

Análisis de la presentación de la probabilidad condicionada en libros de texto de 2º de bachillerato

Cantero Tomás, Ángel

Universidad de Murcia

Resumen

Las dificultades en el aprendizaje del concepto de probabilidad condicionada y los sesgos que presentan los estudiantes (comprensión intuitiva, condicionamiento y causación, intercambio de sucesos, confusión entre probabilidad condicional y conjunta, situaciones sincrónicas y diacrónicas, etc.) han sido ampliamente analizadas en la investigación en didáctica de la probabilidad y la estadística. Los estudiantes se enfrentan por primera vez a este contenido en su etapa de Bachillerato y creemos interesante analizar la presentación que se hace en los libros de textos correspondientes de este contenido. El análisis se realiza desde la perspectiva teórica que define el Enfoque Onto Semiótico, atendiendo a las situaciones problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Se concluye que hay bastante unanimidad en el uso de la notación del concepto probabilidad condicional pero el lenguaje utilizado en la definición es equívoco y puede llevar a error o facilitar la aparición de algunos de los sesgos descritos anteriormente. Por otro lado, la gran diversidad de las opciones metodológicas utilizadas para introducir el contenido pone de manifiesto la falta de acuerdo en lo que podría considerarse el marco ideal para presentar este contenido a estudiantes noveles.

Palabras clave: Probabilidad condicionada. Análisis de textos. Sesgos.

1. Introducción.

La probabilidad condicional es un concepto muy importante en la formación básica en Probabilidad y Estadística para un amplio grupo de estudiantes de bachiller, que en sus elecciones formativas postobligatorias optarán por estudios que requieren el uso frecuente y correcto de este contenido (Díaz, 2004; Contreras, 2011), pero su aprendizaje no está exento de importantes problemas. Las dificultades en el aprendizaje del concepto de probabilidad condicionada y los sesgos que presentan los estudiantes (comprensión intuitiva, condicionamiento y causación, intercambio de sucesos, confusión entre probabilidad condicional y conjunta, situaciones sincrónicas y diacrónicas, etc.) han sido ampliamente analizados en la investigación en didáctica de la probabilidad y la estadística tal y como resumen Díaz, Batanero y Contreras (2010).

En el presente trabajo, intentamos analizar si parte de estos sesgos y dificultades no se provocarán, o facilitarán, por la presentación que se hace usualmente del contenido en los libros de texto. Para ello, vamos a estudiar cuándo y cómo se presenta el contenido probabilidad condicional, por primera vez a la mayoría de estudiantes, en el segundo curso de Bachillerato. Completamos con ello el estudio de Batanero y Díaz (2005) con textos universitarios de psicología.

Este tema se introduce en primer curso de Bachillerato. El Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, (MEC, 2007) en la modalidad de Ciencias de la Naturaleza, la asignatura Matemáticas I presenta en el bloque 4, Estadística y Probabilidad, el contenido: *Estudio de la probabilidad compuesta, condicionada, total y a posteriori*. En la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, se presenta en el bloque

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 105-112). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

3, Probabilidad y Estadística, el contenido: *Asignación de probabilidades a sucesos. Distribuciones de probabilidad binomial y normal.* En el segundo curso de bachiller, solo la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II presenta contenidos sobre probabilidad. En el bloque 3, Probabilidad y Estadística, enuncia: *Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes.*

Vemos, por tanto, que como contenido explícito, la probabilidad condicionada no aparece hasta el primer curso de bachiller en la modalidad de Ciencias de la Naturaleza o en segundo curso de bachiller en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. Sin embargo, se presentan situaciones en clase en cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria opción B. en las que se hacen problemas utilizando este contenido.

2. Fundamento y Método

El marco de referencia que utilizamos para el análisis de las propuestas didácticas que realizan los libros de texto para la presentación del concepto Probabilidad Condicionada es la aproximación ontosemiótica al conocimiento matemático (Godino, Batanero y Font, 2009) en la que se proponen la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Elementos lingüísticos:* consiste en el conjunto de términos, expresiones, notaciones, gráficos presentes en el texto escrito.
- *Situaciones- problemas:* son las aplicaciones externas a las matemáticas, el origen de la actividad, las tareas o ejercicios a los que se pretende dar respuesta.
- *Conceptos – definición:* son los objetos matemáticos introducidos mediante definiciones o descripciones.
- *Proposiciones:* consisten en enunciados que se realizan sobre conceptos.
- *Procedimientos:* consisten en los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.
- *Argumentos:* son los enunciados utilizados para validar y explicar las proposiciones y los procedimientos que relacionan los conceptos entre sí.

Tabla 1. Libros analizados

	Título	Autores	Editorial	Edición
[1]	<i>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.</i>	Colera, J., Oliveira, M. J. y García, R.	Anaya.	2001
[2]	<i>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.</i>	Deusa, M., Esteve, R., Montesinos, P. Ramírez, A. y Veres, E.	Ecir.	2009
[3]	<i>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.</i>	Monteagudo, M ^a . F. y Paz, J.	Luis Vives.	2009
[4]	<i>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.</i>	Escoredo, A., Gómez, M., Lorenzo, J., Machín, P., Pérez, C., Rey, M., Río, J. y Sánchez, D.	Santillana Educación.	2010
[5]	<i>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.</i>	Ortega, P., Serra J., Díez, S. Prieto, J. y Bautista, A.	Pearson Educación.	2010
[6]	<i>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.</i>	González, C., Llorente, J. y Ruiz, M. J.	Editex.	2011

En la Tabla 1 se presentan los libros de texto que hemos analizado. El criterio seguido para elegirlos ha sido que se trata de editoriales de amplia difusión en España y abarcar un periodo de 10 años de publicación.

En cada texto se ha leído atentamente el epígrafe que introduce y define explícitamente el concepto probabilidad condicionada. Se ha atendido a la presencia, o ausencia de aspectos tales

como si existe un contexto previo a la definición de probabilidad condicional o se hace la definición directamente. En el caso de presentarse dicho contexto, se analiza la forma de expresión de los datos elegida (valores absolutos, porcentajes, probabilidades), así como el procedimiento metodológico de expresión de la información (árbol, tabla de contingencia, diagrama de áreas).

3. ¿Cómo se presenta la probabilidad condicionada en los textos?

Los libros de texto introducen el concepto de probabilidad condicionada de diferentes formas. El libro de Editex (González, Llorente y Ruiz, 2011) para las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, aprovecha la definición de sucesos dependientes e independientes para hacer una presentación previa. Esta definición de dependencia/independencia, la realiza en el contexto de experimentos compuestos que se presentan con devolución, o sin ella, entre las ejecuciones de las experiencias simples que los componen. Tras dar la fórmula, que realmente supone la definición de sucesos independientes, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ y señalar que en el caso de sucesos dependientes no se verifica esta igualdad, enuncia que para sucesos dependientes, se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \text{ supuesto que ha ocurrido } A)$.

A la probabilidad de B supuesto que ha ocurrido A , la denomina probabilidad de B condicionada a A , la representa como $P(B/A)$ y remite al capítulo siguiente para realizar su estudio. Tras señalar que “En el cálculo de las probabilidades de ciertos sucesos, el valor de dichas probabilidades varía en función del conocimiento de determinadas informaciones relativas a estos sucesos.” (p. 306) resuelve un ejemplo concreto sobre cómo se distribuye, en %, los tipos de sangre en España según grupos sanguíneos y factores Rhesus, a partir de la correspondiente tabla de contingencia. Se plantea y responde, de forma natural, preguntas sobre probabilidad condicionada (Si pertenece al grupo B , la probabilidad de tener el factor $Rh + es$), para llegar a enunciar la definición presentada en la Figura 1. No se hace referencia a la necesidad de que los sucesos elementales computados en la segunda fórmula han de ser equiprobables para que sea válida.

• Llamamos **probabilidad condicionada** del suceso B respecto del (condicionado al) suceso A , y lo denotamos por $P(B/A)$ al cociente

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

En la práctica resulta útil calcular la probabilidad de la forma:

$$P(B/A) = \frac{n^\circ \text{ de sucesos elementales de } A \cap B}{n^\circ \text{ de sucesos elementales de } A}$$

Figura 1. Definición de Probabilidad Condicionada. (González, et al. 2011. pág. 306)

El libro de Ecir (Deusa, et al. 2009) para el mismo curso y nivel, no hace referencia a la dependencia de los sucesos, sino que, tras señalar que “si el suceso objeto de estudio es un suceso compuesto por dos o más experimentos el cálculo de su probabilidad puede simplificarse mediante el concepto de probabilidad condicionada” (p. 234). Tras plantear un problema concreto sobre los gustos de un grupo de alumnos respecto al fútbol y a ir al cine, mediante una tabla de contingencia con números absolutos, y enunciar y resolver una pregunta que corresponde a una probabilidad condicionada, (“Si se selecciona un alumno al azar y resulta que va al cine, ¿cuál es la probabilidad de que también le guste el fútbol?”) presenta la definición de la forma dada en la Figura 2. Como se puede apreciar, tampoco en este caso se hace referencia a la equiprobabilidad de los n sucesos elementales, que habrá de suponerse para que sea cierta la expresión.

El libro de Santillana, (Escoredo et al., 2010) tampoco hace referencia a la dependencia de sucesos, ni presenta un ejemplo previo a la definición de probabilidad condicional, sino que la define directamente (Figura 3), donde vuelve a omitirse la necesidad de equiprobabilidad de los casos mencionados en las expresiones.

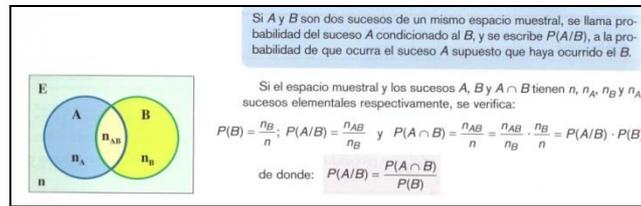


Figura 2. Definición de Probabilidad Condicionada. (Deusa et al. 2009, p, 234)

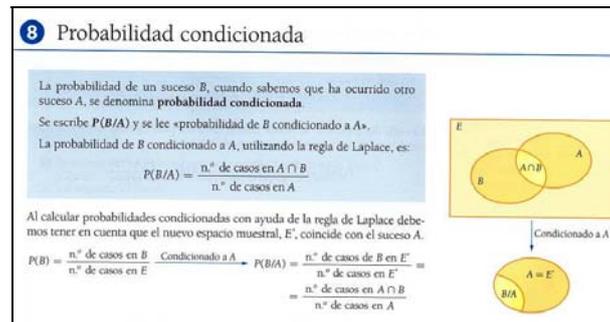


Figura 3. Definición de Probabilidad Condicionada. (Escoredo et al. 2010, p. 265.)

En el libro de Alhambra, (Ortega et al. 2010) se plantea la extracción de una carta de una baraja española y la probabilidad de que sea un rey. Posteriormente, vuelve a hacer la misma pregunta con la información adicional de que en la extracción ha salido una figura. Esto pone de manifiesto cómo cambia la probabilidad de un suceso al disponer de información adicional sobre su ocurrencia. Desde este preámbulo, presenta la definición de la forma siguiente:

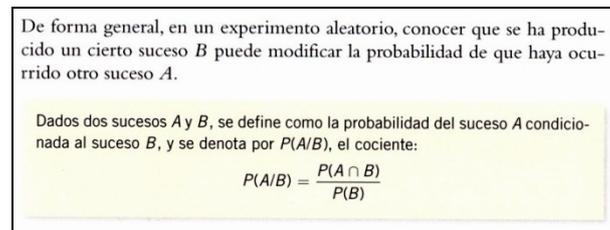


Figura 4. Definición de Probabilidad Condicionada. (Ortega, P. et al. 2010, p, 225).

En el texto de Edelvives, (Monteagudo y Paz, 2009; Figura 5) se parte de un ejemplo en el que se clasifica una población en las categorías hombre/mujer y color de pelo castaño/pelirrojo/rubio, plasmado en la correspondiente tabla de doble entrada. Posteriormente, define y considera una serie de sucesos hasta que plantea el suceso “ $B/A = \{ \text{tener el pelo rubio entre los que son hombres} \}$ ”, añadiendo que “este suceso se denomina suceso B condicionado a A y está formado por todos los sucesos elementales de B que verifican a su vez el suceso A ”.

A partir de ahí, calcula las frecuencias relativas de los sucesos que ha planteado destacando que en algunos sucesos el número de “casos posibles” es el número total de sujetos (hombres más mujeres), mientras que en el caso de la frecuencia relativa del suceso B/A , “el espacio muestral” son solo los hombres los que corresponden al los casos posibles. (Los casos posibles son los valores de los denominadores de las frecuencias relativas). Tras esto, compara el análisis

de las frecuencias con el diagrama de árbol correspondiente para el cálculo de las probabilidades del suceso condicionado tal y como se muestra

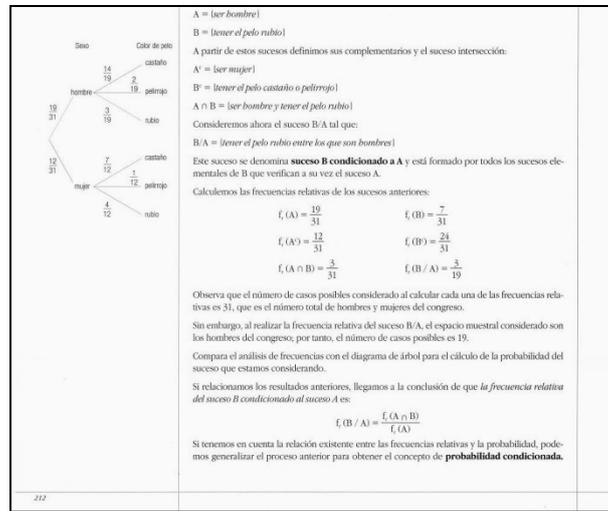


Figura 5. Definición de Probabilidad Condicionada. (Monteagudo y Paz, 2009, p. 212)

En el texto de Anaya, (Colera, Oliveira y García, 2001) se presenta directamente la definición a partir de su fórmula, como muestra la Figura 6. Indica también su interpretación como proporción de casos en los que ocurre un suceso dado otro y añade un gráfico de áreas para representar las probabilidades.

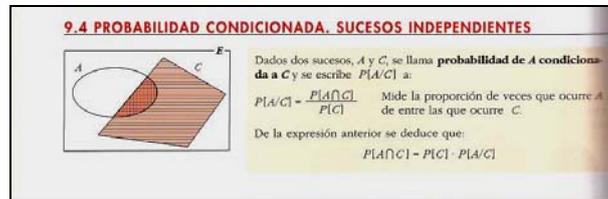


Figura 6. Definición de Probabilidad Condicionada. (Colera, Oliveira y García, 2001, p. 244)

Por otro lado, en la totalidad de los textos, excepto el de la editorial Editex, se presenta y define, tras la probabilidad condicionada, el concepto de dependencia/independencia de sucesos.

4. Notación y representaciones

Tenemos que destacar la unanimidad que hay en todas las propuestas editoriales en cuanto a la notación utilizada para el concepto de probabilidad condicionada: $P(A/B)$ aún cuando ésta puede ser confusa para los estudiantes que se enfrentan por primera vez a este concepto (Totohasina, 1994). A pesar de esta coincidencia en la notación, hemos de ser conscientes, como indica Feller (1973, p. 128) “*Aunque el símbolo $P(A/B)$ es práctico en sí mismo, su forma de expresarlo en palabras es difícil de manejar, de manera que en la práctica se usan descripciones menos formales. ... Nuestras fórmulas y símbolos no son erróneos, pero la forma de expresarlos en palabras suele ser informal y debe interpretarse apropiadamente*”.

Podemos comprobar que en algunas definiciones se explicita que el suceso condicionante ya haya ocurrido cuando ocurra el suceso condicionado; por ejemplo, en el texto de Ecir (Deusa, et al. 2009), “... se llama probabilidad del suceso A condicionado al B, y se escribe $P(A/B)$, a la

probabilidad de que ocurra el suceso A supuesto que haya ocurrido el B (p. 234).” También en el texto de Santillana, (Escoredo et al. 2010, p. 265), puede leerse en la definición: “La probabilidad de un suceso B, cuando sabemos que ha ocurrido otro suceso A, se denomina probabilidad condicionada.”. Esto puede estar induciendo o, al menos facilitando, al alumno a creer que hay una dirección temporal que relaciona al suceso condicionante (previo) con el suceso condicionado (posterior), es decir la denominada *falacia del eje temporal* (Falk, 1986; Gras y Totohasina, 1995). Esto mismo, podría estar dificultando que el alumno pueda plantearse con igual facilidad $P(A/B)$ y $P(B/A)$ y no sufrir la denominada *falacia de la condicional transpuesta* (Falk, 1986).

Por otra parte, nos llama la atención la variedad de planteamientos que se dan para introducir la definición de probabilidad condicionada, en los que predomina presentar un ejemplo concreto para acotar el concepto que se va a presentar. No obstante algunos textos optan por definir directamente el concepto, según podemos ver en la Tabla 2

Tabla 2. Forma en que se introduce la probabilidad condicionada

Textos	Con contexto previo	Sin contexto previo
1. ANAYA		X
2. ECIR	X	
3. LUIS VIVES	X	
4. SANTILLANA		X
5. PEARSON	X	
6. EDITEX	X	

Entre los textos que parten de un contexto concreto para presentar el contenido, se produce también una variedad importante en el tipo de ejemplo elegido, en el recurso didáctico con el que se analiza el ejemplo, predominando las tablas de doble entrada frente a los diagramas de árbol o diagramas de áreas (no utilizados en ningún ejemplo) y, así mismo, hay variedad en el formato elegido para la presentación de los datos entre valores absolutos y tantos por ciento, tal y como representamos en la tabla 3. Observamos acá una diferencia con el estudio de Díaz y Batanero (2005), que encontraron pocos los libros de texto que usasen diagramas en árbol, tablas de doble entrada, diagramas de Venn o rectangulares en su estudio.

Tabla 3. Recursos didácticos empleados en el contexto previo a la definición

Textos	Tablas de doble entrada		Arboles	Diagrama de áreas	Añadiendo información
	Valores absolutos	%	Valores absolutos		
1. ECIR	X				
2. LUIS VIVES	X		X		
3. PEARSON					X
4. EDITEX		X			

Tabla 4. Fórmulas o recursos empleados en la definición

Textos	$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$	$P(A/B) = \frac{n^{\circ} \text{ suc. de } A \cap B}{n^{\circ} \text{ suc. de } A}$	Diagrama de áreas
ANAYA	X		X
ECIR	X		X
EDELVIVES	X		
SANTILLANA			X
PEARSON	X		

Todos los textos dan la definición de *Probabilidad Condicional* y la acompañan de la fórmula del cociente de probabilidades o del cociente de número de sucesos elementales de la intersección y número de sucesos del condicionante, o de ambas, y, a veces, se ilustra mediante un diagrama de áreas, según se describe en la Tabla 4.

5. Conclusiones

Esta variedad de presentaciones observadas en los textos nos lleva a pensar que no hay consenso sobre la forma óptima de presentar este concepto a los alumnos. Tampoco se comparte un encuadre teórico lo más simple posible que ponga de manifiesto el contenido sin necesidad de ligarlo a experimentos compuestos.

Hemos visto como en los textos analizados en ningún caso que se presenta la definición haciendo referencia al número de casos del suceso intersección entre el número de casos del suceso condicionante, se ha mencionado la condición imprescindible de que sean sucesos elementales equiprobables.

Creemos adecuado presentar inicialmente la probabilidad condicionada en experimentos simples, donde al calcular la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso A, se ponga de manifiesto cómo esta probabilidad se puede ver alterada, o no, por una información adicional que se aporta tras la realización de la experiencia, pero sin que suponga un experimento compuesto. Por ejemplo, si estudiamos la probabilidad del suceso A “extraer una figura de una baraja de 40 cartas”, $P(A) = \frac{12}{40}$, si se añade la información de que sabemos que la carta extraída tiene una numeración impar, (suceso B: “el número de la carta es impar”), ello nos altera el valor anterior, puesto que sólo hay cuatro figuras con numeración impar, los caballos, y $P(A/B) = \frac{4}{20}$. En este ejemplo, la probabilidad inicial de sacar una figura ha disminuido, pero cambiando la información añadida, por ejemplo, si sabemos que la carta extraída tiene numeración par, (suceso B: “el número de la carta es par”), puede verse aumentada ya que sería $P(A/B) = \frac{8}{20}$. En ejemplos de este tipo, el alumno puede ver la restricción que produce sobre el espacio muestral inicial, la nueva información aportada sobre el experimento simple ya realizado.

Posteriormente, la secuencia de instrucción debería plantear actividades formativas a los alumnos en las que cada sesgo descrito en la investigación didáctica fuese puesto ante el alumno para su análisis y discusión. La simulación (Fernández et al. 2009) y el uso de paradojas (Batanero et al., 2012) proporcionan ayuda en este sentido.

REFERENCIAS

- Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, C., y Gea, M. M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades educativas*, 261, 78-84.
- Colera, J., Oliveira, M. J. y García, R. (2001). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Anaya.
- Colera, J., Oliveira, M. J., Gaztelu, I. y Martínez, M. (2008). *Matemáticas 4º Educación Secundaria, opción B*. Madrid: Anaya.
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

- Deusa, M. et al. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato*. Valencia: Ecir.
- Díaz, C. (2004). *Elaboración de un instrumento de evaluación del razonamiento condicional. Un estudio preliminar*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.
- Díaz, C. y Batanero, C. (2005). La probabilidad condicional en los textos de estadística para psicología Trabajo presentado en el V CIBEM. Guimaraes, Portugal, Julio 2005.
- Díaz, C., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*. 26 (2), 149-162.
- Escoredo, A et al. (2010). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato*. Madrid: Santillana Educación.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292 – 297). Victoria, Canadá: International Statistical Institute.
- Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones*. México: Limusa.
- Fernández, J.A., Batanero, C., Contreras, J.M., y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante XVIII* (1), 161-183.
- Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions source d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007) Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 39, 1-2
- González, C., Llorente, J. y Ruiz, M. J. (2011) *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato*. Madrid: Editex.
- Monteagudo, M^a. F. y Paz, J. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato*. Zaragoza: Luis Vives.
- Ortega, P. et al. (2010) *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato*. Madrid: Pearson Educación.
- Totohasina, A. (1994). L'introduction du concept de probabilité conditionnelle: avantages et inconvénients de l'arborescence. *Repères*, 15, 93-117.