

# Significado de la probabilidad frecuencial en futuros profesores

*Ortiz de Haro, Juan J.; Mohamed Maanan, Nordin; Serrano Romero, Luis*

Universidad de Granada

## Resumen

En los currículos escolares, vigentes en España, queda patente la importancia que se concede a la enseñanza de la probabilidad. Así, en el Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria (Ministerio de Educación, 2006), se enfatiza la necesidad de iniciar, desde el primer ciclo (6-8 años), el estudio de los fenómenos aleatorios y de hacer la enseñanza más activa y exploratoria, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos estadísticos para la toma de decisiones. Ahora bien, para que el cambio en la enseñanza de la probabilidad sea efectivo, se requiere mejorar la formación de los profesores, pues, sin una preparación específica, podrían transmitir a los estudiantes sus creencias, a veces erróneas.

En este trabajo pretendemos caracterizar el significado personal de la probabilidad frecuencial en futuros profesores de educación primaria. Para ello, presentamos un análisis detallado de las respuestas a dos problemas de probabilidad frecuencial, en una muestra de 167 futuros profesores de educación primaria de la Universidad de Granada, que comparamos con los resultados obtenidos por los alumnos de 10-14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997). Este estudio ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de significados personales (Godino, Batanero y Font, 2007) y mostrar que existen importantes dificultades relacionadas con la comprensión del concepto.

**Palabras clave:** Probabilidad frecuencial, Formación profesores.

## 1. Introducción

La enseñanza de la probabilidad ha alcanzado gran importancia en España, como puede observarse en el Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006), donde se enfatiza la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos aleatorios y de hacer la enseñanza más activa y exploratoria, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos estadísticos para la toma de decisiones. Estas recomendaciones también se recogen en los currículos de otros países (ej., National Council of Teachers Mathematics, 2000).

Para lograr estos objetivos se requiere mejorar la formación en probabilidad de los profesores (Stohl, 2005), pues, sin una preparación específica, podrían transmitir a los estudiantes sus creencias, a veces erróneas (Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006). Un paso previo es conocer el significado personal que los futuros profesores atribuyen a la probabilidad.

En este trabajo pretendemos caracterizar el significado personal de la probabilidad frecuencial en futuros profesores de educación primaria. Para ello, presentamos un análisis detallado de las respuestas a dos problemas de probabilidad frecuencial, en una muestra de 167 futuros profesores de educación primaria de la Universidad de Granada, y analizar después las semejanzas o diferencias con los resultados obtenidos por los alumnos de 10-14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997).

Según Godino, Batanero y Font (2007), para caracterizar el significado personal del enfoque frecuencial de la probabilidad en los futuros profesores de educación primaria, se deben analizar las prácticas realizadas por ellos durante la resolución de los problemas de

probabilidad propuestos, que son los indicadores empíricos utilizables en la evaluación del conocimiento de dichos profesores.

## 2. Formación de profesores y probabilidad

Aunque hay bastantes estudios sobre formación de profesores (ej., Llinares y Krainer, 2006; Wood, 2008), las investigaciones sobre formación de profesores, en el caso de la probabilidad, son limitadas. No obstante, se está estableciendo un cuerpo de conocimientos que destaca la importancia de tener en cuenta el conocimiento del contenido matemático de los docentes (Shulman, 1986) y como los formadores de docentes deben interesarse por dicho conocimiento (Ball, 2000).

Unos trabajos señalan la existencia de concepciones erróneas y dificultades de los profesores, en relación a la probabilidad (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001; Franklin y Mewborn, 2006; Mickelson y Heaton, 2004; Ortiz et al., 2006). Otros estudios muestran que los docentes tenían un conocimiento poco sólido de la probabilidad (Begg y Edwards, 1999; Carnell, 1997; Pereira-Mendoza, 2002; Watson, 2001) y del contenido pedagógico (Dugdale, 2001; Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi, 2008; Haller, 1997; López, 2006). Otras experiencias de enseñanza basadas en la simulación, pueden ayudar a la superación de algunos sesgos en el razonamiento de los profesores en formación (Sánchez, 2002; Batanero, Godino y Cañizares, 2005).

## 3. Método

La muestra participante estuvo formada por 167 futuros profesores de educación primaria de la Universidad de Granada, en su primer año de estudios. Todos ellos han recibido instrucción en probabilidad en los niveles educativos previos a la universidad, con diferente grado de profundización según la modalidad de bachillerato cursada.

El cuestionario utilizado, que se describe a continuación, consta de dos problemas sobre el enfoque frecuencial de la probabilidad, tomados de Green (1983), que se propusieron para su resolución a los futuros profesores antes de la instrucción.

Problema 1. Una moneda equilibrada se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. De las siguientes frases, señala la que consideres correcta:

- (A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA ..... \_\_\_\_
- (B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ..... \_\_\_\_
- (C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ... \_\_\_\_
- (D) No lo sé..... \_\_\_\_

¿Por qué?

En este problema se trata de evaluar la percepción de la independencia en ensayos repetidos en las mismas condiciones y que han sido descritos por Truran y Truran (1997). Se exponen los resultados de los cinco lanzamientos anteriores para ver si influye en la comparación de las probabilidades. Es posible detectar efectos de recencia negativa o positiva, sesgos que han sido descritos en las investigaciones de Piaget e Inhelder (1951) y que posteriormente han sido atribuidos a la heurística de la representatividad por Khaneman, Slovic y Tversky (1982).

Problema 2. El profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas. Algunas caen con la punta para arriba y otras caen hacia abajo. El resultado fue: ARRIBA = 68; ABAJO = 32. Después el profesor pidió a una niña que repitiera el experimento.

De la lista siguiente elige el resultado que tú crees que obtendrá la niña:

- (A) ARRIBA = 36, ABAJO = 64 ..... \_\_\_\_

- (B) ARRIBA = 63, ABAJO = 37 ..... \_\_\_\_
- (C) ARRIBA = 51, ABAJO = 49 ..... \_\_\_\_
- (D) Todos los resultados anteriores tienen la misma probabilidad .... \_\_\_\_

¿Por qué?

En este problema se pide comparar probabilidades binomiales en el experimento, disponiendo para ello de una estimación de probabilidad “a priori” de tipo frecuencial, ya que en este caso no se puede aplicar el principio de indiferencia. Esperamos que algunos estudiantes consideren los sucesos como equiprobables, ignorando el resultado del lanzamiento previo. Esta insensibilidad hacia las probabilidades “a priori” de los resultados está considerada por Khaneman, Slovic y Tversky (1982) como una de las causas de la heurística de la representatividad.

#### 4. Resultados

A partir del análisis de las prácticas realizadas por los futuros profesores de educación primaria para resolver los dos problemas se han obtenido los siguientes resultados.

##### 4.1. Análisis del problema 1

En la Tabla 1 presentamos los porcentajes de los diferentes tipos de respuestas encontrados al problema 1. Como puede observarse, el porcentaje de respuestas correctas de los futuros profesores es bastante alto (89,2%). Entre las respuestas incorrectas hay un 5,1 % de futuros profesores que consideran que al haber salido cinco veces cara, ahora es más probable que en el siguiente lanzamiento de la moneda obtengamos cruz, debido quizás a que no manejan adecuadamente el concepto de independencia de sucesos.

Tabla 1. Porcentaje de tipos de respuestas al problema 1

Respuestas	Futuros profesores n=167	Alumnos (10-14 años) n=251
A. Más probable que salga cara	2.5	9.2
B. Más probable que salga cruz	5.1	6.4
C. Igual de probable (*)	89.2	82.9
D. No contesta	3.2	1.6

(\*) Respuesta correcta

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997), comprobamos que el porcentaje de respuestas correctas entre los futuros profesores es algo más alto. Entre los alumnos, el porcentaje más alto de respuestas incorrectas corresponde a los que consideran que es más probable que vuelva a salir cara (9,2 %), seguido de los opinan que es más probable que salga cruz (6,4%). Es de destacar que entre los que responden de forma incorrecta, los alumnos responden con mayor frecuencia la opción (A, recencia positiva) que la (B, recencia negativa) mientras que entre los futuros profesores ocurre al revés. Esto podría tener su explicación en un efecto no deseado de los programas de instrucción de estadística que se imparte a los futuros profesores, basándose en el cual, dichos profesores tienden a equilibrar las frecuencias.

Entre los argumentos utilizados por los futuros profesores, se observa que la justificación mayoritaria proporcionada por ellos es la correcta “*puede salir cualquiera de los dos resultados*” (77,9%), distinguiendo entre los que aplican la regla de Laplace (53,8%) y los que han respondido de forma correcta pero sin hacer uso de la probabilidad (24,1%). Entre los argumentos incorrectos, hay un importante porcentaje de futuros profesores que considera que “*se debe al azar*” (9,5%), seguido de los que opinan que es más difícil que vuelva a salir cara (5,7%).

##### 4.2. Análisis del problema 2

En la Tabla 2 presentamos los porcentajes de los diferentes tipos de respuestas encontrados al problema 2. Como puede observarse, este problema es más complicado para los futuros profesores que el primer problema, ya que el porcentaje de respuestas correctas, en este caso, es bastante más bajo (23,4%). Entre las respuestas incorrectas, destaca el alto porcentaje de futuros profesores que considera que todos los resultados propuestos tienen la misma probabilidad (63,3%), no valorando la información proporcionada en el enunciado del problema. Porcentajes menores son los que opinan que es más probable que vuelvan a salir los otros dos resultados.

Tabla 2. Porcentaje de tipos de respuestas al problema 2

Respuestas	Futuros profesores n=167	Alumnos (10-14 años) n=251
A. Arriba=36 Abajo=64	1.9	6.6
B. (*) Arriba=63 Abajo= 37	23.4	17
C. Arriba=51 Abajo=49	3.2	7.2
D. Todos tienen la misma probabilidad	63.3	66.1

(\*) Respuesta correcta

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997), comprobamos que el porcentaje de respuestas correctas entre los futuros profesores es algo mayor, y que el porcentaje más alto de respuestas incorrectas de los alumnos, tal y como ocurre en los futuros profesores, corresponde a los que consideran que todos los resultados tienen la misma probabilidad (66,1 %), seguido con diferencia de los que opinan que es más probable que vuelvan a salir los otros dos resultados. En ambos grupos existe una fuerte incidencia en el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992).

Entre los argumentos utilizados por los futuros profesores, se observa que el porcentaje de argumentos correctos es bastante bajo (23,4%), distinguiendo entre los que aducen razones físicas (19%) y los que basan su justificación en la información aportada por el experimento realizado por el profesor anteriormente (4,3%). Entre los argumentos incorrectos, hay un alto porcentaje de futuros profesores que considera que los dos sucesos “*tienen la misma probabilidad*” (35,4%), lo que muestra que no distinguen correctamente entre sucesos equiprobables y no equiprobables, seguido de los que opinan que “*se debe al azar*” (8,2%). Destaca también el alto porcentaje de futuros profesores que no aporta ningún argumento (32,9%).

## 5. Discusión y conclusiones

El análisis de las prácticas personales de los futuros profesores de educación primaria al realizar la tarea propuesta, ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de significados personales manifestadas por ellos cuando resuelven problemas de probabilidad basados en el enfoque frecuencial, así como las dificultades y errores más frecuentes, similares en algunos casos a las de los alumnos de 10-14 años, del nivel educativo donde ejercerán profesionalmente.

Hay un porcentaje importante de futuros profesores que resuelven de forma incorrecta el problema 1 (lanzamiento de monedas), debido quizás a que no manejan adecuadamente el concepto de independencia (Truran y Truran, 1997). Como hemos comprobado, el problema 2 (lanzamiento de chinchetas) es más complicado para los futuros profesores que el problema 1, destacando la alta incidencia del sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), al considerar que todos los resultados propuestos tienen la misma probabilidad, no valorando la información proporcionada en el enunciado del problema. Estas dificultades coinciden

con las descritas por Begg y Edwards (1999) con profesores en prácticas de enseñanza elemental y las referidas por Carnell (1997) con profesores de enseñanza media al resolver problemas de probabilidad.

Ball (2000) indica que el formador de profesores, al abordar la enseñanza de la probabilidad, debe tener en cuenta las dificultades y errores de los futuros profesores en la resolución de problemas de probabilidad, además del razonamiento estadístico. En consecuencia, debemos diseñar un itinerario formativo adecuado para mejorar la formación probabilística de los futuros profesores de educación primaria, que debe incluir las componentes didácticas básicas (Batanero, Godino y Roa, 2004). Además se debe realizar un cambio metodológico que incida en el trabajo basado en resolución de problemas, experimentación con fenómenos reales, proyectos y utilización de la simulación, que, además de mejorar la comprensión proporcionan modelos de la forma en que han de trabajar en clase con sus alumnos.

Agradecimientos: Esta investigación forma parte del Plan Propio de Investigación de la Universidad de Granada: Programa 20 y de los Proyecto SEJ2007-60110/EDUC, MEC-FEDER y EDU2010-14947, MICIIN y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

## Referencias

- Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz. España.
- Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.
- Batanero, C., Godino, J. D., & Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train pre-service school teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.
- Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). *Training teachers to teach probability*. *Journal of Statistics Education*, 12. Disponible en <http://www.amstat.org/publications/jse/>
- Begg, A. y Edwards, R. (1999, August). Teachers ideas about teaching statistics. Comunicación presentada en la *Reunión Anual de the Australian Association for Research in Education y the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne, Australia.
- Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.
- Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad*. Tesis Doctoral, Universidad de Cádiz. España.
- Carnell, L. J. (1997). *Characteristics of reasoning about conditional probability (preservice teachers)*. Tesis Doctoral. University of North. Carolina-Greensboro.
- Dugdale, S. (2001). Pre-service teachers use of computer simulation to explore probability. *Computers in the Schools* 17 (1/2), 173-182.
- Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of preK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. (2008). Assessing and developing

- pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey. México.
- Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey, P. Holmes, & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). Universidad de Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.
- Haller, S. K. (1997). *Adopting probability curricula: The content and pedagogical content knowledge of middle grades teachers*. Tesis Doctoral. University of Minnesota.
- Khaneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- Llinares S., & Krainer K. (2006). Mathematics student teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429 – 459). Rotherdam/Taipei: Sense Publishers.
- López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahía), Brasil: International Association for Statistics Education.
- Mickelson, W. T. y Heaton, R. (2004). Primary teachers’ statistical reasoning about data. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 353-373). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 293.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA, NCTM.
- Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. Gonzáles & M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM. ISBN: 84-8127-156-X.
- Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics*. Cape Town: International Association for Statistics Education.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Sánchez, E. S. (2002). Teachers beliefs about usefulness of simulations with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics*. Cape Town: International Association for Statistics Education.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*. Dodrecht: Kluwer.
- Truran, J. y Truran, K. (1997). Statistical independence - One concept or two? Implications for research and for classroom practice. En B. Phillips (Ed.), *Papers on statistical education*

*presented at ICME-8 (pp. 87-100). Swinburne University of Technology.*

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education* 4 (4), 305-337.

Wood, T. (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.