Desafíos de la enseñanza de la estadística basada en proyectos

Juan D. Godino[1], Pedro Arteaga[1], Antonio Estepa[2], y Hernán Rivas[3]

[1]Universidad de Granada
[2]Universidad de Jaén
[4]Pontificia Universidad Católica de Chile

Resumen

Escriba aquí el resumen del trabajo. Se describen los resultados de un proceso formativo de futuros maestros sobre el tema de estadística y probabilidad desarrollado mediante una metodología didáctica basada en el uso de proyectos de análisis de datos. Aunque los proyectos permitieron dar sentido práctico a las técnicas estadísticas, la evaluación final reveló dificultades conceptuales y procedimentales que reclaman una mayor atención por parte del profesor en los momentos de institucionalización y ejercitación de los conocimientos.

Palabras clave: formación de profesores, estadística, probabilidad, métodos de proyectos, evaluación Escriba aquí las palabras clave

.

1. Introducción

El estudio de las matemáticas basado en la resolución de problemas se puede considerar actualmente como un postulado de la didáctica de las matemáticas. En el marco del "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012) se atribuye a las situaciones problemas un papel central, ya que se asume una concepción antropológica de la matemática, de modo que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinados problemas. Esta posición es concordante con la "Teoría de situaciones didácticas" (Brousseu, 1997) y también con la "Educación matemática realista" (EMR) (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005), basada en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983; 1991). En estas teorías, y en diversas propuestas curriculares, se propone el uso de situaciones - problemas como medio de contextualizar las ideas matemáticas y generarlas a partir de la actividad de resolución, comunicación y generalización de las soluciones.

Para el caso de la estadística estos problemas adoptan la modalidad de proyectos de análisis de datos mediante los cuales los estudiantes se involucran en la resolución de un caso práctico con el que se pretende dar sentido al discurso teórico de la estadística. De esta manera se enfatizan los significados situacionales mientras que pasan a un segundo plano los restantes elementos de las configuraciones de objetos y procesos que intervienen en la práctica matemática (elementos lingüísticos, conceptuales, procedimentales, proposicionales y argumentativos). En este trabajo describimos algunos resultados de un proceso de enseñanza de nociones estocásticas elementales, desarrollado con dos grupos de estudiantes de magisterio, basado en el uso de proyectos de análisis de datos. La prueba de evaluación final revela índices de dificultad elevados para las cuestiones relacionadas con la comprensión de conceptos, la comparación de frecuencias relativas y probabilidades mediante diagramas de barras adosadas y la comprensión de la ley de los grandes números. Se infiere de estos resultados que un enfoque de la enseñanza mediante el uso de proyectos no puede desatender la comprensión conceptual y el desarrollo de destrezas procedimentales, lo que supone un desafío para el profesor de matemáticas. Este desafío se añade a otros como son el reconocimiento de la complejidad del razonamiento estadístico y la implementación de procesos de estudio que contemplen, no solo momentos de

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 173-180). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

exploración de soluciones por los propios estudiantes, sino también momentos de institucionalización, ejercitación y evaluación.

2. Enseñanza basada en proyectos

El desarrollo del razonamiento estadístico, incluye según Wild y Pfannkuch (1999, p. 227) cinco componentes fundamentales:

1. *Reconocimiento de la necesidad de los datos:* El reconocimiento de las carencias de las experiencias personales y la evidencia anecdótica lleva al deseo de basar las decisiones sobre la recogida deliberada de datos.
2. *Transnumeración:* La idea más importante en el aprendizaje de la estadística es la de formar y cambiar las representaciones de los datos relativos a un sistemas para llegar a una mejor comprensión de ese sistema, esto es, el proceso dinámico de cambiar las representaciones de los datos numéricos para facilitar la compresión.
3. *Variación:* El pensamiento estadístico moderno se refiere al aprendizaje y la toma de decisiones bajo incertidumbre, la cual surge de la omnipresente variación.
4. *Uso de un conjunto de modelos:* La principal contribución de la estadística al pensamiento ha sido su propio conjunto de modelos específicos, esto es, marcos para pensar sobre determinados fenómenos que incluyen componentes aleatorios.
5. *Conocimiento estadístico relacionado con el contexto.* El material de base del pensamiento estadístico son el conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información contenida en los datos. El pensamiento en sí mismo es la síntesis de estos elementos para producir implicaciones, comprensiones y conjeturas.

Para desarrollar este razonamiento estadístico diversos autores (Batanero, Burrill y Reading, 2011; MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011) indican que la mejor forma es introducir en las clases de estadística el trabajo con proyectos. “En lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo, difíciles de encontrar en la vida real, se trata de presentar las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado” (Batanero y cols, 2011, p. 15).

Estos antecedentes son los que nos han llevado a aplicar una metodología didáctica basada en el uso de proyectos de análisis de datos en la formación estadística de futuros profesores de primaria; de este modo los futuros maestros participan de una metodología que ellos pueden aplicar en su práctica docente. En este trabajo describimos una experiencia formativa realizada en la Universidad de Granada que nos permite reflexionar sobre los desafíos que plantea al formador la enseñanza basada en proyectos.

3. Formación de maestros sobre nociones estocásticas elementales

El proceso formativo sobre el contenido de Estadística descriptiva y probabilidad se realizó en el contexto de la asignatura del plan de formación de maestros titulada, “Bases matemáticas para la educación primaria”, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Se aplicó a dos grupos de estudiantes en dos cursos diferentes, uno con 56 estudiantes y otro con 71. Como ya hemos señalado, el estudio se organizó en base al desarrollo de tres proyectos, los cuales describimos brevemente.

Proyecto 1: Alumno típico

Se trata de la elaboración de un perfil de los alumnos de la clase, identificando al alumno típico y analizando si hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de las características. Este proyecto se describe con detalle en Batanero y Díaz (2011, págs. 73-93)). Las variables estadísticas consideradas en nuestra implementación fueron las siguientes: Variable 1: Género (hombre, mujer); Variable 2: ¿Haces deporte? (Nada, poco, mucho); Variable 3: Número de hermanos (incluyendo al propio estudiante, o sea, número de hijos en la familia); Variable 4: Peso (Kg.); Variable 5: Dinero que llevas en el bolsillo (Cantidad de euros).

En este proyecto se proponen las siguientes cuestiones iniciales:

- ¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase? ¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?
- ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?

Proyecto 2: Lanzamiento de dos dados

El proyecto consiste en decidir la preferencia de ser uno u otro jugador al lanzar dos dados, teniendo en cuenta determinadas condiciones que refieren a la probabilidad de que gane uno u otro jugador. El planteamiento se recoge en la Figura 1.

Raquel es una maestra de Primaria y lleva unos días trabajando algunas nociones de probabilidad en su clase de 6º. Sus alumnos asignan sin dificultad probabilidades a ciertos sucesos simples, como los resultados de lanzar un dado o una moneda o de girar una ruleta con todos los sectores iguales. Para hoy decide plantear la siguiente actividad:

Actividad 1. Suma de puntos al lanzar dos dados:

Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, ó 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha.

a. ¿Qué prefieres ser jugador A o B? Razona la respuesta.

b. ¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego?¿Quién tiene más probabilidades de ganar? Razona las respuestas.

c. Simula el lanzamiento de dos dados. Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes.

Tabla de recogida de datos para el lanzamiento de dos dados

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gana A										
Gana B										

d. ¿Quién ha ganado más veces A o B?

e. ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué? Razona las respuestas.

Figura 1. Planteamiento del proyecto

Una vez recogidos los datos para el conjunto de las parejas formadas en la clase se plantean las siguientes cuestiones:

a. ¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B? ¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar? ¿Qué puede hacer un profesor en esta situación para explicar el resultado a sus alumnos?

b. Construir un diagrama de barras adosadas en el que se represente la distribución de frecuencias relativas de la tabla 1 y la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "suma de puntos al lanzar dos dados". ¿Cómo piensas que cambiará este diagrama si en lugar de representar las frecuencias relativas al lanzar 100 veces los dados se hubieran lanzado 10000 veces?

Proyecto 3: Eficacia de un entrenamiento deportivo

Se plantea en el modo siguiente:

Un profesor de Educación Física prepara a un grupo de 60 alumnos de 12 años para participar en una competición. Transcurridos 3 meses del entrenamiento (Septiembre a Diciembre) quiere comprobar si el entrenamiento ha sido efectivo. Para ello decide comparar el tiempo en segundos que los alumnos tardan en recorrer 30 metros en Septiembre y en Diciembre, y también quiere conocer si hay diferencias entre los chicos y las chicas.

Trabajando en equipo, elabora un informe respondiendo razonadamente a las cuestiones 1) a 5) siguientes, incluyendo los cálculos y gráficos que consideréis pertinentes:

1. ¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?
2. ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 25 metros inicialmente en Septiembre?
3. ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 25 metros después del entrenamiento en Diciembre?
4. ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?
5. ¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como "atípico" en su capacidad de correr (por su velocidad excesivamente baja)? ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos desde el punto de vista estadístico?

El proceso de estudio implementado contempla, además de la realización de los proyectos, los siguientes recursos instruccionales:

- Colección de ejercicios resueltos
- Texto de estudio. Se trata de la monografía de Batanero y Godino (2003), *Estocástica para maestros*, donde se desarrollan los contenidos básicos de estadística y probabilidad.
- Tablón de docencia, el cual se utiliza como repositorio de información y como un espacio de comunicación sincrónica y asincrónica entre estudiantes y entre los estudiantes y el profesor.

4. Prueba de evaluación final

La tarea usada como evaluación final solicita responder a seis cuestiones que se presentan en la Figura 2.

Como sabes el dodecaedro tiene 12 caras. Hemos numerado las caras de un dodecaedro de la siguiente manera: una cara con el número 1, dos caras con el número 2, tres caras con e número 3, cuatro caras con el número 4, una cara con el número 5, y una cara con el 6 (Se supone que este cuerpo es perfectamente simétrico y que todas las caras pesan igual).

1. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio, "Lanzar el dado dodecaédrico descrito y observar el número mostrado por la cara situada más arriba".
2. Calcula la probabilidad de obtener cada uno de los resultados elementales posibles y escribe dichas probabilidades en la tabla siguiente:

Valor	1	2	3	4	5	6

Probabilidad						

Hemos simulado el lanzamiento de ese dado 30 veces y hemos obtenido los siguientes resultados:

3, 1, 5, 3, 6, 1, 2, 2, 5, 4, 6, 4, 4, 6, 3, 6, 5, 5, 3, 6, 6, 1, 4, 3, 5, 3, 6, 5, 4, 6.

3. Construye una tabla de frecuencias relativas de esta serie de datos estadísticos
4. Representa esta distribución de frecuencias mediante un diagrama de barras.
5. Representa sobre la misma gráfica anterior (barras adosadas) la distribución de probabilidad calculada en el apartado 2).
6. Si en lugar de lanzar 30 veces el "dado" lo hiciéramos 10.000 veces, ¿Qué esperas observar respecto de los diagramas de barras representados.

Figura 2. Cuestionario

5. Resultados e interpretación

Describimos en esta sección los resultados de la aplicación de la prueba a los dos grupos de estudiantes a los cuales hemos aplicado el proceso formativo descrito. Para realizar una evaluación global de los conocimientos logrados por los estudiantes y estudiar si ambas muestras se pueden considerar como obtenidas de una misma población hemos definido una variable cuantitativa, grado de corrección de las respuestas en cada una de las seis cuestiones. En algunas de las cuestiones tiene sentido considerar que la respuesta es parcialmente correcta, en cuyo caso hemos asignado una puntuación de 1, para distinguirla del caso en que es plenamente correcta (puntuación 2); en el caso de respuesta incorrecta, o si el estudiante no la ha respondido hemos asignado 0 puntos. Con este criterio la puntuación máxima obtenible es de 12. En la Figura 3 mostramos los gráficos de cajas de la variable puntuación total en ambos grupos.

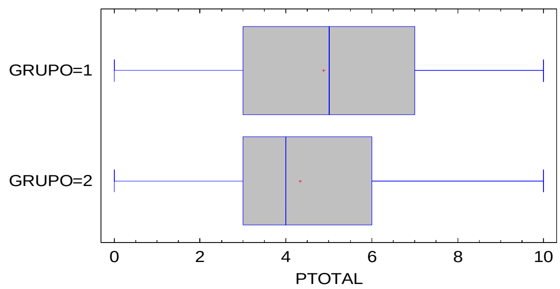

Figura 3. Gráfico de cajas de la distribución de la puntuación total en la prueba

Realizado un contraste de diferencias de medias no resulta significativo al nivel del 5% por lo que podemos analizar ambos grupos como formando una única muestra de 127 sujetos. En la tabla 1 presentamos los tipos de respuestas dadas a los seis ítems, distinguiendo las respuestas correctas (y parcialmente correctas) y las respuestas erróneas (y en blanco).

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes de los tipos de respuestas a los ítems (n= 127)

ITEM:	Correctas y parc. correctas		Erróneas y no responde	
	Frec.	%	Frec.	%
1. Espacio muestral	44	34.6	83	65,4
2. Asignación de probabilidades	100	78,7	27	21,3
3. Construcción tabla de frecuencias relativas	88	69,3	39	30,7

4. Represent. diagrama de barras de frecuencias relativas	42	33,1	85	66,9
5. Represent. diagrama de barrasdistribución probabilidad	20	15,7	107	84,3
6. Reconocimiento de la ley de los grandes números	60	47,2	67	52,8

La cuestión más difícil ha sido la representación del diagrama de barras de la distribución de probabilidad sobre el mismo gráfico de frecuencias relativas previamente construido. Ha habido un conflicto no previsto en cuanto a usar la misma expresión de las frecuencias relativas y probabilidades, bien como decimales menores que la unidad o como porcentajes. La construcción de las escalas en los ejes cartesianos para representar las frecuencias y probabilidades ha resultado bastante conflictiva. Otra cuestión conflictiva ha sido la identificación de los sucesos elementales en el experimento aleatorio (construcción del espacio muestral). Describimos a continuación los principales tipos de respuestas erróneas, o parcialmente erróneas, dadas por los estudiantes para cada ítem.

Ítem 1: De un total de 83 respuestas entre erróneas (90,6%) y que no responden (9,4%) en este ítem hemos encontrado 53 (lo que representa el 63,9% del total de respuestas erróneas en este ítem y el 41,7% del total de los estudiantes) en las cuales el error consiste en señalar que el espacio muestral del experimento está formado por el conjunto {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6 }; los estudiantes no reconocen que, en las condiciones de numeración de las caras del dado, no es posible distinguir las caras numeradas con el mismo número, por lo que los sucesos elementales posibles son obtener uno de los números del 1 al 6. Zimmermann (2002) también encontró dificultades de los estudiantes de los primeros cursos universitarios en el reconocimiento de espacios muestrales válidos.

Ítem 2. Este ítem ha resultado fácil. En el total de los 127 estudiantes sólo 9 (7,1%) han dejado en blanco esta cuestión; no destaca ningún tipo de respuesta errónea en este ítem.

Ítem 3. En la construcción de la tabla de frecuencias relativas 32 estudiantes (25,2%) no calcula dichas frecuencias o lo hace incorrectamente; 37 estudiantes (29,1%) incluyen cálculos no requeridos (frecuencias acumuladas) que dificultan la representación gráfica de los datos.

Ítem 4. La principal dificultad en este ítem ha consistido en la incorrecta asignación de títulos al gráfico y las etiquetas de los ejes. Prácticamente la totalidad de los estudiantes (96,9%) han manifestado esta dificultad. El 46,5% de los estudiantes han tenido dificultades para construir la escala correcta al eje de ordenadas.

Ítem 5. Este ítem no fue respondido por 25 estudiantes (19,7%), mientras que solo 20 (15,7%) lo hicieron correctamente. Las principales dificultades han consistido en el problema ya mencionado del uso de una escala inapropiada en el eje de ordenadas, así como la expresión de la probabilidad mediante el uso de notación fraccionaria, la cual tenía que ser transformada a notación decimal o porcentual para la comparación con las frecuencias relativas.

Ítem 6. Esta cuestión no la han respondido 22 estudiantes (17,3%), mientras que 44 (34,6%) manifiestan errores de muy diverso tipo. Este ítem evalúa un conocimiento avanzado del contenido de la estocástica, convergencia en probabilidad de las frecuencias relativas a la probabilidad del suceso correspondiente. Este contenido es de interés para el maestro, ya que le permite clarificar las relaciones entre las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad (regla de Laplace). Prácticamente la mitad de los estudiantes han manifestado un nivel de comprensión aceptable de este contenido. A resultados similares, aunque un poco mejores, (67,6%) llega Noll (2007), quien encontró que los maestros en ejercicio tienen problemas con la ley de los grandes números.

5. Observaciones finales

Como conclusión de este estudio resaltamos que la enseñanza de las matemáticas, y en particular la estadística, debe partir y centrarse en el uso de situaciones - problemas (proyectos de análisis de datos), como una estrategia de dar sentido a las técnicas y teorías matemáticas. De esta manera, además, se hacen posibles los momentos exploratorios de la actividad matemática por parte de los estudiantes. Sin embargo, en la práctica matemática intervienen configuraciones de objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) (Font, Godino y Gallardo, 2013), los cuales deben ser reconocidos por el profesor para planificar su estudio. Tales objetos deben ser progresivamente dominados por los estudiantes si se desea que progresen hacia sucesivos niveles avanzados de conocimiento y competencia. El estudio de tales objetos matemáticos y sus respectivos procesos asociados debe ser planificado por el docente organizando los correspondientes momentos didácticos de validación, institucionalización y ejercitación.

Nuestro análisis ha revelado varios desafíos del profesor de matemáticas/ estadística para el logro de una enseñanza idónea de los contenidos estadístico: 1) tomar conciencia de la naturaleza compleja del razonamiento estadístico, lo que requiere el uso de proyectos de análisis de datos; 2) reconocer las configuraciones de objetos y procesos estadísticos que se ponen en juego en la resolución de los proyectos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos); 3) implementar procesos de estudio que contemplen momentos de exploración, formulación/comunicación, validación, ejercitación y evaluación (Brousseau, 1997). Es necesario, no obstante, tener en cuenta que el diseño e implementación de procesos de estudio con alta idoneidad didáctica (Godino, 2011) requiere el concurso de factores sobre los cuales el docente no tiene control, como es el caso del factor tiempo asignado al estudio. El proceso de estudio analizado en este trabajo tuvo lugar en tres semanas (a razón de 5 horas presenciales semanales), durante las cuales se supone que los estudiantes deberán dedicar un tiempo adicional de estudio personal (aproximadamente, 30 horas de trabajo individual y en equipo). Un cuarto desafío se presenta al profesor referido a cómo motivar a los estudiantes para que se comprometan en el estudio de las fuentes documentales proporcionadas y utilicen los espacios (virtuales y presenciales) puestos a su disposición.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), y EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MEC).

Referencias

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.

Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (2011) (Eds). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study*. Berlin: Springer.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2003). *Estocástica y su didáctica para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/.

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

MacGillivray, H. y Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 109-120). New York: Springer.

Noll, J. A. (2007). *Graduate teaching assistants' statistical knowledge for teaching*. PhD. Porland State University. USA

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(4), 287-307.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

Zimmermann, G. (2002). *Students' reasoning about probability simulations during instruction*. PhD. Illinois State University. USA.