



Modelación Numérica de la Circulación de las Aguas en Zonas Costeras

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo matemático que describe el proceso de circulación de las aguas en zonas costeras bajas, el mismo es resuelto numéricamente con ayuda del método de los elementos finitos (FEM). Sobre la base del modelo numérico obtenido se implementó un paquete de programas para la simulación

ABSTRACT

This research shows a mathematical model that describes water circulation process on the shallow waters, which is numerically solved through the use of the finite elements method (FEM). On the basis of the numerical model obtained, a pack of programs for the simulation of this coastal process was implemented.

José L. Agüero Rojas
Alina Gaínza Roche
Robel Sánchez Ramírez
Jorge S. Pérez Ronda
Universidad de Holguín, Cuba.

Daniel Alfaro Vigo
Laboratorio de Dinámica de Costas de Holguín, Cuba.

1. INTRODUCCION

El proceso físico de la circulación de las aguas tiene su génesis fundamentalmente en el viento, marea y corrientes marinas. El viento es uno de los causantes principales del oleaje, este oleaje puede transformarse por el efecto de la fricción del fondo, estructuras marítimas, embarcaciones, etc. La marea durante el flujo y reflujo arrastra grandes masas de aguas, produciendo en ese accionar las conocidas corrientes de mareas. Las corrientes marinas se caracterizan por su velocidad y dirección y pueden ser causadas por el viento, diferencias de gradientes de la densidad del agua, y configuración geométrica del sistema costero, las mismas tienen una participación con

siderable en el movimiento de las aguas. Es evidente, que conformar un modelo matemático para estudiar la circulación de las aguas, que tenga en cuenta todas las características antes señaladas es en extremo complejo, por tal motivo en este trabajo se presenta un modelo matemático que permite estudiar el efecto de la marea sobre las zonas costeras, el mismo se basa en las conocidas ecuaciones de aguas poco profundas. Estas ecuaciones han sido presentadas en diversas referencias [5,6,7,9], pero en el presente trabajo, se toman como punto de partida las ecuaciones que aparecen en la referencia [1], estas vienen dadas como sigue.

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial(\rho H)}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q_1^2}{H} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{q_1 q_2}{H} \right] \right\} = B_1^* \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q_1 q_2}{H} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{q_2^2}{H} \right] \right\} = B_2^* \quad (1.3)$$

Siendo B_1^* y B_2^* las expresiones siguientes:

$$B_1^* = f q_2 + \gamma^2 \rho_a W^2 \cos \varphi - \left[\frac{g}{c^2} \right] \frac{1}{\rho} \frac{q_1 [q_1^2 + q_2^2]^{1/2}}{H^2} - \rho g H \frac{\partial(H-h)}{\partial x}$$

$$B_2^* = -f q_1 + \gamma^2 \rho_a W^2 \sin \varphi - \left[\frac{g}{c^2} \right] \frac{1}{\rho} \frac{q_2 [q_1^2 + q_2^2]^{1/2}}{H^2} - \rho g H \frac{\partial(H-h)}{\partial y}$$

La relación (1.1) es la ecuación de continuidad y las expresiones (1.2.) y (1.3) son las ecuaciones de movimiento para aguas poco profundas. Estas ecuaciones diferenciales tienen como condiciones de contorno al flujo normal en el contorno terrestre S_1 y a la elevación de las aguas $H = h +$ en el contorno oceánico S_2 . Significando h la

batimetría y S la elevación temporal del agua a partir de la superficie media. q_1, q_2 son los flujos máxicos, que junto a la elevación de las aguas H

$$\int_{(A)} \left\{ \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial(\rho H)}{\partial t} \right\} \delta H dA = \int_{(S_1)} [q_n - \bar{q}_n] \delta H dS \quad (1.5)$$

$$\int_{(A)} \left\{ \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q_1^2}{H} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{q_2 q_1}{H} \right] \right\} - B_1^* \right\} \delta q_1 dA = 0 \quad (1.6)$$

$$\int_{(A)} \left\{ \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q_2 q_1}{H} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{q_2^2}{H} \right] \right\} - B_2^* \right\} \delta q_2 dA = 0 \quad (1.7)$$

definen el campo de las variables. Los otros términos significan:

f - Coeficiente de Coriolis

W - Velocidad del viento

ρ_a - Densidad del aire

γ - Coeficiente de tensión del viento

φ - Angulo de la dirección del viento

g - Constante de gravedad de la tierra

c - Coeficiente de fricción de Chezy

2. Discretización del modelo Matemático

Con el objetivo de obtener las ecuaciones de elementos finitos se expresan las relaciones (1.1), (1.2) y (1.3) junto a sus condiciones de contorno con

ayuda del método de los residuos ponderados.

Donde $\delta q_1, \delta q_2, \delta H$ son variaciones que satisfacen las condiciones de contorno de los flujos y las elevaciones. Las ecuaciones anteriores son el punto de partida para obtener las ecuaciones de elementos finitos. Escogiendo una función de aproximación lineal para q_i y H se obtiene para un elemento finito triangular con tres nudos las ecuaciones discretizadas siguientes:

$$M \dot{q}_1^{(e)} = \left\{ fM q_2^n + A \frac{\chi_1}{3} e_1 - A \frac{\chi_2}{3} e_1 \frac{\bar{q}_1 [\bar{q}_1^{-2} + \bar{q}_2^{-2}]^{1/2}}{\bar{H}^2} - \frac{\rho g}{2A} MH^n b^T H^n \right. \\ \left. + \frac{\rho g}{2A} MH^n b^T H^n - \frac{1}{3} e_1 \frac{\bar{q}_1 b^T q_1^n \bar{H}}{\bar{H}^2 \rho} + \frac{1}{6} e_1 \frac{\bar{q}_1^2 b^T H^n}{\rho \bar{H}^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{6} e_1 \frac{c^T q_1^n \bar{q}_2 \bar{H}}{\bar{H}^2 \rho} - \frac{1}{6} e_1 \frac{\bar{q}_1 c^T q_2^n \bar{H}}{\bar{H}^2 \rho} + \frac{1}{6} e_1 \frac{\bar{q}_1 \bar{q}_2 c^T H^n}{\bar{H}^2 \rho} \right\}$$

$$M \dot{q}_2^{(e)} = \left\{ -fM q_1^n + \frac{\chi_3}{3} e_1 - \frac{1}{6} \chi_2 e_1 \frac{\bar{q}_2 [\bar{q}_1 + \bar{q}_2]^{1/2}}{\bar{H}^2} - \frac{\rho g}{2A} MH^n c^T H^n \right. \\ \left. + \frac{\rho g}{2A} MH^n c^T H^n - \frac{1}{6} e_1 \frac{\bar{q}_2 b^T q_1^n \bar{H}}{\bar{H}^2 \rho} - \frac{1}{6} e_1 \frac{\bar{q}_1 b^T q_2^n \bar{H}}{\rho \bar{H}^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{6} e_1 \frac{\bar{q}_1 \bar{q}_2 b^T H^n}{\bar{H}^2 \rho} - \frac{1}{3} e_1 \frac{\bar{q}_2 c^T q_2^n \bar{H}}{\bar{H}^2 \rho} + \frac{1}{6} e_1 \frac{\bar{q}_2 c^T H^n}{\rho \bar{H}^2} \right\} \quad (1.8)$$

$$MH \dot{H}^{(e)} = \frac{1}{\rho} \{ Bq_1^n + Cq_2^n - V_n \}$$

Para las dos primeras ecuaciones de la relación (1.8) los términos vienen dados:

$$M_{ij} = \frac{A}{12} (1 + \delta_{ij}) \quad i, j = 1, 2, 3$$

(δ_{ij} es la función de Dirac)

$$e_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad (\chi_1 = \gamma^2 \rho_a W^2 \cos \varphi)$$

$$\chi_2 = \left[\frac{g}{c^2} \right] \frac{1}{\rho}; \quad (\chi_3 = \gamma^2 \rho_a W^2 \sin \varphi)$$

$$b^T = \{ b_1 b_2 b_3 \}$$

$$c^T = \{ c_1 c_2 c_3 \}$$

$$b_i = y_j - y_k \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

$$c_i = X_k - X_j$$

Los otros coeficientes se obtienen a través de una permutación cíclica. para la última ecuación se tiene:

$$B_{ij} = \frac{1}{6} b_i \quad C_{ij} = \frac{1}{6} c_i;$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

Con el objetivo de obtener

algoritmos orientados a objetos eficientes en este trabajo se independiza el contorno de su dominio, esto se logra desde el punto de vista computacional definiendo un **objeto contorno** que tenga vida propia y desde el punto de vista matemático desarrollando un elemento finito lineal para el contorno con dos nudos. Teniendo en cuenta lo anterior, para el término del contorno de la última ecuación de (1.8) se obtiene.

$$V_n = \bar{q}_n \frac{1}{2} e ; \quad e = \{1 \ 1\}$$

3. METODO DE SOLUCION

La solución numérica de las ecuaciones diferenciales se

$$q_{1(i+1)}^k = q_{1(i)} + \left\{ F_1(q_{1(i)}, q_{2(i)}, H_{(i)}, t_i) + f_1(q_{1(i+1)}^{k-1}, q_{2(i+1)}^{k-1}, H_{i+1}^{k-1}, t_{i+1}) \right\}$$

llevaron a cabo con ayuda de los esquemas numéricos de los trapecios, Runge - Kutta de cuarto orden y Runge - Kutta de cuarto orden con control del paso, debido a que el primero es relativamente rápido y los otros dos son considerados métodos de alta precisión. Para aplicar los métodos anteriores se lleva, por ejemplo, la primera ecuación diferencial de la relación (1.8) a la forma cómoda siguiente.

$$\dot{q}_1 = f(q_1, q_2, H, t) \quad (1.9)$$

El esquema de los trapecios adaptado para ser iterado se puede describir como sigue.

La iteración se repite hasta alcanzar que se cumpla la condición,

$$\left\| q_{1(i+1)}^k - q_{1(i+1)}^{k-1} \right\| < \varepsilon$$

Siendo ε un número positivo muy pequeño. Para las otras dos relaciones de la (1.8) se realiza la misma operación de forma simultánea.

El esquema de Runge-Kutta de cuarto orden [2] viene dado de la siguiente manera.

$$q_{1(i+1)} = q_{1(i)} +$$

$$\frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Significando cada término lo siguiente:

$$k_1 = f_1(t_i, q_{1(i)}, q_{2(i)}, H_{(i)})$$

$$k_2 = f_1(t_i, \frac{\Delta t}{2}, q_{1(i)} + \frac{\Delta t}{2} k_1, q_{2(i)} + \frac{\Delta t}{2} k_1, H_{(i)} + \frac{\Delta t}{2} k_1)$$

$$k_3 = f_1(t_i, \frac{\Delta t}{2}, q_{1(i)} + \frac{\Delta t}{2} k_2, q_{2(i)} + \frac{\Delta t}{2} k_2, H_{(i)} + \frac{\Delta t}{2} k_2)$$

$$k_4 = f_1(t_i, \Delta t, q_{1(i)} + \Delta t k_3, q_{2(i)} + \Delta t k_3, H_{(i)} + \Delta t k_3)$$

El método de Runge - Kutta con control del paso se diferencia del anterior solamente en que se controla el paso de integración, esto se logra con ayuda de la extrapolación de Richardson [3,4].

4. ASPECTOS COMPUTACIONALES

Sobre la base de las ecuaciones discretizadas anteriores se desarrolló un software de elementos finitos en el lenguaje de programación orientado a objeto C++, el mismo está compuesto por los módulos de pre-proceso, cálculo y post-proceso. Durante el diseño del software se desarrolló una

jerarquía de objetos para la implementación del mismo. Esta jerarquía de objetos tiene en cuenta los criterios de la reusabilidad de los códigos, arquitectura abierta y fácil mantenimiento.

Por la importancia que tiene el módulo de cálculo se presenta la jerarquía de objetos seguida en el mismo.

```

Circ1_FEM
    Circ2_FEM
        Circ3_FEM
            DBoundData
            DConData
            Lmatrix
                Lvector
            Gmatrix
                Gvector
    
```

La clase Circ1_FEM es la clase base y contiene métodos encargados de realizar las operaciones de los términos de la parte derecha de las ecuaciones (1.8) y el esquema de integración de los trapecios.

Las otras clases Circ2_FEM y Circ3_FEM son clases derivadas de la clase base y contienen en lo fundamental los métodos de solución de Runge-kutta cuarto orden y Runge-Kutta cuarto orden con control del paso.

Las otras clases poseen métodos y atributos que están asociados a las condiciones de contorno e iniciales, tratamiento de operaciones y vectoriales locales y globales.

5. ALGUNOS ASPECTOS SOBRE LA VALIDACION DEL METODO NUMERICO.

El proceso de validación del modelo numérico es una de las

etapas más importantes de la modelación, ya que en el mismo se puede precisar si el modelo refleja verdaderamente la realidad física y si cumple con los objetivos para el cual fue concebido.

Para llevar a cabo este proceso se dividió el mismo en dos etapas fundamentales:

- Pruebas cualitativas

- Pruebas cuantitativas

La prueba cualitativa es aquella para la cual se excita el modelo, para que el mismo reproduzca un estado físico ya conocido a priori. La prueba cuantitativa se basa en la comparación de los resultados simulados con soluciones analíticas, numéricas y datos de campo. En este trabajo se llevaron a cabo diferentes tipos de pruebas cualitativas entre ellas se encuentran la de conservación de la masa, de fricción y de simetría. Para efectuar las pruebas cuantitativas, las cuales aparecen de forma detallada en

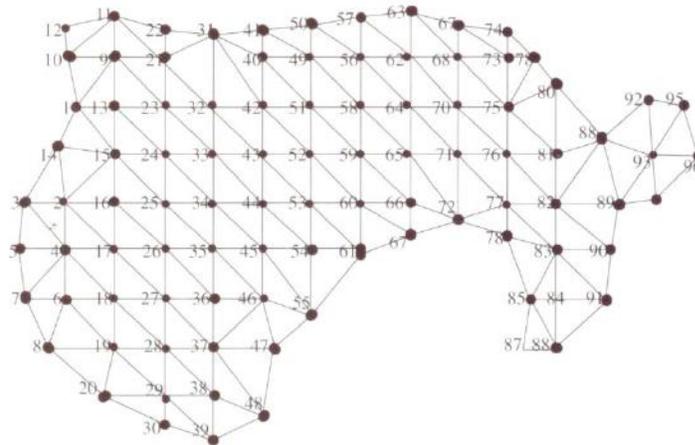


Figura No. 1
Malla elemento finitos de la bahia de Nipe

el trabajo [11], se escogió la solución analítica obtenida de la simplificación hecha a las ecuaciones de movimiento en la referencia [8] y las soluciones numéricas presentadas en el trabajo [5]. Para comparar el modelo con datos de campo se

realizó un estudio de circulación para dos ciclos de marea semidiurna a la bahía de Nipe, la cual está situada en la costa norte de la provincia de Holguín.

Para realizar el estudio se

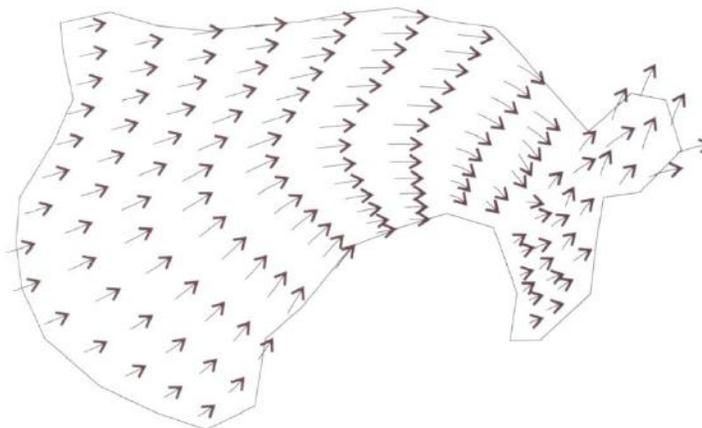


Figura No. 2
Vectores de velocidad para $t = 24000s$.

conformó el modelo de la bahía como muestra de la fig.1. Debido a la falta de información de campo se llevó a cabo la calibración del modelo para obtener el coeficiente de fricción con ayuda de las mediciones de campo realizadas por la referencia [10] en el período de Mayo - Junio de 1992.

Después de ser calibrado el modelo se realizó el análisis a la bahía para una onda de marea,

$$\xi = 0.2483 + 0.1546 \cos(2\pi t/T) + 0.2585 \sin(2\pi t/T)$$
 (nudos 92, 95, 96)

un paso de integración de 4 s y un coeficiente de fricción de $32 \text{ m}^{1/2} / \text{s}$. Del cálculo se obtuvieron las velocidades horizontales y la elevación de las aguas. Estos resultados fueron verificados con los datos de campo del período de Noviembre - Diciembre [10]. A continuación se presenta, en la fig. 2. los patrones de circulación durante el refluo obtenidos para el tiempo $t = 24000\text{s}$

6.CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró de forma breve las secuencias seguidas durante la modelación por elementos finitos de la circulación de las aguas en zonas costeras de poca profundidad. Este modelo permite realizar en lo fundamental estudios de marea teniendo en cuenta los efectos del viento, rotación de la tierra, fricción del fondo y configuración de la región costera.

BIBLIOGRAFIA

- ◆ 1. CONNOR J and BREBBIA C. A. , Finite element techniques for fluid flow, Butterworths, 1976.
- ◆ 2. ADEY R. A and BREBBIA C. A. , Basic computational techniques for engineers, Pentech Press Ltd, 1983.
- ◆ 3. BURDEN R. L. and FAIRES D , Numerical analysis, PWS-KENT publishing co., 1981.
- ◆ 4. DANKERT J , Numerische methoden der mechanik, fachbuchverlag Leipzig, 1977.
- ◆ 5. KOUTITAS C. G. , Mathematical model in coastal engineering, Pentech Press LTD, 1988.
- ◆ 6. NINOMIYA H. and ONISHI K. , Flow analysis using a PC, Computational Mechanics Publications, 1991.
- ◆ 7. PINDER G. F and GRAY W. G. , Finite element simulation in surface and subsurface hidrology, Academic Press, 1977.
- ◆ 8. TAYLOR C. and DAVIS J.M. , Tidal propagation and dispersion in estuaries, Finite element in fluid Vol. 1, John Wiley & Sons, 1975
- ◆ 9. ZIENKIEWCZ O. C. , El método de los elementos finitos, Reverte SA, 1982.
- ◆ 10. CiMAB , Resultados de las investigaciones de campo Mayo - Junio y Noviembre - Diciembre de 1992, 1992.
- ◆ 11. AGÜERO ROJAS J. L. , Modelación y simulación por elementos finitos de la circulación de las aguas y dispersión de sustancias en zonas costeras, Tesis de doctorado, 1996.