

Reflexões de docentes sobre o ensino de combinatória: transitando entre conhecimento pedagógico e do conteúdo

Arimatéa Rocha, Cristiane de y Souza Rosa Borba Rute, Elizabete de

UFPE- Centro Acadêmico do Agreste

Resumo

A pesquisa busca analisar como professores do Ensino Fundamental e Médio sugerem estratégias de ensino para Combinatória visando a superação de dificuldades dos alunos. Nessa perspectiva, foram realizadas entrevista semi-estruturadas, com seis professores (dois dos anos iniciais, dois dos anos finais do Ensino Fundamental e dois do Ensino Médio) na qual responderam questões referentes a aulas de Combinatória, a utilização de recursos e às formas de ensino utilizadas para a superação de dificuldades dos alunos (apresentadas por meio de protocolos de resolução de problemas combinatórios) de diferentes níveis de escolaridade, retirados da pesquisa de Pessoa. A pesquisa revelou que, a aula de Combinatória de professores dos anos iniciais enfatizam a utilização do material concreto, a resolução de problemas e as diferentes estratégias de resolução dos alunos e não mencionaram conceitos de Combinatória; nos anos finais centraram a discussão no princípio multiplicativo e na construção da noção de possibilidades pelos estudantes; No Ensino Médio, a discussão enfatizou aspectos referentes ao conteúdo de Combinatória como o Princípio multiplicativo, e a utilização de questões clássicas, refletindo sobre a natureza diferenciada da Combinatória e a dificuldade na diferenciação dos problemas combinatórios. Acredita-se na troca de experiência entre os professores entrevistados pode auxiliar na reflexão de práticas e na construção do raciocínio combinatório pelos alunos.

Palavras Chave: Ensino de Combinatória; Ensino Fundamental e Médio; Conhecimento pedagógico e do conteúdo.

1. Introdução

No Brasil, os Documentos Orientadores do Currículo de Matemática (BSEF, 1997) incentivam que desde os anos iniciais os estudantes aprendam a lidar com situações-problema de arranjo, combinação, permutação e especialmente o princípio multiplicativo da Contagem.

Nessa perspectiva, pesquisas que vêm sendo realizadas no Brasil, especialmente, no Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da UFPE (Geração-UFPE), observa que alguns estudantes desde os anos iniciais do Ensino Fundamental conseguem elaborar estratégias sistematizadas quando em situações de resolução de problemas combinatórios com número de possibilidades pequeno (Pessoa e Borba, 2009). As autoras ainda indicam que quando há um número maior de possibilidades existe maior dificuldades de resolução pelos estudantes. Nesse sentido, Fischbein (1975) advoga que o raciocínio combinatório não se desenvolve espontaneamente, e que o ensino de Combinatória é essencial na construção desse raciocínio.

Outro fator que colabora nessa discussão são os livros didáticos de Matemática que apresentam nesse nível de escolaridade problemas combinatórios em outros tópicos como Sistema de Numeração Decimal, ou mesmo nos capítulos destinados ao estudo de estruturas aditivas (Barreto e Borba, 2010). Essas autoras ainda advertem sobre a ausência de

abordagens, nos livros analisados e nos manuais do professor, dos invariantes de conceito dos problemas de Combinatória, como por exemplo, a propriedade de ordenação gerar ou não novas possibilidades.

Vale salientar que os professores que ensinam Matemática possuem diferentes formações. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, os professores possuem formação inicial em Pedagogia e nos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio possuem formação inicial em Licenciatura em Matemática (geralmente), o que pode apresentar uma variedade de olhares, desafios e expectativas sobre o desenvolvimento do ensino de Combinatória em cada nível de escolaridade.

Com base no acima exposto, esse artigo apresenta alguns resultados de pesquisas Rocha e Borba (2010) e Rocha (2011) realizadas com professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental e Médio e tem como objetivo analisar como professores do Ensino Fundamental e Médio sugerem estratégias de ensino para Combinatória visando a superação de dificuldades dos alunos.

2. Conhecimentos Pedagógicos e de Conteúdo de Professores sobre Combinatória

A construção de conceitos matemáticos exige cada vez mais dos professores e alunos mudanças de concepções, habilidades, além de variedade de conhecimentos, haja vista as mudanças existentes no mundo atual. Desse modo, a formação do professor que ensina Matemática é foco de diferentes pesquisas no âmbito nacional e internacional.

Shulman (2005) afirma sobre a necessidade da construção do conhecimento de base para o professor, que por sua vez, é constituído de diferentes categorias. Dentre as categorias, o autor elege, o conhecimento didático do conteúdo, como a que permeia a maneira de pensar do professor e reflete nas escolhas das ações para formular e apresentar a matéria, ou seja, refere-se ao ensino da disciplina.

Em relação à Matemática, Ball, Thames e Phelps (2008) também apresentam diferentes dimensões, ou domínios do conhecimento do professor que ensina Matemática, na tentativa de delimitar quais os conhecimentos de fato relacionados com esse processo de ensino. Vale salientar que o mesmo conteúdo de ensino pode perpassar por vários dos domínios que serão discutidos em relação ao conteúdo de Combinatória, posto que essa classificação de fato permite uma melhor compreensão para a organização desse conhecimento.

Como base dessa classificação temos o *conhecimento comum do conteúdo*, sobre o qual recai qualquer compreensão dos conhecimentos necessários ao ensino de Matemática. Nesse domínio estariam os conhecimentos não necessariamente específicos ao ensino de Matemática ou ao especialista dessa disciplina, o que não quer dizer que todos sejam possuidores desse conhecimento. Por exemplo, no caso de Combinatória a resolução de problemas elementares utilizando o princípio multiplicativo.

O *conhecimento especializado do conteúdo*, encontra-se necessariamente como um domínio ligado ao ensino. Primeiro, ele é um conhecimento da Matemática, e, segundo, ele não é requerido em outra ação que não a de ensino. Por exemplo, quando um professor nota o uso indevido de uma estratégia na resolução de um problema pelo aluno, ou discute as propriedades de cada tipo de problema combinatório, por exemplo – ele está imerso nesse tipo de domínio de conteúdo.

No domínio *conhecimento do conteúdo e estudantes*, o professor deve antecipar quando alunos estão motivados e propor situações alternativas para elevar tal motivação. Faz parte desse domínio a análise de um erro, por parte de um aluno na resolução de um problema, ou de estratégia diferenciada nessa resolução. Numa situação de Combinatória em que o professor insista em certas estratégias, como por exemplo, a utilização de

fórmulas, ele pode buscar entender outras estratégias de resolução por parte dos alunos, como a utilização da árvore de possibilidades, está fazendo uso desse domínio de conhecimento.

A combinação de conhecimento sobre ensino e conhecimento sobre Matemática formam o domínio denominado *conhecimento do conteúdo e ensino*. Boa parte das tarefas de ensinar requer esse domínio. O planejamento de ensino, a preparação de uma sequência didática para determinado conteúdo, a elaboração de uma avaliação, a determinação de uma estratégia de superação das dificuldades dos alunos ou a escolha de um recurso didático fazem parte desse domínio. Um professor que deseje preparar uma ação pedagógica sobre Combinatória para turmas diferenciadas – de Ensino Regular ou de Educação de Jovens e Adultos – fará uso desse domínio.

O *conhecimento de horizonte do conteúdo* os autores entendem aquele conhecimento envolvido no encadeamento dos conteúdos curriculares. Por exemplo, professores que ensinam Combinatória no 4º ano, podem querer saber como tais conhecimentos serão abordados por professores que ensinarão tal conteúdo no 2º ano do Ensino Médio e vice-versa.

O último conhecimento proposto, o *conhecimento do conteúdo e do currículo*, é, evidentemente, fruto do refinamento mencionado anteriormente. Ele poderia estar contido no quarto domínio de conhecimento o conhecimento do conteúdo e de ensino, mas representa um avanço nesse processo de categorização. Recentemente, a consciência da proposta de introduzir o ensino da Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental faz parte desse tipo de conhecimento.

Rocha (2011) indica que a compreensão desses domínios e suas especificidades proporciona ao professor assumir posturas que apresentem a Combinatória como algo mais que um conjunto de regras e fórmulas prontas (p.31).

O professor pode, então, proporcionar em suas aulas a discussão de estratégias de resolução dos alunos, a utilização de situações que utilizem diferentes representações como a enumeração por listagem, a árvore de possibilidades ou que valorizem a percepção de regularidades existentes nas situações, diversificando o uso de fórmulas. A discussão, reflexão e a compreensão das propriedades existentes nos problemas combinatórios, como os invariantes de ordenação, repetição, escolha também são importantes e podem auxiliar os alunos no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

3. Método

Foram realizadas entrevistas semi-estruturada individuais devido ao caráter implícito que o objeto de pesquisa, ensino de combinatória, pode ter no Ensino Fundamental. Entrevistou-se seis professores dois professores dos anos iniciais, dois professores dos anos finais do Ensino Fundamental e dois do Ensino Médio, conforme apresentado Tabela 1.

Tabela 1. Características dos participantes da pesquisa.

| Prof. | Formação | Experiência | Rede |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|---------------------|
| PAI ₁ | Pedagogia; Especialização em Orientação Educacional e em Gestão Educacional; Mestrado (em andamento) - Ciências da Educação | 25 anos | Pública |
| PAI ₂ | Pedagogia; Mestrado em Educação. | 12 anos | Pública, Particular |
| PAF ₁ | Licenciatura em Ciências com habilitação | 12 anos | Pública, Particular |

| | | | |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|---------------------|
| | em Matemática; Especialização em Matemática; Mestrado (em andamento) | | |
| PAI ₂ | Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática; Especialização em Matemática; Mestrado (em andamento) | 10 anos | Pública, Particular |
| PEM ₁ | Licenciatura em Matemática; Mestrado em Educação | 8 anos | Pública |
| PEM ₂ | Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática; Especialização em Programação de Ensino de Matemática; Mestrado (em andamento) em Educação | 16 anos | Pública, Particular |

Observa-se a partir desse quadro a formação em pós-graduação em todos os entrevistados, o que foi considerado um aspecto positivo no decorrer das entrevistas, pois os participantes compreendiam os aspectos da pesquisa.

Na entrevista foram abordados aspectos referentes aos conhecimentos do conteúdo de Combinatória, aos conhecimentos pedagógicos de Combinatória e as ações pedagógicas que esses professores a partir de protocolos de resolução retirados da pesquisa de Pessoa (2009). Nesse artigo, foca-se na ação pedagógica do professor nas reflexões que fazer sobre a aula e materiais didáticos utilizados. Nesse momento da entrevista foram entregues os protocolos de resolução de alunos anteriormente observados na entrevista que possuíam erros e que foram identificados pelos sujeitos da pesquisa, a exemplo, Figura 1 sobre Esgotamento de todas as possibilidades na enumeração.

3. As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?

ALUNO D

Figura 1. Erro em Esgotamento de possibilidades

Esse protocolo foi escolhido da pesquisa de Pessoa (2009) devido também nessa pesquisa serem procedimentos comuns aos alunos tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio. Após essa análise foram foco da entrevista aspectos do planejamento da aula e a identificação de recursos para o ensino de Combinatória.

Com base nas discussões delineadas nos tópicos anteriores procurou-se identificar possíveis relações com as ações pedagógicas, ou ideia de prática que os professores evidenciaram a partir de suas falas, trazendo aspectos que demonstra que os diferentes domínios de conhecimento do professor pode ser considerado em seus comentários sobre sua aula e sobre a sua utilização de recursos didáticos.

4. Análise dos resultados

Após a observação do protocolo todos os professores, exceto o professor PAF₁, identificaram a dificuldades do Aluno D em esgotar as possibilidades. Observa-se agora os encaminhamentos dados pelos professores.

PAI₂: Acho que o Aluno D está incompleto. [...] O professor não pode está, acredito eu, direcionando, ele não pode mostrar, por isso é bom um trabalho que envolva toda sala. Um

trabalho em grupo. Cada grupo tem uma forma de chegar a uma resposta diferente do outro. Essas possibilidades não devem ser eliminadas. elas devem ser valorizadas e socializadas. Para que num outro momento ele utilize outra forma, e outra, e outra...para posteriormente eles terem noção de diferentes situações que eles vão se deparar com outros conteúdos Na Matemática é bem interessante que tem uma relação muito grande com a forma ...porque não

A partir desses extratos, observa-se a sugestão por parte dos professores dos anos iniciais de materiais concretos e a ênfase dada ao trabalho fundamentado na resolução de problemas com a socialização de estratégias dos alunos. Isso possibilita a construção do conceito em questão, trazendo principalmente no extrato de PAI₂ aspectos relativos ao planejamento e ao conhecimento dos seus alunos, que caracterizam o domínio conhecimento do conteúdo e estudantes.

Os professores de formação em Matemática focalizam seus comentários na discussão de possibilidades como pode-se observar no extrato a seguir.:

PAF₂: ... ele já entendeu a ideia de possibilidades[]. Se ele tivesse escrito 4 ai deixava claro que ele já tinha isso aqui como certo. Vamos partir do pressuposto que ele acredita que são 4 possibilidades. Acho que a gente precisaria tentar mostrar que existe outro tipo de possibilidades, que assim como Brasil em primeiro, França em segundo e Argentina em terceiro e pedindo outras situações para ir ampliando e ampliando as possibilidades, questionando e perguntando. Primeiro ele tem que compreender a ideia de possibilidade.

PEM₁: O Aluno D se focou num pedaço da questão....São os significados das expressões. O que significa para ele três primeiros colocados. Tenho que perguntar aos alunos o que essa questão está querendo dizer para você? De repente algum aluno diz só são 4 opções. Quais são as quatro? E eu faço o questionamento e os outros e saio permutando. Ai o aluno opa! ai ele vai começar a se questionar que tem algo mais além do que ele está pensando. Queremos que ele desenvolva isso.

Nota-se a estratégia evidenciada por esses professores são questionamentos, exposição dialogada, na qual o professor instiga os alunos a descobrir novas possibilidades. O professor PEM1 ainda ressaltou a dificuldade de compreensão do enunciado, isso relacionando aos conhecimentos do conteúdo. Eles parecem assumir uma atitude investigativa com o aluno, procuraram saber o que ele fez e como o que fez pode auxiliar nas propostas de aprendizagem.

Foram discutidas no estudo maior Rocha(2011) os erros como a compreensão de possibilidades, a ordenação ou não dos elementos, a multiplicação inadequada, entre outros. Após momento, focou-se nos aspectos relativos a aula de Combinatória.

Segundo Pimenta (2002) a ação desenvolvida pelos professores envolvida no processo de ensino, mostra-nos uma prática rica de possibilidades e limitações. O professor ao se defrontar com os problemas da sala de aula utiliza os conhecimentos que possui para escolher a atividade que se adéqua a realidade de seus alunos. No entanto, essa atividade pode ser desenvolvida pelo professor a partir de criação e da organização e sistematização de suas próprias estratégias, segundo a autora, por ser empírica, falta-lhe uma organização do saber construído, pois a construção do conhecimento requer pesquisa e sistematização desenvolvida em base metódica. Reconhece-se que existem diferenças entre o pensar e o agir e ainda diferenças entre se falar sobre a aula e o fazer a aula.

Desse modo, questionou-se aos professores sobre o planejamento de suas aula de Combinatória e que identificassem o aspecto que seria necessário priorizar. Observa-se agora extratos de seus comentários.

Os professores dos anos iniciais enfatizaram o uso do material concreto, as diferentes estratégias e mas não fizeram menção a conceitos de Combinatória, apresentando propostas que se adéquam a qualquer resolução de problemas.

PAI₁: Eu acho que se você trabalhar com a questão do material concreto de imagem faz com que a abstração deles seja mais rápida.[...] Explorar as possibilidades[...], para que o aluno

saiba o que o problema está pedindo. A gente tem que ficar muito atento ao comando ... A gente sabe que todos os alunos não são iguais, você vê as estratégias diferentes, as possibilidades, o uso do pensamento e ainda da criatividade

PAI₂: Eu acho que a questão que é mais significativa seria o professor poder possibilitar uma reflexão autônoma do aluno, nessa determinada situação e ele poder retomar, esquematizando as atividades com os alunos. É fundamental isso. E a utilização de material concreto também inicialmente. É fundamental também ouvir o aluno sobre o problema, trabalhar o enunciado, mostrar o enunciado e fazer uma leitura com os alunos refletindo esse enunciado, fazendo uma reflexão de inicialmente como eles resolveriam isso.

Observou-se que a ênfase dos professores dos anos iniciais foi colocada no desenvolvimento do conceito pelo aluno utilizando recursos didáticos e as diferenças entre os alunos nas estratégias utilizadas. A busca é pela autonomia do aluno na resolução de problemas, pois como diz Freire (1998) ensinar exige respeito a autonomia do educando. Nessa direção para ensinar a Combinatória é imprescindível que o professor respeite essa autonomia de escolha das representações e procedimentos de enumeração em todos os níveis. Concordando com a ênfase nas diferentes estratégias Pessoa e Borba (2009) defendem que a escola esteja atenta as diferentes formas de representação apresentadas pelos alunos, pois estas conjecturam os diversos modos de pensar sobre um mesmo problema. As autoras ainda refletem que sobre o papel da escola em aproveitar as estratégias desenvolvidas para auxiliá-los na construção da compreensão dos diversos tipos de problemas e no seu desenvolvimento conceitual.

Os professores dos anos finais do Ensino Fundamental observaram a questão do conteúdo de Combinatória: o princípio multiplicativo e possibilidades. A noção de contexto também foi enfatizada por PAF₁.

PAF₁: Eu tentaria fazer assim considerar o que ele usa no dia a dia dele apesar de ser hipotético. Por exemplo: se a gente tivesse com dinheiro e fosse lancha no Mc Donalds agora. E aí tivesse algumas opções de hambúrguer e outras opções de refrigerante. Vamos dizer que seja na cantina da escola hoje tem arroz, feijão, macarrão, galinha ou carne o que é que você pode escolher para seu prato? Só pode escolher 1. Depois eu usaria o princípio multiplicativo.

PAF₂: Acho que enfatizaria a ideia de compreender o que é possibilidades, porque parece que é um pouco complicado de entender. Porque eles associam muito possibilidades com coisa real. Então eles têm essa dificuldade de entender que a possibilidade não quer dizer de fato que tem que ser todos e sim que pode ser ou não. Porque se ele consegue entender essa possibilidade então ele vai decolar

Os professores do Ensino Médio enfatizaram aspectos referentes ao conteúdo de Combinatória, o uso de princípio multiplicativo, questões clássicas, a natureza diferenciada da Combinatória a utilização de jogos como roleta e a dificuldade de diferenciar problemas.

PEM₁: Olha a título de conteúdos eu procurei trabalhar com eles a parte do princípio multiplicativo, permutações, *arranjo* e combinações, tudo sem repetição, nada de circular, sem repetição, tudo simples como a gente chama *arranjo* simples e *combinação* simples.[...] Outro aspecto que eu tentei enfatizar são aquelas questões que eu costumo apelidar de questões clássicas. E o próprio vocabulário, o que é um anagrama que é um vocábulo da língua portuguesa que só aparece na Matemática na Análise Combinatória. É o único local.

PEM₂: Primeiro esse assunto de Combinatória e jogos a gente vê reportagens, tem gente que ganha em jogos utilizando isso. Primeiro colocaria essa ideia de jogos numa questão social, hoje muito utilizado em concursos. E é um assunto que está bem conectado a problemas da realidade. Isso seria enfatizado. [...] é um assunto que tem diferentes situações para serem propostas. Às vezes você pensa que é um *arranjo* e é uma *combinação*; você pensa que é uma *permutação* e é uma outra coisa mais arrojada.

Notamos ainda, que os professores de formação em Matemática enfatizavam os conceitos como a compreensão de possibilidades e a diferenciação dos problemas combinatórios, ainda a utilização na resolução dos problemas combinatórios o uso de

princípio multiplicativo. A noção de contextualização buscando situações da realidade dos alunos e dos jogos também é mencionada, porém não explicitadas

Observa-se como as diferentes realidades dos níveis de escolaridade modificam as propostas de intervenção e principalmente a postura que professores assumem diante da aula e do conteúdo. Parece-nos que, a especificidade da formação, e o modelo que é adotado pelos professores na universidade, interferem de forma decisiva nas práticas dos professores da escola básica. A vida acadêmica, os exemplos da forma como foi ensinado este ou aquele conteúdo, parece interferir no momento de decisão sobre a estratégia a ser utilizada. Associado a isto se somam o domínio do conhecimento do conteúdo e o conhecimento do ensino, que surge como um desafio na construção dessas aulas.

5. Considerações

A pesquisa revelou que, a aula de Combinatória de professores dos anos iniciais enfatizam a utilização do material concreto, a resolução de problemas e as diferentes estratégias de resolução dos alunos e não mencionaram conceitos de Combinatória; nos anos finais centraram a discussão no princípio multiplicativo e na construção da noção de possibilidades pelos estudantes; No Ensino Médio, a discussão enfatizou aspectos referentes ao conteúdo de Combinatória como o Princípio multiplicativo, e a utilização de questões clássicas, refletindo sobre a natureza diferenciada da Combinatória e a dificuldade na diferenciação dos problemas combinatórios. Acredita-se na troca de experiência entre os professores entrevistados pode auxiliar na reflexão de práticas e na construção do raciocínio combinatório pelos alunos.

Referencias

- Ball, D. L., Thames, M.H. e Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of teacher education*. 59(5), 389-407. Disponível em: <http://jte.sagepub.com/content/59/5/389>.
- Barreto, F. e Borba, R. (2010). Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. *X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador. Anais do X ENEM (pp. 1-10).
- Brasil Secretaria de Educação Fundamental (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Reidel, Dordrecht.
- Geração. Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação- UFPE: <http://geracaoufpe.blogspot.com.br/p/producoes.html>
- Pessoa, C. e Borba, R. (2009). Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *ZETETIKÉ*, 17(31), 105-155.
- Pimenta, S. G.(2002). *Saberes pedagógicos e atividades docentes*. São Paulo, Cortez.
- Rocha, C. e Borba, R.(2010). Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diferentes olhares. *Proceedings of the X Encontro Nacional de Educação Matemática*, Bahia, Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
- Rocha, C. A. (2011). Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos. Dissertação (Mestrado). Recife, Centro de Educação, PPGEDUMATEC - UFPE,

Shulman, L. (2005) Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma.
Profesorado: Revista de curriculum y formación del profesorado, 9(2), 1 -30.