EL ALGEBRA GEOMETRICA DE EUCLIDES. UNA EXPERIENCIA EN LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA[1]

Joaquín Delgado Fernández[2]
Universidad Autónoma Metropolitana de México

Cristianne Butto Zarzar[3]
Universidad Pedagógica Nacional Ajusco - México.
México, D. F.

Fecha de Recepción: Agosto 19, 2015
Fecha de Aprobación: Diciembre 12, 2015

Resumen

Se reporta un estudio sobre el álgebra geométrica de Euclides presente en la historia de las matemáticas, y se toma como base para el diseño de una secuencia didáctica dirigida a la identificación de expresiones algebraicas simples, tales como propiedad distributiva, cuadrado de un binomio y ecuación cuadrática. La perspectiva teórica se fundamenta en la propuesta de Jankvist sobre la historia como instrumento, y se usa en un sentido histórico-genético. La fase experimental se realizó con estudiantes de primer año de bachillerato de una escuela pública del Estado de Morelos, México. Las etapas del estudio incluyen: a) aplicación de un cuestionario inicial, b)secuencia didáctica seguida de una entrevista clínica individual, c) cuestionario final. Los resultados muestran que los estudiantes logran identificar la ley distributiva como conservación del área. la entrevista clínica muestra que en algunos casos los estudiantes identifican la fórmula binomial como la suma de las áreas de los rectángulos que componen un cuadrado, aunque no expresan completamente su pensamiento en términos algebraicos.

Palabras clave: Historia de la matemática, álgebra geométrica de Euclides, método de aplicación de las áreas.

EUCLID´S GEOMETRIC ALGEBRA: AN EXPERIENCE IN THE TEACHING OF THE ALGEBRA.

Abstract

A study based on Eculid's geometric algebra is presented and a didactical sequence is presented where students identify simple algebraic expressions, such as the distributive law, the square of a binomial and solution of the quadratic equation. Our theoretical framework is based on Jankvist's proposal where history of mathematics is used as in a historical-genetic purpose. The experimental phase was conducted with students of the first year of a public school of the Preparatory level, located in the State of Morelos in México. The stages of the study include: a) application of an initial questionnaire, (b) didactical sequence supported with ad hoc clinical interview and, c) final questionnaire. Our results show that students are able to identify the distributive law as a conservation of area. Clinical interview shows that in some cases students identify the binomial formula as the sum of areas of rectangles composing a square, although they do not express completely their thinking in algebraic terms.

Keywords: History of mathematics, algebra Euclidean geometry, method of application areas.

How to cite/Cómo citar:
Delgado, J. y Butto, M. (2015). El álgebra geométrica de Euclides. Una experiencia en la enseñanza del algebra. Revista Horizontes Peagógicos, 17(2), 53-64.

---

1 Artículo derivado de la investigación: El pensamiento algebraico. Experiencias en el salón de clase. Realizada en la Universidad Autónoma de Morelos - México.

2 Docente investigador doctorado en Ciencias Matemáticas. Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Cntacto:jdf@xanum.uam.mx" jdf@xanum.uam.mx.

3 Profesora titular Universidad Pedagógica Nacional - Ajusco- México - Doctora en Ciencias con especialidad en Matemáticas. Contacto:cristianne_butto@hotmail.com.
Doctorado en ciencias con especialidad en matemática educativa.

INTRODUCCIÓN

La transición de la aritmética al álgebra es un paso fundamental para acceder a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolares. Sin embargo, una de las dificultades que la mayoría de los estudiantes presentan al iniciarse en el estudio del álgebra obedece a que ésta ha sido vista como una transición lineal, como una extensión de los cálculos numéricos al cálculo algebraico este contenido matemaadas; usualmentematico se enseñan, por lo general, a partir álculo literal; esto se debe en parte a que este contenido matemático se enseña, por lo general, a partir de fuentes de significados limitadas, usualmente, se toma como base el dominio numérico, dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, por ejemplo, el geométrico.

Por otra parte, algunos acercamientos al álgebra que buscan otros puntos de partida como la noción de número racional, si sólo se limitan a considerar significados como la relación parte-todo, pueden resultar insuficientes para la transición hacia conceptos más abstractos como los de relación funcional y relación entre variables (Gnedenko y Markushevich citados en Bodanski, 1991).

El acercamiento más tradicional empieza por enseñar la sintaxis algebraica, dándole énfasis a sus aspectos manipulativos. En ese abordaje se empieza por enseñar el trabajo con expresiones y ecuaciones y al final se resuelven problemas, aplicando este contenido sintáctico del álgebra.

En relación a las dificultades enfrentadas por los alumnos con dicho acercamiento, la principal crítica es que se les introduce a un simbolismo desprovisto de significado y de sentido, siendo que los estudiantes vienen de trabajar con la aritmética, donde todos los símbolos tienen referentes que les son significativos, y en donde los contextos de los problemas determinan mucho la manera de resolverlos.

En respuesta a críticas como las anteriores, varios estudios han investigado dicha transición desde diferentes perspectivas: ***desde la aritmética generalizada*** (Mason, 1985), ***desde la evolución por rupturas*** (Filloy & Rojano 1989); ***desde la reificación*** (Sfard y Linchesvski, 1994; Kaput y Blanton, 2000), por citar algunos; y han evidenciado los obstáculos que necesitan superarar los estudiantes para acceder a las nociones del álgebra.

Autores como Booth (1984), Kieren (1980), Mason et al (1985), Filloy y Rojano (1985) señalan que los estudiantes suelen usar métodos algebraicos para resolver problemas de enunciado, con dificultades para comprender y manejar conceptos propios del álgebra (incógnita, número general y variable), así como para comprender que las operaciones en álgebra pueden no llegar a un resultado numérico y que a la larga pueden quedar como operaciones suspendidas. Estos estudios evidenciaron, además, que un bagaje exclusivamente aritmético puede resultar un obstáculo para el aprendizaje del álgebra (véase, Filloy y Rojano, 1985). En este sentido, algunos autores afirman que para el desarrollo del pensamiento algebraico es imprescindible que los alumnos puedan pensar y percibir la simbología y las operaciones aritméticas de manera distinta a la que se cultiva tradicionalmente en la escuela primaria, para que sobre ese nuevo modo de pensamiento aritmético puedan construir las nociones básicas del álgebra.

De acuerdo con Kieran (1992) la investigación en álgebra se ha centrado en los términos literales y en la simplificación de las expresiones, ecuaciones, resolución de ecuaciones, problemas de palabras, funciones y gráficas, y en el uso de la computadora. En lo que respecta a los términos literales y expresiones, los problemas de reconocimiento de limitaciones estructurales en aritmética pueden llevar a los mismos problemas en álgebra ($a+b-c \neq a-b+c$; Booth, 1984), y a dificultades en el reconocimiento de la relación entre las operaciones: hallar * en (235 + *) = (697- 122). La habilidad de descubrir bien un método en forma verbal no implica una simbolización correcta: dar el área del rectángulo cuyos lados miden 7 y f =3. Se obtienen respuestas del tipo 7f3, f21, f + 21 (Booth, 1984). Otros estudios muestra dificultades para discriminar diferentes formas de utilizar literales con distintos grados de asimilación, tales como evaluar una literal o ignorarla. También, el uso de literales se presta a la ***polisemia***: considerar la literal como objeto concreto, como incógnita, como número generalizado, como variable. También es necesario transformar expresiones en ecuaciones: no es posible asignar valores a la expresión a+3, porque faltan el signo igual y el lado derecho de esa expresión (Kieran, 1981). En lo que respecta a la simplificación de expresiones, diversos autores señalan la problemática en los procedimientos tales como ***argumentos*** circulares, factorizar y volver a expandir la sobre generalización: ***39x-4=35x; 2yz-2y =z***. Sobre la sintaxis algebraica: ¿Por qué ***2a+a+5*** es igual a ***3a+5***, en tanto que $a+a+a^2$ es distinto de $3a^2$? En materia de resolución de ecuaciones, las dificultades se centran en las diferentes interpretaciones del símbolo "=", incluyendo propiedades de simetría y transitividad (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980). En la ***evolución por rupturas*** (Filloy y Rojano, 1989), las ecuaciones de tipo ***ax+b = c*** se puede resolver por métodos aritméticos en tanto que la ecuación *ax+b = cx+d* requiere genuinos desarrollos algebraicos; por ejemplo, en el siguiente problema, equivale formalmente a resolver la ecuación ***ax+b =cx:***

> Una persona tiene un terreno de dimensiones A por X. Luego adquiere un terreno adyacente cuya área es B metros cuadrados; otra persona le propone intercambiar este terreno por otro ubicado en la misma calle, con la misma área total y la misma profundidad del terreno inicial, pero con una mejor forma. Cual debe ser la profundidad del terreno de manera que el negocio resulte provechoso?

MARCO TEÓRICO

La pertinencia de estudiar la Historia de la Matemática ha sido enfatizado ya por varios autores. En la escuela inglesa, por ejemplo, el Presidente de la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia, J.W.L. Glaisher (1848-1928), afirmó, en 1890, en su discurso inaugural de la Asociación: "ninguna disciplina pierde más que la matemática al intentar disociarse de su historia". El último de los universalistas, H. Poincaré (1854-1912), sostuvo en semejantes términos: "si queremos prever el futuro de las matemáticas, nuestro curso apropiado es estudiar la historia y el estado actual de la ciencia." Esta relevancia de la historia en la enseñanza de las matemáticas ha sido ya resaltada por varios autores (Flauvel, 1991; Jankvist, 2009) y aunque en los setenta hubo un gran consenso internacional –que tuvo como consecuencia la conformación de al menos dos grupos de estudio: la Comisión INTER-IREM Épistemologie et Histoire des Mathématiques en Francia, y el Grupo Internacional de Estudio sobre la Relación entre la Historia y la Pedagogía de las Matemáticas (HPM), relacionado con el ICMI– el impacto del campo de la Historia de la Matemática en la Investigación Educativa, así como en la práctica educativa parece poco, sino es que nulo (Furinghetti y Radford, 2002). En relación con el uso de la Historia de la Matemática en la enseñanza, Jankvist y Kjeldsen (2011), distinguen entre la historia como meta y la historia como herramienta; en esta última acepción, la historia constituye un medio, una ayuda en la enseñanza-aprendizaje de ideas, conceptos, algoritmos, pruebas, argumentaciones en la matemática.

Jankvist (2009) propone un marco teórico a partir de la revisión extensa de la bibliografía de por qué y cómo usar la historia en la enseñanza y aprendizaje de la matemática ("whys" and "hows"), resumidos en la obra citada, con los siguientes argumentos:

1. *La historia como instrumento*. Los argumentos en esta clasificación van dirigidos a apoyar el aprendizaje y la enseñanza de la matemática: en el aspecto motivacional van desde mantener el interés de los estudiantes en el tema hasta presentar la matemática con una cara más humana y quizá menos aterradora; a menudo, ciertas partes de la matemática donde la humanidad ha tenido dificultades presentan también dificultades para los alumnos en el presente; pero a partir de enfrentarlas, los alumnos pueden obtener algún confort. Más allá de este tipo de argumentos, en esta categoría se incluyen otros argumentos en los que la historia puede constituir un soporte cognitivo; por ejemplo, al proveer un punto

de vista diferente o modo de presentación, es posible mejorar el aprendizaje y la enseñanza de la matemática. También se argumenta que la fenomenología histórica puede preparar el desarrollo de una trayectoria de aprendizaje hipotética, o que la historia puede ayudar a mirar con los ojos de los alumnos. Brousseau (1997, p. 96) señala que en esta clasificación es pertinente señalar que la historia no se debe usar sin modificaciones; la idea es recurrir a argumentos históricos con el fin de escoger la génesis del concepto. En esta misma categoría se incluyen argumentos ***evolutivos***, que sostienen que no puede haber aprendizaje de las matemáticas sin historia. El argumento recapitulativo resume este enfoque: "Para realmente dominar la matemática, la mente debe pasar por las mismas etapas por las que la matemática ha pasado durante su evolución".

2. *La historia como una meta*. En esta categoría de argumentos se sostiene que aprender aspectos de la historia de la matemática sirve como propósito en sí mismo; este enfoque estudia los aspectos evolucionarios como disciplina.

En la categorización de los "cómo" o maneras de usar la historia de la matemática, el mismo autor (Jankvist, 2009) propone las siguientes categorías de maneras de usar la historia:

a. Aprender la historia proveyendo al alumno de información histórica directa; en esta modalidad se proporciona información factual aislada o se llevan cursos o libros completos de historia.

b. Aprender tópicos matemáticos, siguiendo un enfoque de enseñanza y aprendizaje inspirado por la historia; este enfoque genético distingue dos modalidades: a) el principio histórico-genético, que tiene como fin conducir a estudiantes líderes, de un conocimiento básico a uno complejo y, b) el principio psicológico-genético en el que los alumnos redescubren o reinventan la matemática a partir de sus habilidades y entornos.

c. Despertar una consciencia más profunda, tanto de la matemática como del contexto cultural y social de su desarrollo.

El presente estudio se sitúa en el marco teórico de Jankvist, que usa la historia como instrumento, en un sentido histórico-genético, aunque sin aplicación explícita de la información histórica directa a los alumnos, pero sí a los profesores como parte de su entrenamiento.

El álgebra geométrica de Euclides

Tomamos un episodio de la historia de la matemática que se conoce comúnmente como el álgebra geométrica, detallada en el Libro II de los *Elementos* de Euclides. El método de aplicación de las áreas se debe a los pitagóricos, compendiado por Euclides; se introduce este método en los elementos Volumen I, Proposiciones 45 y 46; y extensamente en el Volumen II, principalmente en las Proposiciones 1 a 14. En el método de aplicación de las áreas se da un segmento de recta, y un área (cuadrilátero, triángulo, circunferencia), se pide construir un segmento de longitud igual al área dada. Si este segmento es: a) igual al primero, se dice que el área se aplica sobre el segmento; b) menor al primero, se dice que se queda corto; c) mayor al primero, se dice que se excede. Posteriormente Apolonio retoma la nomenclatura en la presentación de sus cónicas: p*arábola (paraballeiv), elipse (elleipeiv), hipérbola (uperballeiv)*.

El álgebra geométrica, de Euclides, contiene la prueba geométrica de las siguientes propiedades algebraicas:

1. $a(b+c+d+...)=ab+ac+ad+...$
2. $(a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2$
3. $(a+b)a=ab+a^2$
4. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
5. $ab+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

6. $$a(a-b)=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

7. $$a^2+b^2=2ab+(a-b)^2$$

8. $$4ab+(a-b)^2=(a+b)^2$$

La primera identidad es la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; se enuncia en términos geométricos en la *Proposición 1,* como propiedad de adición de áreas de rectángulos:

> *"Si hay dos líneas rectas, y una de ellas es cortada en cualquier número de segmentos, el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta no cortada y cada uno de los segmentos".* En la *Proposición 4* se enuncia la "ley del binomio al cuadrado" como sigue:

> "Si una línea recta se corta al azar, entonces el cuadrado sobre el todo es igual a la suma de los cuadrados sobre los segmentos más dos veces el rectángulo contenido por los segmentos".

Objetivos del estudio

1. Explorar los conocimientos previos de los estudiantes sobre la determinación de áreas rectángulos y combinaciones de éstos.
2. Investigar la factibilidad de una secuencia didáctica basada en el álgebra geométrica de Euclides.
3. Investigar las representaciones algebraicas de las relaciones entre áreas.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de corte cualitativo, pues asume que los fenómenos ocurren durante el proceso de enseñanza y aprendizaje como un conjunto de diversas variables a considerar desde una visión más dinámica. Se propuso comprender los procesos, significados y la naturaleza social del proceso, en este caso los procesos y significados que los estudiantes elaboraron alrededor de ideas matemáticas exploradas en el cuestionario inicial y en la secuencia didáctica.

La investigación cualitativa se fundamenta en una perspectiva interpretativa, es decir, busca comprender el significado de las acciones -en este caso- de los estudiantes que participaron en este estudio. Además, se debe subrayar que en este tipo de estudios no se pretende generalizar los fenómenos; sólo se busca describir y explicar las características de la población estudiada. Por otro lado, permite la participación del investigador de una forma más cercana, es decir, interactiva con los fenómenos a ser estudiados.

Con base en todo lo anterior, se optó por este tipo de estudios, pues proporciona una mirada distinta sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje; además, permite describir los fenómenos que se llevan a cabo dentro del salón de clases.

Participantes

Participaron en el estudio once alumnos del primer año de bachillerato de una escuela pública del Estado de Morelos; México.

Etapas del estudio

El estudio constó de consta de dos etapas: cuestionario inicial, seguido de entrevista clínica individual, secuencia didáctica y cuestionario final.

Cuestionario inicial

El cuestionario inicial exploró si los alumnos podían expresar una relación entre áreas de cuadrados y rectángulos en forma algebraica. Se exploraron otros conocimientos: a) relaciones lineales por partes: decidir entre dos planes tarifarios de renta de teléfono celular; b) seleccionar entre varias relaciones lineal, potencial o exponencial, cuál describe mejor los datos de una tabla talla-edad, en base el cálculo de cocientes de incrementos que permanezcan constantes, pero que no se reportan en este estudio. Concretamente, se plantearon los siguientes problemas exploratorios referentes al cálculo de áreas (la respuesta esperada se muestra en simbología algebraica y no forma parte de la pregunta):

1. *Expresa la suma de áreas como el área de un cuadrado:* $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$

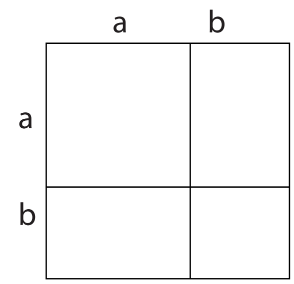

Figura 1. *Creación propia*

2. Expresa la relación entre las áreas de los rectángulos sombreados:

$$a(a+b) + b^2 = a^2 + b(a+b)$$

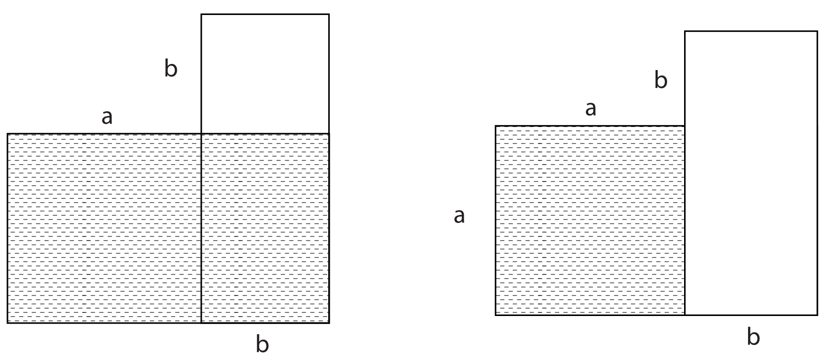

Figura 2. *Creación propia*

El siguiente problema exige plantear la ecuación $ax + 5a = 250$ y reconocer que $a = x$ para plantear la ecuación cuadrática $x^2 + 5x = 250$ entre dimensiones desconocidas de un terreno de fondo ***a*** y frente ***x***.

3. Un señor compró primero un terreno cuadrado de lado "x", después compró un terreno de 5 m de frente y del mismo lado que el primero. Si en total tiene 250 m[2], escribe el total de sus terrenos.

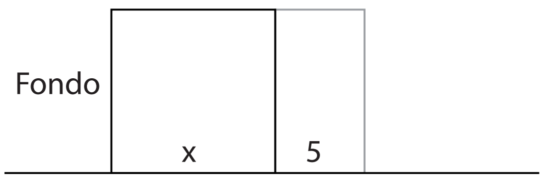

Figura 3. *Creación propia*

Entrevista clínica individual

Una semana después de aplicar las evaluaciones, se realizaron en dos sesiones de trabajo entrevistas clínicas individuales de corte piagetano (Delval, 2000), con el objetivo de indagar cómo los alumnos habían resuelto los problemas sobre procesos de generalización del cuestionario inicial; cada entrevista duró aproximadamente entre 40 y 60 minutos. Este tipo de entrevistas permite investigar cómo piensan, perciben, actúan y sienten los estudiantes que tratan de descubrir aquello que no resulta evidente en lo que los sujetos hacen o dicen, esto es, aquello que está por debajo de la apariencia de su conducta, ya sea en acciones o con palabras.

Secuencia didáctica

Para el diseño de la secuencia didáctica se incluyeron preguntas de reconocimiento de lados faltantes en cuadrados y rectángulos (incluyendo rotaciones) y se solicitó contar la totalidad de cuadrados y rectángulos en figuras compuestas, como se muestra en las siguientes preguntas:

1. Marca con una, R todos los rectángulos que veas, y con una C todos los cuadrados

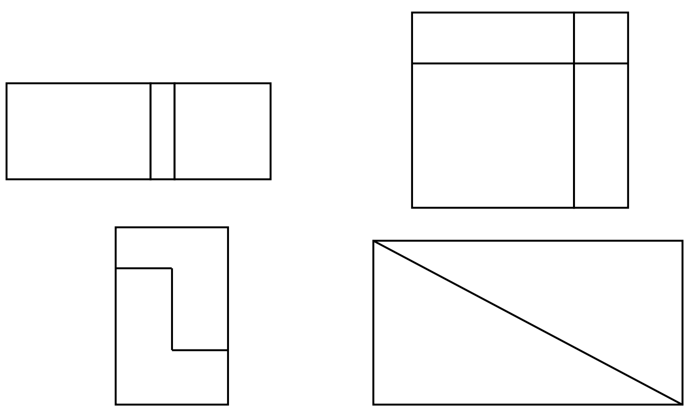

Figura 4. *Creación propia*

2. Calcula las áreas de los cuadrados y rectángulos. Marca los que sean iguales con el mismo símbolo.

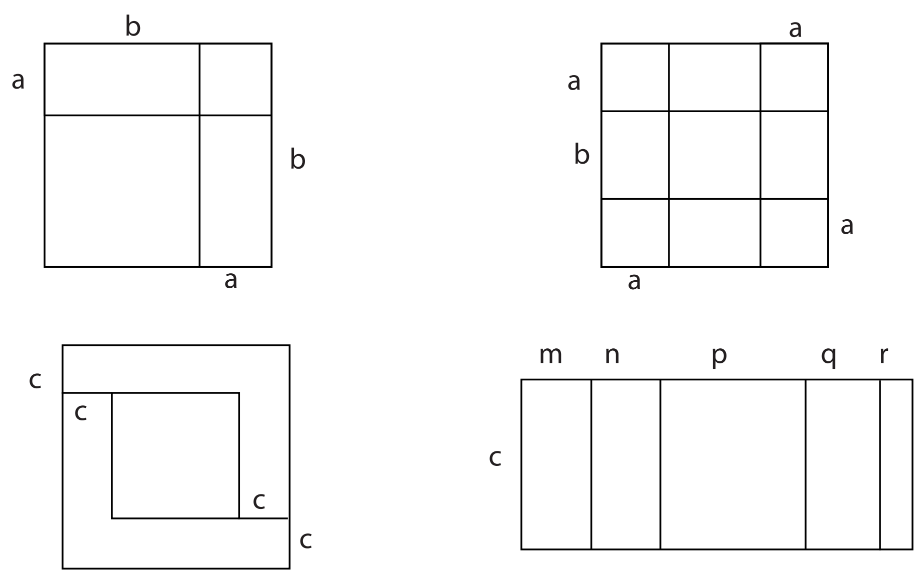

Figura 5. *Creación propia*

RESULTADOS

En el problema tres del cuestionario inicial se observó dificultad al reconocer el lado faltante del cuadrado ($a = x$), de modo que en el cuestionario final el problema se replanteó dando explícitamente la información a = x; en cambio, debían reconocer el lado que falta. Matemáticamente se puede expresar como $a = x$ y $y = x$ con $ay + 5a = 250$ para obtener $x^2 + 5x = 250$. Además, la dificultad observada, en el cuestionario inicial, para reconocer rectángulos en figuras compuestas, fue subsanada marcando explícitamente las áreas involucradas; con ello, las parejas de nivel conceptual medio-bajo consiguieron dar respuestas que permitieran su análisis.

1. Un señor compró primero un terreno cuadrado de lado "x", después compró un terreno de 5 m. de frente y del mismo fondo que el primero. Si el total es de 2500 m^2 , encuentra el lado "x".

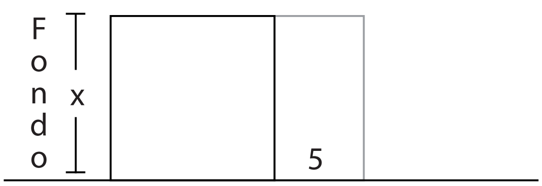

Figura 6. *Creación propia*

Se presenta el análisis de las respuestas de los alumnos de acuerdo con la clasificación inicial. Llamamos áreas simples a aquellas que son fácilmente identificables como constituyentes de una figura, y áreas compuestas a aquellas formadas por áreas simples. Los alumnos del nivel medio-bajo logran establecer fórmulas para las áreas simples a^2, b^2, ab y consiguen plantear expresiones para áreas compuestas tales como $(a+b)(a+b)$, pero escriben expresiones algebraicamente incorrectas como $(a+b)(a+b) = a^2+b^2$, como lo muestra –en la figura– el siguiente extracto de la tarea correspondiente al problema 2 de la secuencia didáctica:

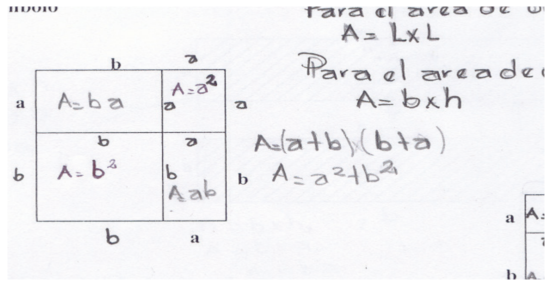

Figura 7. *Creación propia*

El siguiente ejemplo es ilustrativo, pues descubre posterior a la entrevista clínica que muchos de los resultados son correctos, aunque no la manera de representarlo en notación algebraica. En la actividad se pide identificar los cuadrados y rectángulos que componen un cuadrado, así como sus áreas y el total (ver Figura 8).

En la respuesta que da la pareja de nivel conceptual medio se puede observar lo siguiente:

- Distingue los tres cuadrados (de lados ***a, b*** y ***a+b***)
- Cuenta seis rectángulos: incluye los cuadrados en los rectángulos y distingue rectángulos compuestos (de lados ***a*** y ***a+b***).
- Encuentra las áreas de los dos cuadrados menores (a^2 y b^2) y aunque reconoce que el mayor es un cuadrado, calcula erróneamente su área: $(a+b)(a+b)=2a+2b$
- Encuentra correctamente las áreas del rectángulo de altura ***a*** y base ***a+b***, aunque usa la notación de yuxtaposición para indicar suma: ***ab*** equivale a ***a+b***. Su respuesta:

$(b)(ab)=ab+b^2$, posterior a la entrevista clínica, muestra que debe interpretarse como

$$(b)(a+b)=ab+b^2$$

El alumno ha usado ya la propiedad conmutativa, pues en vez de escribir ***ba***, usa ***ba=ab***. Esto se corrobora en sus respuestas a las áreas de los rectángulos faltantes: *(b)(a)=ab*, *(a)(b)=ab*. Para el área del cuadrado mayor de lados ***a+b***, la entrevista clínica posterior reveló que, también aquí, usa la notación de yuxtaposición para indicar suma: ***ab*** equivale a ***a+b***. De esta manera, su respuesta (observe el uso de espacios para distinguir claramente el área del rectángulo y de los cuadrados) ***(a+b)(a+b)= ab*** b^2+a^2 ***ab*** es correcta y debe interpretarse correctamente como

$$(a+b)(a+b)= ab+b^2+a^2+ ab$$

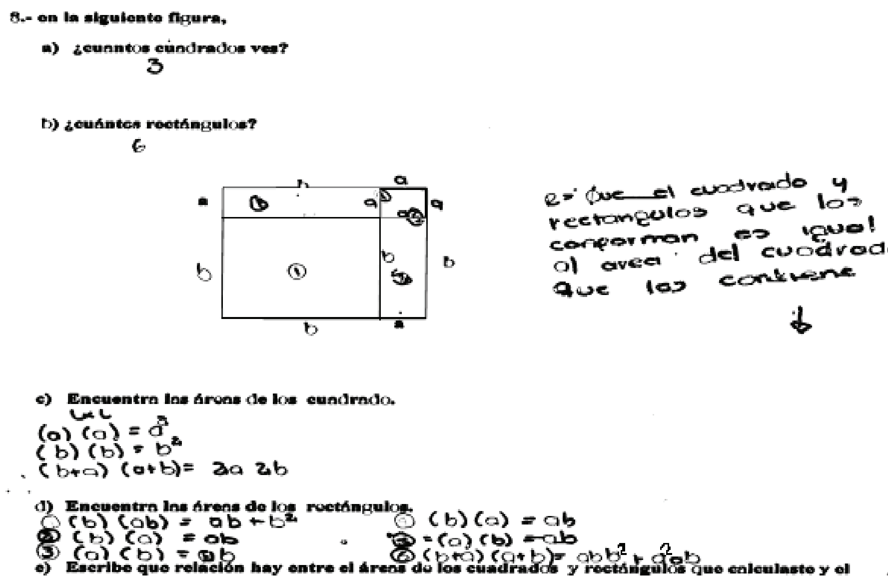

Figura 8. *Creación propia*

En el problema 3 de la secuencia didáctica (Figura 9), los alumnos identifican claramente la propiedad distributiva cuando escriben *(m+n+p+q+r)(c) =cm+cn+cp+cq+cr*; pero escriben erróneamente *cm+cn+cp+cq+cr = 5cmnpqr* ; este error revela la transición entre el pensamiento aditivo y multiplicativo.

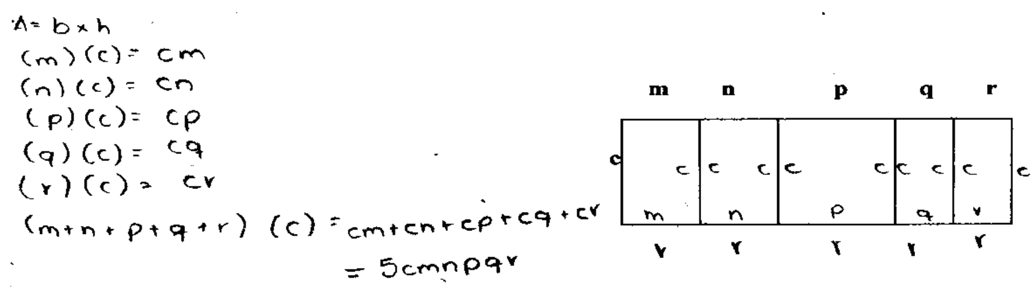

Figura 9. *Creación propia*

En relación al planteamiento de la ecuación de segundo grado, los alumnos de nivel medio-bajo logran plantear a nivel geométrico la ecuación para el lado de un terreno cuadrado que, adicionado a otro del mismo lado, resulte en un cuadrado, aunque no consiguen escribir la expresión algebraica $x^2 + 5x = 2500$.

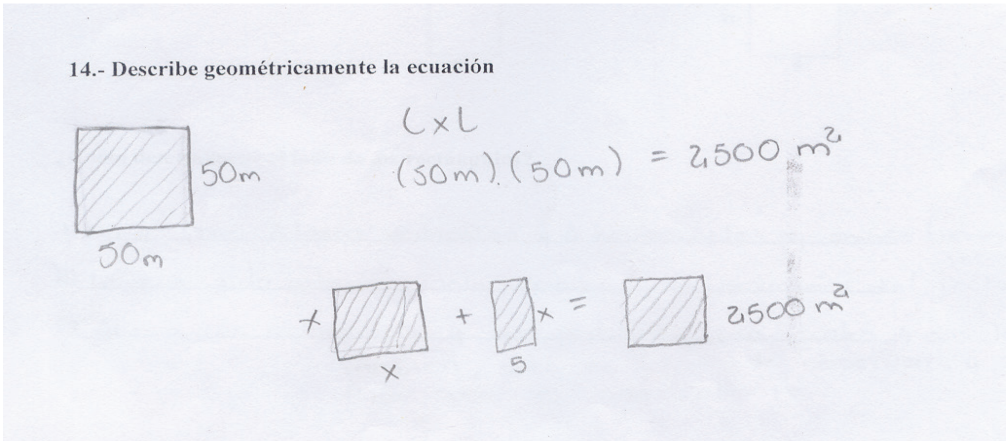

Figura 10. *Creación propia*

Los alumnos del nivel alto consiguen, además de identificar las áreas simples y plantear la ecuación cuadrática, aplicar la fórmula para resolver la ecuación pero cometen el error de sustituir la propia incógnita en el lado derecho de la fórmula. Ver figura 11.

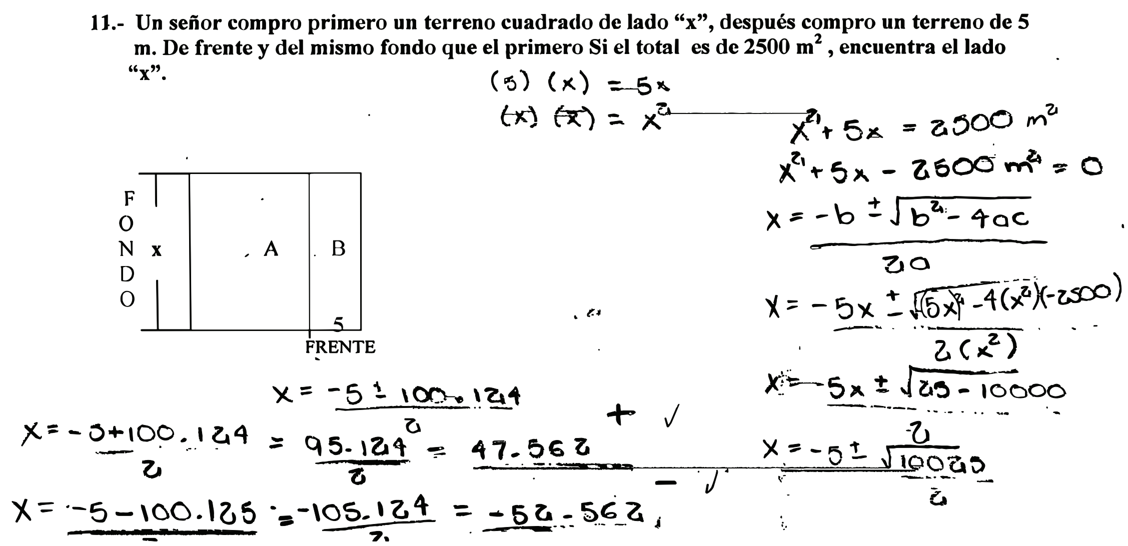

Figura 11. *Creación propia*

CONCLUSIONES

El estudio tuvo tres objetivos: 1. Explorar los conocimientos previos de los estudiantes sobre la determinación de áreas rectángulos y combinaciones de éstos, 2. Investigar la factibilidad de una secuencia didáctica basada en el álgebra geométrica de Euclides, 3. Investigar las representaciones algebraicas de las relaciones entre áreas. A partir de los resultados del cuestionario inicial, la mayoría de los estudiantes presentaron dificultades para encontrar los rectángulos faltantes como números o variables, para identificar mediante figuras geométricas, rectángulos y cuadrados y trazar todos los cuadrados y rectángulos internos y externos que eran formados en las cinco figuras geométricas, y calcular el área de los cuadrados y rectángulos. Además presentaban dificultades para identificar cuadrados y rectángulos en una figura, encontrar las áreas de cada cuadrado y cada rectángulo y escribir la relación existente entre las áreas del cuadrado mayor y las áreas de los cuadrados y rectángulos más pequeños, y en la resolución de problemas algebraicos.

Los estudiantes tuvieron dificultades para reconocer las áreas de los cuadrados y rectángulos por falta de apreciación semántica de las figuras; pero, durante la secuencia didáctica, algunos estudiantes superaron dichas dificultades con el apoyo del docente mediante la explicación de los problemas y con el apoyo de algunas sugerencias didácticas. En el cuestionario final superaron las dificultades iniciales con la interconexión entre aspectos algebraicos y geométricos.

Para obtener las áreas de los cuadrados y rectángulos, y establecer su ecuación, es necesario que el estudiante conozca las características de los cuadrados y rectángulos para, posteriormente, identificar los cuadrados y rectángulos, determinar sus áreas y establecer la ecuación cuadrática. Se procura, así, que interconecte la parte algebraica-geométrica partiendo de los conocimientos algebraicos y establezca, mediante la geometría, las áreas y su ecuación de los rectángulos y cuadrados, con la finalidad de interactuar con mayor facilidad en los procesos algebraicos.

REFERENCIAS

Bher, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1980). *How children view the equals sign. Mathematics Teaching* 92, 13-15.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*: *A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. NFER Nelson Windsor.

Bodanski, F.G. (1991). The formation of an algebraic method of problema-solving in primary school children. In *Psychology Abilities of Primary School Children In Learning Mathematics,* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Delval, J. (2000). *Descubrir el pensamiento en los niños. Introducción a la práctica del método clínico*. Barcelona: Paidós.

Filloy, E. y Rojano, T. (1985). Obstructions to the Acquisition of Elemental Algebraic Concepts and Teaching Strategies. In *Proceedings of the Ninth Annual Conference of the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter.* Ohio, US.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). *Solving Ecquations: The Transition from Arithmetic to Algebra, for the Learning of Mathematics* 9(2), 19-25.

Flauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. For the Learning of Mathematics 7(2). Special Issue in *Mathematics Education*, 3-6.

Flauvel, J. y Van Maanen, J.A. (Eds.) (2002). History in Mathematics Education. The ICMI Study. *New ICMI Studies* Vol 6. Springer Neatherlands.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical Conceptual Devlopments and the Teaching of Mathematics: From Phylogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice. In *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Lyn D. English (Ed.) Routledge.

Jankvist, U. Th. Y Kjeldsen, T. H. (2011). *New Avenues for History in Mathematics Education: Mathematical Competencies and Anchoring*. Sci. & Educ. 20, 831-862. doi: 10.1007(s11191-010-9315-2.

Jankvist, U. Th. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educ. Stud. Math* 71, 235-261. doi: 10.1007/s10649-008-9174-9.

Kaput, J. y M. Blanton. (2000). Generalization and progressively formalizing in a third-grade mathematics classroom: conversations about and old numbers. In *Plenary presentation at PME-NA XXII*; Tucson, AZ; October 7-10, 2000.

Kieran, C. (1980). The interpretation of the Equal Sign: Symbol for a Equivalence Relation vs. An Operator Symbol. In R Karplus (ed) *Proceedings of the Fourth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Berkerley, California. University of California.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics* 12, 317-326.

Katz, V. K. (1986). *Using History in Teaching Mathematics. For the Learning of Mathematics* 6(3), 13-19.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra, In D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning*, (pp 390-419). New York: MacMillan

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gower, N. (1985). *Routes to Roots of Algebra.* Gran Bretaña: The Open University Press.

Pumfrey, S. (1991). History of Science in the National Curriculum: A Critical Review of Resources and Their Aims. *The British Journal for the History of Science* 24(1), 62-78.

Radford, L y Guérette, G. (2000). *Second Degree Equations in the Classroom. A Babylonian Approach Using History to Teach Mathematics: An International perspective*. The Mathematical Association of America, Victor Katz, Editor, The United States of America. pp 69-75.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-63). Dordrecht: Kluwer.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The Gains and Pitfalls of Reification-the Case of algebra. *Educational Studies in Mathematics,* 26, 191-228.