría en el diseño que hace que existan solo dos variables de diseño que se almacenan en el vector $\bar{x} = (x_1, x_2)$ donde x_1 y x_2 representan las áreas de las barras indicadas en la Figura 1a. Los parámetros del modelo son: el peso específico [γ], el módulo de elasticidad [E], la longitud [L], la carga [P] y el esfuerzo admisible del material a tracción [s_M] que es constante en el proceso de optimización. Las condiciones o restricciones del problema son:

1. Esfuerzos admisibles:

A tracción: s_M

A compresión: $0.75s_M$

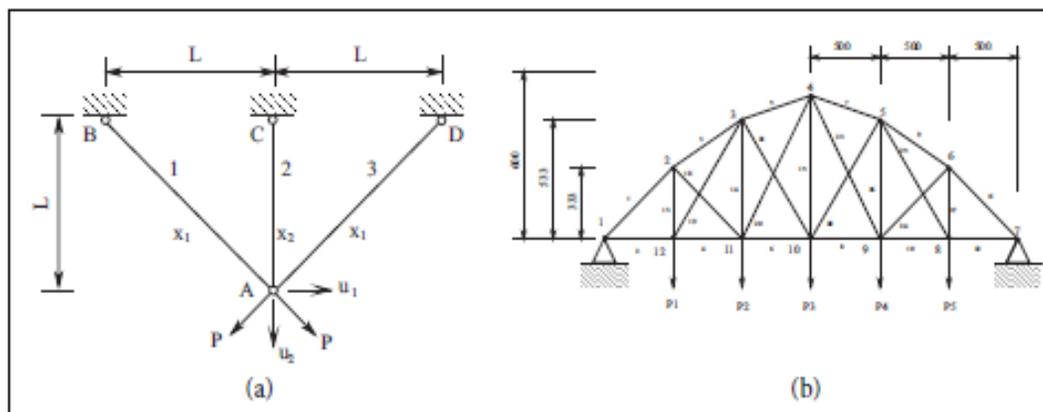


Figura 1. Casos de optimización. a) celosía de tres barras bajo cargas P alternantes. b) armadura de puente sujeta a carga móvil P.

Por su parte, las *condiciones de diseño* dependen de criterios de forma o técnicos y no se encuentran vinculadas al comportamiento resistente de la estructura. La mayoría de las veces sirven para limitar el campo de existencia de las variables de diseño y pueden representarse a través de (5).

$$\bar{x}_{\min} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_{\max} \quad (5)$$

También, el analista debe decidir qué característica desea perfeccionar u optimizar en el diseño y formularla analíticamente en términos de una función de la forma $F = f(\bar{x}, \bar{p})$ denominada *función objetivo*. A partir de estas consideraciones puede plantearse el problema de optimización o de diseño óptimo como la búsqueda del conjunto de variables contenidas en el vector \bar{x} que cumpla la condición expresada en (6).

$$\text{Minimizar (o Maximizar)} F = f(\bar{x}) \quad (6)$$

Sujeto a las condiciones descritas por (7) y (8).

$$g_j(\bar{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (7)$$

$$x_{i \min} \leq x_i \leq x_{i \max} \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

En las expresiones (6), (7) y (8) se omite el vector de parámetros \bar{p} dado que es invariante durante el proceso de optimización. La metodología de optimización descrita, permite plantear problemas de diversa índole. Para el caso de estructuras lineales de nodos articulados, se propone: a) el diseño óptimo “de menor peso” (o de menor volumen) de una celosía de tres barras solicitada por dos estados alternantes de carga (Figura 1a), y b) la configuración simétrica de peso mínimo de una armadura de puente solicitada por una carga que puede actuar en cualquiera de los nodos del cordón inferior de la misma (Figura 1b).

Para el caso (a) de la celosía, la alternancia de la carga P genera una simetría en el diseño que hace que existan solo dos variables de diseño que se almacenan en el vector $\bar{x} = (x_1, x_2)$ donde x_1 y x_2 representan las áreas de las barras indicadas en la Figura 1a. Los parámetros del modelo son: el peso específico $[\gamma]$, el módulo de elasticidad $[E]$, la longitud $[L]$, la carga $[P]$ y el esfuerzo admisible del material a tracción $[s_M]$ que es constante en el proceso de optimización. Las condiciones o restricciones del problema son:

1. Esfuerzos admisibles:
 A tracción: s_M
 A compresión: $0.75s_M$

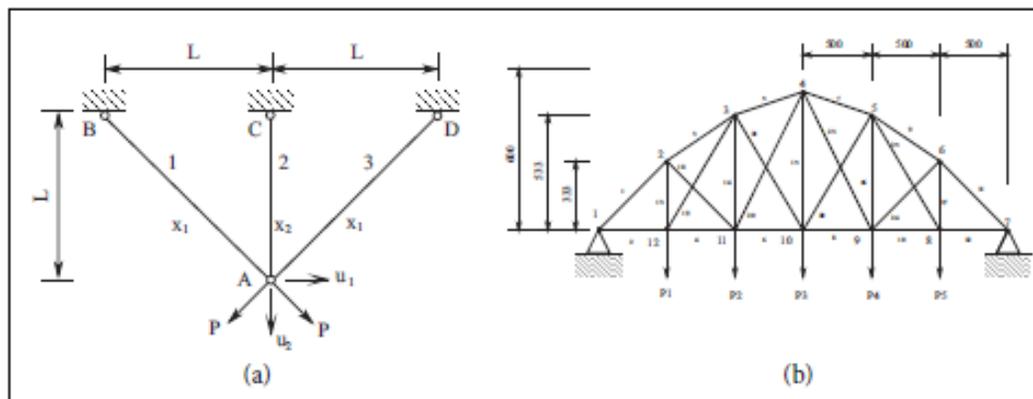


Figura 1. Casos de optimización. a) celosía de tres barras bajo cargas P alternantes. b) armadura de puente sujeta a carga móvil P.

2. Valores de las variables de diseño: $x_i \geq 0 \quad i=1,2$ que significa que las áreas deben ser positivas.

La solución teórica del problema de la celosía puede encontrarse empleando los planteamientos clásicos del análisis matricial para estructuras articuladas de donde se obtiene el sistema matricial (9) en función de los movimientos de los nudos.

$$\frac{E}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 + \sqrt{2}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ P \\ P \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Asimismo, los esfuerzos en las barras quedan representados por el sistema (10).

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.5}{x_1} & \frac{0.5}{x_1 + \sqrt{2}x_2} \\ 0 & \frac{1}{x_1 + \sqrt{2}x_2} \\ -\frac{0.5}{x_1} & \frac{0.5}{x_1 + \sqrt{2}x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ P \end{bmatrix} \quad (10)$$

De la ecuación matricial (10) se obtienen las expresiones para σ_1 , σ_2 y σ_3 ; y particularizando el esquema de optimización planteado en (6), (7) y (8) se obtiene el problema a solucionar, descrito en (11), (12), (13), (14) y (15).

$$\text{Minimizar } F = 2L\sqrt{2}x_1 + Lx_2 \quad (11)$$

Sujeto a:

$$g_1(\bar{x}) = \sigma_1 - \sigma_M = \frac{x_2 + \sqrt{2}x_1}{\sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2}} P - \sigma_M \leq 0 \quad (12)$$

$$g_2(\bar{x}) = \sigma_2 - \sigma_M = \frac{1}{x_1 + \sqrt{2}x_2} P - \sigma_M \leq 0 \quad (13)$$

$$g_3(\bar{x}) = -\sigma_3 - 0.75\sigma_M = \frac{x_2}{\sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2}} P - 0.75\sigma_M \leq 0 \quad (14)$$

$$-x_i \leq 0 \quad i=1,2 \quad (15)$$

La representación gráfica del problema se observa en la Figura 2.

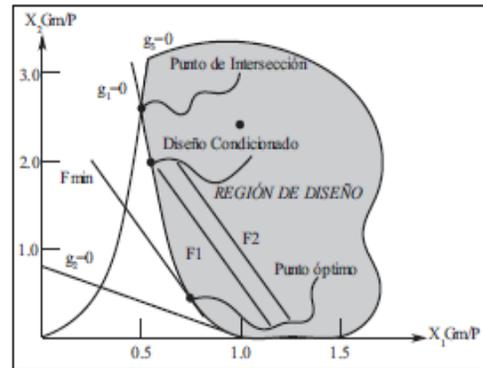


Figura 2. Representación gráfica del esquema de optimización del problema de optimización de volumen de una celosía de tres barras sujeta a cargas alternantes P.

Cada una de las condiciones $g_j(\bar{x}) \leq 0$ determina una porción del espacio donde puede estar la solución. La intersección de todas las condiciones determina la región de diseño. Un punto \bar{x} que pertenezca a esta región es un diseño válido y es no válido si no pertenece o está fuera de ella. Los puntos situados dentro de la región se denominan diseños incondicionados y son condicionados cuando se sitúan en una curva frontera $g_j(\bar{x}) = 0$ ó en la intersección de varias de ellas. Las condiciones que cumplen $g_j(\bar{x}) = 0$ se denominan activas y pasivas en caso contrario. Pueden existir condiciones que estén situadas fuera de la región de diseño y en tal caso puede prescindirse de ellas ya que no son relevantes en el proceso de optimización. Sin embargo, esta situación es difícil de identificar en problemas de muchas variables. Los diferentes valores de la función objetivo originan curvas F1, F2 como se muestra en la Figura 2, en este caso se trata de líneas rectas, sin embargo, la función objetivo en general puede ser no lineal.

Ahora bien, en el análisis y diseño de armaduras de puentes toman considerable importancia las cargas móviles impuestas por los vehículos. Por esto, el caso (b) es una armadura de puente solici-

tada por una carga de 30 ton que puede actuar en cualquiera de los nudos del cordón inferior. En el problema, los parámetros son: el peso específico $[\gamma]$, el módulo de elasticidad $[E]$, la carga $[P]$ y se requiere obtener la configuración simétrica de peso mínimo sujeta a las condiciones (16), (17) y (18) (Pedersen, 1972).

$$\text{Minimizar } F = \sum_{i=1}^{25} \gamma x_i L_i \quad (16)$$

Sujeto a:

$$-1.04 \text{ ton/cm}^2 \leq \sigma_i \leq 1.3 \text{ ton/cm}^2 \quad i=1, \dots, 25 \quad (17)$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1, \dots, 25 \quad (18)$$

3. Resultados

El diseño óptimo para el caso (a) de la celosía de tres barras se obtiene para un valor F de la función objetivo tal que los valores menores de las variables de diseño pertenezcan a una curva frontera $g_j(\bar{x}) = 0$ (punto óptimo). En este caso la solución corresponde a una tangente a la condición $g_1(\bar{x}) = 0$ en el punto óptimo. La solución se describe en (19) y (20):

$$x_1 = 0.788 \frac{P}{\sigma_M} \quad (19)$$

$$x_2 = 0.408 \frac{P}{\sigma_M} \quad (20)$$

Al reemplazar los valores de x_1 y x_2 en la función objetivo (11) se obtiene la ecuación (21).

$$F = 2.639L \frac{P}{\sigma_M} \quad (21)$$

Las expresiones (22) y (23) para los desplazamientos u_1 y u_2 respectivamente, pueden obtenerse de (9).

$$u_1 = \frac{PL}{Ex_1} \quad (22)$$

$$u_2 = \frac{PL}{E(x_1 + \sqrt{2}x_2)} \quad (23)$$

Planteado en su totalidad el esquema de optimización para el problema de la celosía, basta tomar el vector de parámetros \bar{p} y reemplazarlo en las ecuaciones (19) a (23) para obtener los resultados del problema optimizado. $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (\gamma, E, L, P, \sigma_M) = (7.85E-06, 2100, 100, 20, 3.6)$ donde $[\gamma]$ está expresado en ton/cm³, $[E]$ en ton/cm², $[L]$ en cm, $[P]$ en ton y $[\sigma_M]$ en ton/cm².

El escenario de optimización queda representado por el vector de variables de diseño

Validación Optimización en Excel						
G_M	3,6					
P	20					
L	100					
X_1	X_2	$X_1 * Gm/P$	$X_2 * Gm/P$	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3
4,381	2,269	0,789	0,408	8,6483E-07	-0,96491119	-1,73508795
F	1466,088					
$F * Gm / (P * L)$	2,639					

Figura 3. Validación del problema de optimización de volumen de la celosía de tres barras sujeta a cargas alternantes P

$\bar{x} = (x_1, x_2) = (4.378, 2.267) \text{ cm}^2$, el valor de la función objetivo $f = 1466.111 \text{ cm}^3$ y el vector de variables de respuesta $u = (u_1, u_2)^T = (0.218, 0.126) \text{ cm}$.

Al emplear la toolbox Solver de Excel se validan los resultados. La Figura 3, presenta el desarrollo del problema haciendo uso de la herramienta.

Un modelo de mismas características desarrollado en el programa de elementos finitos Ansys corrobora los resultados encontrados. El elemento empleado corresponde al elemento LINK1 de la librería de elementos del programa el cual está definido por dos nodos y dos grados de libertad por nodo. En Ansys es posible emplear dos métodos de optimización, el más complejo pero también el más exacto es el de primer orden, usado para este modelo. El número máximo de iteraciones empleado fue 20. La Figura 4 presenta la evolución de la convergencia de la función objetivo que se desarrolla sin oscilaciones. Se observa que el descenso de la pendiente es acelerado desde las primeras iteraciones. Las iteraciones finales revelan un esfuerzo de acercamiento al volumen óptimo de 1470.3 cm^3 . La familia de curvas de la Figura 5 muestra un comportamiento de la convergencia de las variables de diseño muy similar al de la función objetivo (Area1 óptima = $4,3857 \text{ cm}^2$, Area2 óptima = 2.2988 cm^2). Las Figuras 6

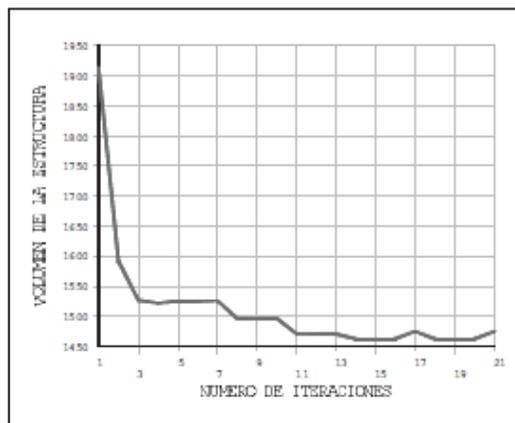


Figura 4. Convergencia función objetivo

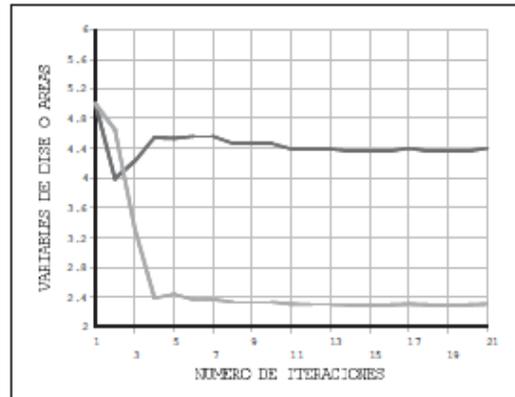


Figura 5. Convergencia de las variables de diseño

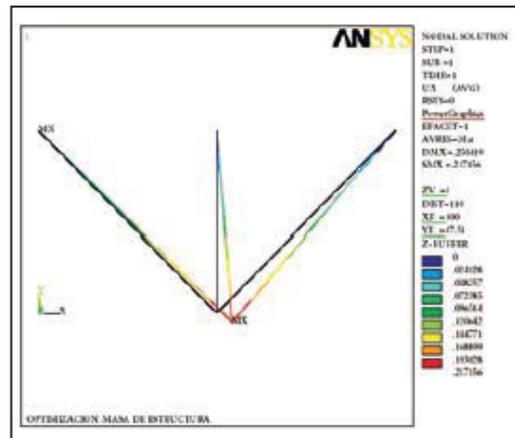


Figura 6. Isocontornos de desplazamiento en X.

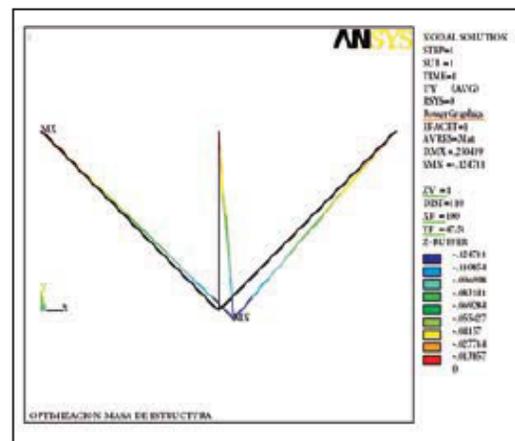


Figura 7. Isocontornos de desplazamiento en Y.

y 7 presentan los resultados de desplazamiento horizontal y vertical de la celosía, respectivamente. Se aprecia que el nodo inferior se desplaza horizontalmente 0.217156 cm y verticalmente 0.124711 cm.

En la tabla 1 se comparan los resultados del esquema de optimización obtenido por la vía del modelado en Ansys® y la solución teórica. Se observa una correspondencia importante en los resultados.

Tabla 1. Comparación de resultados

	Sol teórica	Ansys®
Desp. Horiz. nodo inferior (cm)	0.218	0.217
Desp.Vert. nodo inferior (cm)	0.126	0.125
Volumen óptimo (cm³)	1466.111	1470.300
AREA1	4.378	4.386
AREA2	2.267	2.299

El diseño óptimo para el caso (b) de la armadura de puente para carga móvil P=30 ton se obtiene implementando un modelo en Ansys®. El número máximo de iteraciones definido para resolver el problema es 50. El vector de parámetros $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3) = (\gamma, E, P) = (7.85E - 06, 100, 30)$, donde $[\gamma]$ está expresado en ton/cm³, $[E]$ en ton/cm² y $[P]$ en ton. La Figura 8 muestra la discretización del modelo, la Figura 9 presenta la evolución de la convergencia de la función objetivo la cual se desarrolla escalonadamente en las primeras 23 iteraciones con una aproximación al peso óptimo (1.933 ton) en las posteriores iteraciones. La familia de curvas de la Figura 10 denota un comportamiento irregular de la convergencia de las variables de diseño, sin embargo después de la iteración 32 alcanzan el refinamiento de la solución. La Figura 11 muestra la solución del volumen optimizado para la discretización; se aprecia que buena parte del volumen se concentra en el arco resistente de la estructura.

En la tabla 2 se presenta la solución de referencia obtenida mediante una serie de programas lineales (Pedersen, 1972).

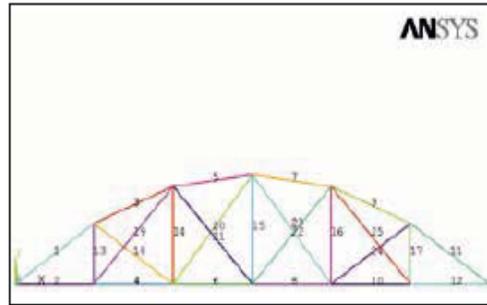


Figura 8. Discretización del modelo

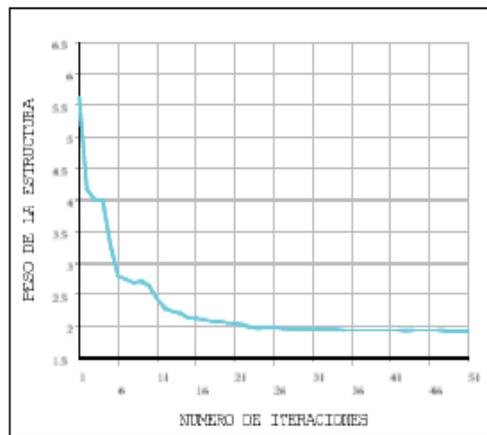


Figura 9. Convergencia de la función objetivo

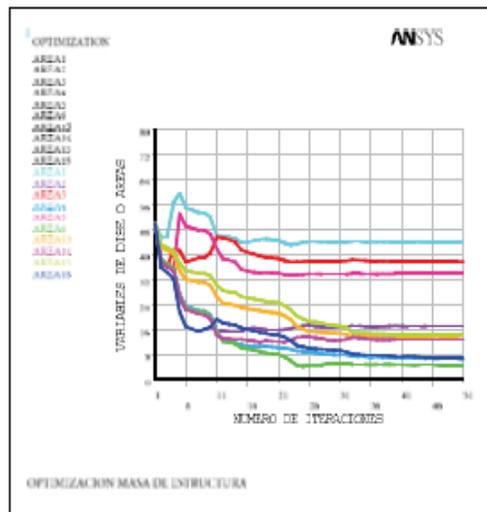


Figura 10. Convergencia de las variables de diseño

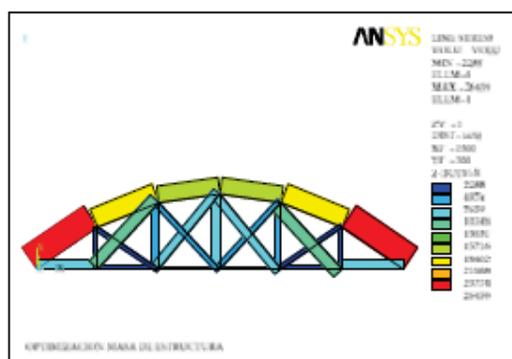


Figura 11. Volumen optimizado por elementos

Tabla 2. Solución de Pedersen. Variables de diseño

Barra	Área (cm ²)	s (ton/cm ²)
1	43.37	-1.04
2	16.55	1.30
3	36.38	-1.04
4	6.07	1.30
5	33.17	-1.04
6	3.87	-1.04
13	11.90	1.30
14	12.13	1.30
15	13.15	1.30
18	5.95	-1.04
19	16.40	1.21
20	10.85	1.30
21	6.81	1.30

Al tomar el vector de parámetros \bar{p} y el vector de variables de diseño $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_2)$ cm² y remplazarlo en la ecuación (16) se obtiene un peso mínimo $F_{min} = 1.868$ ton. El valor de peso óptimo obtenido por la vía del modelado en Ansys^s es de 1.933 ton.

En la Tabla 3 se presentan los resultados del esquema de optimización obtenido por la vía del modelado en Ansys^s. Se observa una correspondencia importante con los resultados de la solución de referencia de la Tabla 2.

Existe un buen grado de aproximación por las dos vías. Las variaciones se deben fundamentalmente

a la diferencia entre los métodos de solución, los fenómenos de propagación de error, los errores inducidos por la malla de elementos finitos, entre otros. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el problema de optimización es altamente no lineal por la condición de variabilidad de la posición de la carga y la envolvente de esfuerzos máximos y mínimos que debe hallarse para cada ciclo de la solución.

Tabla 3. Solución de Ansys^s

Barra	Área (cm ²)	s (ton/cm ²)
1	44.05	-1.02
2	17.07	1.25
3	37.66	-1.01
4	6.54	1.25
5	33.86	-1.02
6	4.58	-0.94
13	12.86	1.25
14	12.85	1.23
15	14.38	1.21
18	6.83	-0.99
19	16.3	1.18
20	11.07	1.25
21	6.99	1.24

4. Conclusiones

La optimización del diseño representa una herramienta de competitividad extremadamente eficiente para las empresas dedicadas al diseño de maquinaria e infraestructura dada la gran variedad de posibilidades de optimizaciones flexibles y adaptables por medio de la parametrización de modelos. Es importante tener en cuenta que cuando se resuelve un problema por elementos finitos o cualquier otra técnica numérica siempre se obtienen soluciones aproximadas que deben ser evaluadas con criterio ingenieril.

En cuanto a los casos estudiados se concluye que las soluciones numéricas muestran confiabilidad y adaptabilidad a problemas complejos que pueden ser muy útiles en la práctica para obtener

ahorros importantes en el diseño y construcción final de estructuras. En el caso de la armadura de puente se entiende que una decisión importante de diseño es concentrar buena parte del acero en el arco resistente ya que en este se ubican las fuerzas axiales más altas. También puede notarse que la solución óptima en el puente tiende a uniformizar el valor absoluto de los esfuerzos en las barras.

5. Referencias Bibliográficas

1. Ansys User Manual, V11, Swanson Analysis Systems, Inc. Houston.
2. Cosmos/M, 2012, Structural Research and Analysis Corporation. Optstar.
3. Oñate, E., 2011, Cálculo de Estructuras por El Método de Elementos Finitos, Cimne. Barcelona.
4. Pedersen, P., 1972, On the Optimal Layout of Multi-Purpose Trusses, *Comput. Struct.* Vol. 2, Denmark, pp 695-712.
5. Schmit, L., 1980, Structural Design by Systematic Synthesis, Second Conference on Electronic Computation, Asce, Pittsburgh, pp105-132.
6. Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., 2010, El Método de Los Elementos Finitos, Cimne. Barcelona. 890 pp.