

ALGORITMO DE INTEGRACIÓN PARA MATERIALES NO LINEALES CONSIDERANDO LOS EFECTOS DE VISCOPLASTICIDAD, ENDURECIMIENTO CINEMÁTICO NO LINEAL Y DAÑO

JUAN DAVID GÓMEZ*

RESUMEN

En el Método de Elementos Finitos (MEF) la respuesta de materiales no lineales se considera por medio de formulaciones incrementales introduciendo una variable de tiempo. En el caso de materiales cuya respuesta es independiente de la velocidad de deformación, dicha variable se considera como un seudotiempo; en caso contrario, dicha variable tiene significado físico. Debido a su formulación incremental, el modelo constitutivo debe ser integrado en el tiempo a nivel local. En este artículo se discute un algoritmo de uso común en la literatura, pero incorporando adicionalmente los efectos acoplados de leyes de endurecimiento cinemático no lineal, viscoplasticidad y daño. El algoritmo se implementa en una plataforma de elementos finitos. Como procedimiento de validación del algoritmo, el modelo se particulariza para una ley de flujo viscoplástico disponible en la literatura para soldaduras eléctricas. Los resultados de las simulaciones se comparan con respuestas experimentales existentes.

PALABRAS CLAVE: elementos finitos; modelos constitutivos; algoritmos de integración; plasticidad.

ABSTRACT

In the Finite Element Method (FEM) material non-linearities are considered through incremental formulations in terms of a pseudo-time variable for the case of rate independent models and a real time variable in the case of rate-dependent models. The incremental statement of the problem implies that the constitutive models need to be time-integrated at the local level. In this article we discuss a standard algorithm available in the literature where additionally we have incorporated the effects of non-linear kinematic hardening, viscoplasticity, and damage. The algorithm is incorporated into a FEM code. In order to verify the correctness of our implementation we have particularized the model to the case of a creep law available from literature for solder alloys. Numerical simulation results are compared with experiments taken from the literature.

KEYWORDS: finite element analysis; constitutive modeling; integration algorithms; plasticity.

* Ingeniero Civil, Universidad de Medellín. PhD Candidate, Mecánica computacional. MSc Structural Engineering, University at Buffalo, The State University of New York. Asistente de Investigación. Laboratorio de Empaquetamiento Electrónico, Universidad de Buffalo. juandgomez@yahoo.com jdg8@buffalo.edu

1. INTRODUCCIÓN

La mecánica computacional ha sido ampliamente utilizada durante los últimos 40 años como herramienta de solución de diversos problemas en ciencia e ingeniería. Dichos problemas, ya sea por la complejidad de sus modelos matemáticos, condiciones de frontera o geometría misma son prácticamente insolubles por otros medios. Más aún, diferentes métodos computacionales se han implementado y distribuido en forma de códigos de uso comercial de propósito general.

Entre los métodos computacionales se destaca el método de los elementos finitos (MEF), que ha pasado por intensas etapas de desarrollo tecnológico y puede considerarse como la herramienta computacional por excelencia entre la comunidad científica e ingenieril. Algunos de los códigos de multiuso más conocidos son ANSYS, ABAQUS y COSMOS, los cuales tienen la capacidad de resolver problemas de distribución de esfuerzos, transferencia de calor, propagación de ondas, electromagnetismo y otros, utilizando diversos modelos de respuesta para los materiales considerados.

En particular, en el caso del análisis de esfuerzos en un medio continuo con materiales elásticos lineales, el problema puede considerarse agotado y las contribuciones actuales se reducen más bien a modelaciones con complejidades desde el punto de vista geométrico (métodos de mallado) y de las condiciones de frontera (por ejemplo, el problema de contacto).

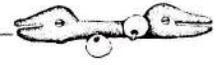
En el caso del MEF en aplicaciones elásticas, el problema se reduce a la solución de un sistema lineal de ecuaciones algebraicas. Sin embargo, esto no ocurre si se consideran respuestas no lineales representadas por medio de diversos modelos constitutivos. En ese caso, aún se emprenden grandes esfuerzos de la comunidad científica, tanto en planteamientos de los modelos mismos como de los algoritmos para su tratamiento computacional. En este artículo se trata el segundo problema y, en particular, se hace referen-

cia al caso del algoritmo de integración de modelos constitutivos incorporando los efectos combinados de viscoplasticidad, endurecimiento cinemático no lineal y variables de daño para el caso de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos. Dicha combinación no se encuentra disponible o incorporada de manera directa en los programas de software comercial, lo cual limita la consideración de modelos constitutivos más realistas.

El modelo presentado es general en el sentido de que no hay restricción sobre la ley de flujo viscoplástico que se considera, ni en la variable de estado que describe el daño en el sistema. Tratándose del MEF y considerando el punto de vista netamente computacional, las soluciones globales para el modelo discretizado por elementos finitos generalmente se obtienen por medio de un proceso incremental-iterativo (por ejemplo, un esquema de Newton-Raphson). En este proceso un punto clave lo representa la integración temporal del modelo constitutivo.

En el caso de las formulaciones clásicas de desplazamientos controlados mediante una secuencia de intervalos discretos de tiempo, las ecuaciones de evolución para los modelos constitutivos son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, las cuales son altamente no lineales, acopladas y pueden ser matemáticamente rígidas. Las ecuaciones globales se plantean en términos de una variable de tiempo y la totalidad T del análisis se divide en una serie de incrementos de tamaño Δt . Durante cada intervalo la respuesta se determina mediante un proceso iterativo hasta encontrar un estado de equilibrio. Una vez se encuentra una solución de equilibrio, la respuesta se actualiza al instante $t + \Delta t$.

En el planteamiento estándar basado en deformaciones, el campo de desplazamientos se impone de manera proporcional al tamaño del intervalo y compatible con las condiciones de frontera del modelo en consideración. Posteriormente, el estado de esfuerzos resultante de las deformaciones impuestas se determina mediante un proceso de integración temporal de



las funciones de evolución del modelo constitutivo. Este proceso o algoritmo de integración es de importancia capital, ya que puede afectar tanto la precisión de la solución como su tasa de convergencia. Por ejemplo, considerando la precisión es importante señalar que los vectores de fuerzas residuales (fuerzas residuales excedentes que no satisfacen la condición de equilibrio) se obtienen directamente del estado de esfuerzos actualizado. Por otro lado, la linealización de este estado de esfuerzos actualizado da lugar a la matriz de rigidez tangencial (o matriz jacobiana de la iteración), que es necesaria para el subsecuente ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos controlando así la tasa de convergencia de la solución. Este proceso de integración temporal o actualización del estado de esfuerzos y variables de estado, así como del jacobiano del material se realiza a nivel local. Es decir, a nivel de los puntos de integración numérica.

En las primeras etapas de desarrollo de algoritmos para tratamiento de problemas elastoplásticos era común la utilización de métodos de integración explícitos o semiexplícitos. Más adelante, se popularizaron métodos implícitos debidos principalmente a su mayor estabilidad y más amplio rango de aplicación en comparación con las formulaciones explícitas. Algunas de las contribuciones importantes a este respecto pueden encontrarse en el trabajo de Owen y Hinton (1980), que propuso un esquema iterativo global para la consideración de materiales elastoplásticos y viscoplásticos. Más tarde, Szabo (1985, 1988) propuso un algoritmo alternativo que evita costosas operaciones de inversión matricial típicas de las formulaciones del tipo de Owen y Hinton (1980). Aunque este tipo de formulaciones fueron importantes contribuciones en su momento, tienen la limitación de que son altamente dependientes del esquema iterativo global adoptado, lo que dificulta su implementación en diferentes arquitecturas de elementos finitos.

Por otro lado, se encuentra el grupo de algoritmos de retorno radial de Wilkins (1964) y Krieg y Key (1976) que realizan el proceso de integración de nivel local haciéndolos muy versátiles para su aplica-

ción en diferentes plataformas. Actualmente este tipo de estrategias son las utilizadas por las arquitecturas más modernas de solución de problemas no lineales por elementos finitos. Utilizan como algoritmo de solución global el método de Newton-Raphson o modificaciones de este. Sin embargo, Simo y Taylor (1985), basados en las contribuciones de Hughes y Taylor (1978) y Nagtegaal (1982), notaron que para poder preservar las excelentes características de convergencia cuadrática del método de Newton era necesario utilizar en el proceso de integración un jacobiano correspondiente con el algoritmo de integración y no el obtenido de la formulación continua del problema. Por lo general este jacobiano se denomina en la literatura módulo tangencial consistente. Después Simo y Hughes (1998) presentaron el problema de integración del modelo constitutivo como uno de optimización convexa y dieron lugar a los algoritmos de retorno por transformación. Este punto de vista tiene la gran ventaja de tener un significado totalmente físico (ver, por ejemplo, el principio de máxima disipación plástica) y no en artificios matemáticos que usualmente oscurecen la naturaleza del problema. En la actualidad este tipo de algoritmos es considerado como la herramienta óptima para integrar los modelos constitutivos.

En este artículo se trata el algoritmo de retorno por transformación, pero a diferencia del modelo considerado en Simo y Hughes (1998), se tiene en cuenta también la introducción de una variable de daño y el caso de endurecimiento cinemático no lineal. Adicionalmente y siguiendo la estrategia de Alfano et al. (2001), se incorporan también efectos viscoplásticos en el esquema. El algoritmo que se presenta es general en el sentido de que se pueden implementar diferentes formas de la ley de flujo que describe la evolución de la deformación viscoplástica.

Con el fin de validar el esquema de integración, se particulariza la ley de flujo implantando un modelo viscoplástico disponible en la literatura y desarrollado originalmente para soldaduras eléctricas de aleaciones estaño-cobre.

En la sección 2 se describe el modelo constitutivo y su respectivo algoritmo de integración. La sección 3 presenta algunas simulaciones numéricas y comparaciones con resultados experimentales recolectados en la literatura. La sección 4 presenta las conclusiones y propuestas para mejoramiento del modelo.

2. MODELO CONSTITUTIVO Y ALGORITMO DE INTEGRACIÓN

En lo que sigue se describe un modelo constitutivo de plasticidad clásica de Hill (1950) para el caso de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos. Las ecuaciones evolutivas del modelo están descritas de manera análoga a como se plantean en Simo y Hughes (1998), pero con la característica adicional de que consideran endurecimiento cinemático no lineal, efectos viscoplásticos y daño. El algoritmo de integración es el conocido algoritmo de retorno por transformación (return mapping). Los efectos viscoplásticos se incorporan siguiendo la estrategia de Alfano et al. (2001). El modelo de viscoplasticidad que se plantea es general y hace uso del concepto de esfuerzo adicional viscoso. Se incorporan los efectos de endurecimiento cinemático siguiendo la estrategia de Lubarda y Benson (2002). La variable de daño se introduce en el modelo utilizando el concepto de esfuerzo efectivo de Kachanov (1986), Rabotnov (1968) y el denominado principio de deformación equivalente. A continuación se presentan las ecuaciones en términos de su formulación por teoría de flujo mediante una función de cedencia que separa el dominio elástico del dominio viscoplástico, una ley de flujo que especifica la evolución de la deformación viscoplástica, un conjunto de leyes de endurecimiento que especifican la evolución de los parámetros de endurecimiento y la evolución del parámetro de daño que se introduce como una variable de estado adicional.

Con el fin de introducir el modelo de manera más general, es conveniente presentar primero las ecuaciones para un material cuya respuesta es independiente del tiempo y sin considerar los efectos de daño, es decir, para un material con respuesta plástica. En este caso la variable temporal se introduce por conveniencia matemática y no tiene ningún significado físico.

Consideremos el siguiente modelo de plasticidad clásico de von Mises para un material isotrópico suponiendo una teoría de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos.

Ley de Hooke

Para un material clásico de von Mises con respuesta independiente del tiempo y con comportamiento isotrópico la ley de Hooke, que relaciona los esfuerzos con las deformaciones, se escribe como

$$\dot{\sigma} = C : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}^{\theta}) \quad (1)$$

donde $\dot{\epsilon}$, $\dot{\epsilon}^p$ y $\dot{\epsilon}^{\theta}$ son rata de deformación total, deformación plástica y deformación térmica respectivamente, C es el tensor constitutivo elástico y $:$ representa la contracción entre dos tensores.

Superficie de cedencia

El dominio elastoplástico se define por medio de la siguiente función de cedencia

$$F(\sigma, \alpha) = \|S - X\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K(\alpha) \equiv \|S - X\| - R(\alpha) \quad (2)$$

donde $F(\sigma, \alpha) = 0$ representa una superficie de cedencia que separa los dominios elásticos e inelásticos, X es el componente desviador del tensor de esfuerzos calculado como $S = \sigma - \frac{1}{3} \hat{p} I$, \hat{p} es la presión hidrostática, I es un tensor unitario de segundo orden, $\|A\| = \sqrt{A \cdot A}$ representa la norma del tensor A y $R(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}} K(\alpha)$ es el radio de la superficie de cedencia en el espacio de esfuerzos.



Regla de flujo

La evolución de la deformación plástica se representa por medio de una ley de flujo general,

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \hat{n} \quad (3)$$

donde $\hat{n} = \frac{\partial F}{\partial \sigma}$ representa el vector normal a la superficie de cedencia.

Endurecimiento isotrópico

El endurecimiento isotrópico o tamaño de la superficie de cedencia se describe especificando la evolución de su radio. Un modelo común en la literatura es el debido a Chaboche (1989) en el cual

$$K(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}} Y_0 + R_\infty (1 - e^{-c\alpha}) \text{ y donde el parámetro}$$

de endurecimiento α evoluciona de acuerdo con la ecuación (4), Y_0 representa el esfuerzo de cedencia inicial, R_∞ representa un valor de saturación de endurecimiento isotrópico y c representa la velocidad de endurecimiento isotrópico.

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma \quad (4)$$

Endurecimiento cinemático no lineal

La ley de endurecimiento cinemático no lineal se toma de Chaboche (1989). Fue originalmente propuesta por Armstrong y Frederick (1996) y se describe en la Ec. (5)

$$\dot{X} = c_1 \dot{\epsilon}^p - c_2 X \dot{\alpha} \quad (5)$$

donde X es un tensor de esfuerzos de retorno que representa el centro de la superficie de cedencia en el espacio de esfuerzos y c_1, c_2 son constantes de endurecimiento cinemático no lineal. En la expresión (5) el primer término en el lado derecho representa el modelo clásico de endurecimiento cinemático lineal de Prager (1956), mientras el segundo represen-

ta el término no lineal introducido por Armstrong y Frederick (1996).

En las ecuaciones (3) y (4) γ es un parámetro de consistencia no negativo que representa el carácter irreversible del flujo plástico y cumple las siguientes propiedades:

1. Para un material independiente del tiempo γ atiende las denominadas condiciones de carga/descarga y de consistencia.

$$\gamma \geq 0 \text{ y } F(\sigma, \alpha) \leq 0 \quad (6)$$

$$\gamma \dot{F}(\sigma, \alpha) = 0 \quad (7)$$

2. Para un material dependiente del tiempo (viscoplástico) las condiciones (6) y (7) se reemplazan por una ecuación constitutiva de la forma

$$\gamma = \frac{\langle \phi(F) \rangle}{\eta} \quad (8)$$

donde η representa un parámetro del material que describe los efectos viscoplásticos. En el límite $\eta \rightarrow 0$ el modelo constitutivo es análogo al de un material independiente, Simo y Hughes (1998).

En el caso de un material independiente del tiempo, F satisface las condiciones (6) y (7) y, adicionalmente, los estados de esfuerzo $F(\sigma, \alpha) > 0$ son inadmisibles. Por otro lado, en el caso de un material dependiente del tiempo, la magnitud del flujo viscoplástico es proporcional a la distancia del estado de esfuerzos a la superficie definida por $F(\sigma, \alpha) = 0$. Basados en este argumento se tiene que para un intervalo de tiempo Δt y usando la ecuación (8) puede establecerse la siguiente relación

$$F = \Theta \left(\frac{\Delta \gamma \eta}{\Delta t} \right) \quad (9)$$

$$\text{donde } \Theta \left(\frac{\Delta \gamma \eta}{\Delta t} \right) = \phi^{-1} \left(\frac{\Delta \gamma \eta}{\Delta t} \right) \text{ y } \Delta \gamma = \gamma_{n+1} \Delta t \quad (10)$$

que a su vez se basa en un esquema de diferencias de Euler.

Acoplamiento de la variable de daño

La variable de daño se puede acoplar al modelo por medio del principio de deformación equivalente. (Tang, 2002),

$$\dot{\sigma} = (1-D)C : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{vp} - \dot{\epsilon}^{\theta}) \tag{11}$$

$$F = \|S - X^D\| - (1-D)\sqrt{\frac{2}{3}}K(\alpha) \equiv \|S - X^D\| - (1-D)R(\alpha) \tag{12}$$

donde D es una medida del daño y

$$\dot{X}^D = (1-D)(c_1\dot{\epsilon}^{vp} - c_2X\dot{\alpha}) \tag{13}$$

representa la evolución del esfuerzo de retorno incluyendo los efectos de daño.

Algoritmo de retorno por transformación

Considere el siguiente estado de esfuerzos denominado usualmente estado de prueba, el cual se obtiene tras suponer que durante el incremento de tiempo el flujo plástico es nulo.

$$S_{n+1}^tr = S_n + (1-D)2\mu\Delta e_{n+1} \tag{14}$$

donde Δe_{n+1} es el incremento en la componente desviadora de la deformación total.

El incremento del esfuerzo de retorno puede obtenerse a partir de la ecuación (13)

$$dX_{n+1}^D = (1-D)\left[c_1 d\epsilon_{n+1}^{vp} - c_2' \Delta\gamma \left[\theta X_n^D + (1-\theta) X_{n+1}^D\right]\right] \text{ para } 0 \leq \theta \leq 1 \tag{15}$$

donde $c_2' = \sqrt{\frac{2}{3}}c_2$ y se ha utilizado una regla generalizada de punto medio para el término no lineal con los valores extremos $\theta = 0$ y $\theta = 1$ correspondientes a un esquema de diferencias de Euler. De las ecuaciones (3) y (12) se puede obtener el equivalente algorítmico del incremento viscoplástico,

$$d\epsilon_{n+1}^{vp} = \Delta\gamma \frac{S_{n+1} - X_{n+1}^D}{\|S_{n+1} - X_{n+1}^D\|} \tag{16}$$

La sustitución de la ecuación (16) en la ecuación (15) implica

$$dX_{n+1}^D = a_{n+1}\Delta\gamma \left(\frac{S_{n+1} - X_{n+1}^D}{\|S_{n+1} - X_{n+1}^D\|} - \frac{c_2'}{c_1} X_n^D \right) \tag{17}$$

donde $a_{n+1} = \frac{c_1(1-D)}{1 + c_2'(1-D)(1-\theta)\Delta\gamma}$

La regla de flujo (3) permite expresar la ecuación (14) como



$$S_{n+1} = S_{n+1}^{ir} - \Delta\gamma(1-D)2\mu \frac{S_{n+1} - X_{n+1}^D}{\|S_{n+1} - X_{n+1}^D\|} \quad (18)$$

Tras definir el esfuerzo relativo $\xi_{n+1}^D = S_{n+1} - X_{n+1}^D$ se tiene de la ecuación (18)

$$\xi_{n+1}^D = S_{n+1} - X_{n+1}^D \equiv S_{n+1}^{ir} - \Delta\gamma(1-D)2\mu \frac{S_{n+1} - X_{n+1}^D}{\|S_{n+1} - X_{n+1}^D\|} - X_n^D - dX_{n+1}^D \quad (19)$$

(17) en (19) implica

$$S_{n+1} - X_{n+1}^D + \Delta\gamma \left[(1-D)2\mu + a_{n+1} \right] \frac{S_{n+1} - X_{n+1}^D}{\|S_{n+1} - X_{n+1}^D\|} = B_n \quad (20)$$

donde $B_n = S_{n+1}^{ir} - X_n^D + b_{n+1}\Delta\gamma X_n^D$ y $b_{n+1} = \frac{c_2}{c_1} a_{n+1}$

De la ecuación (20) es claro que el vector normal a la superficie de cedencia puede ser expresado en términos de la información al comienzo del incremento, por lo tanto, se tiene

$$n_{n+1} \equiv \frac{S_{n+1} - X_{n+1}^D}{\|S_{n+1} - X_{n+1}^D\|} = \frac{B_n}{\|B_n\|} \quad (21)$$

Calculando el producto escalar de la expresión (19) por ella misma se obtiene

$$\begin{aligned} & \|S_{n+1} - X_{n+1}^D\| + \Delta\gamma \left[(1-D)2\mu + a_{n+1} \right] = \\ & \left\{ \|S_n - X_n^D\|^2 + \left\| (1-D)2\mu\Delta e_{n+1} + b_{n+1}\Delta\gamma X_n^D \right\|^2 + 2(S_n - X_n^D) : \left[(1-D)2\mu\Delta e_{n+1} + b_{n+1}\Delta\gamma X_n^D \right] \right\}^{1/2} \quad (22) \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (12) para el caso independiente del tiempo o la ecuación (9) para el caso dependiente del tiempo se puede obtener la siguiente ecuación escalar no lineal para el parámetro de consistencia, que puede resolverse por un método de Newton local u otro método numérico,

$$\begin{aligned} g(\Delta\gamma) = & \left\{ \|S_n - X_n^D\|^2 + \left\| (1-D)2\mu\Delta e_{n+1} + b_{n+1}\Delta\gamma X_n^D \right\|^2 + 2(S_n - X_n^D) : \left[(1-D)2\mu\Delta e_{n+1} + b_{n+1}\Delta\gamma X_n^D \right] \right\}^{1/2} \\ & - (1-D)\sqrt{\frac{2}{3}}K \left(\alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma \right) - \Delta\gamma \left[(1-D)2\mu + a_{n+1} \right] - \Theta \left(\frac{\Delta\gamma\eta}{\Delta t} \right) \quad (23) \end{aligned}$$

El esquema de actualización de las variables dependientes resulta una vez la ecuación (23) se resuelve y el valor de $\Delta\gamma$ se encuentra:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma \quad (24)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} + \Delta\gamma \frac{B_n}{\|B_n\|} \quad (25)$$

$$X_{n+1}^D = X_n^D + a_{n+1} \Delta\gamma \left(\frac{S_{n+1} - X_{n+1}^D}{\|S_{n+1} - X_{n+1}^D\|} - \frac{c_2}{c_1} X_n^D \right) \quad (26)$$

$$\xi_{n+1}^D = (1-D)K(\alpha_{n+1}) \frac{B_n}{\|B_n\|} \quad (27)$$

$$S_{n+1} = \xi_{n+1}^D + X_{n+1}^D \quad (28)$$

$$\sigma_{n+1} = \kappa(1-D)tr(\varepsilon_{n+1})\mathbf{I} + 2\mu(1-D) \left(e_{n+1} - \varepsilon_n^{vp} - \gamma_{n+1} \frac{B_n}{\|B_n\|} - e_{n+1}^\theta \right) \quad (29)$$

Linealización (jacobiano consistente)

Tras diferenciar la ecuación (29) con respecto a la deformación total al final del incremento, se obtiene

$$d\sigma_{n+1} = (1-D) \left[C - 2\mu \hat{n}_{n+1} \otimes \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \varepsilon_{n+1}} - 2\mu \Delta\gamma \otimes \frac{\partial \hat{n}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right] : d\varepsilon_{n+1} \quad (30)$$

en la que $\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \varepsilon_{n+1}}$ resulta de (22) como:

$$\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{n_{n+1}}{\bar{K}_3} \quad (31)$$

En lo anterior se ha hecho uso de

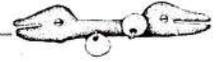
$$\bar{K}_3 = \bar{K}_1 + \bar{K}_2$$

$$\bar{K}_1 = 1 + \frac{K'}{3\mu} + \frac{a_{n+1}}{2\mu(1-D)}$$

$$\bar{K}_2 = \frac{a_{n+1}' \Delta\gamma}{2\mu(1-D)} + \frac{n_{n+1} b_{n+1}}{2\mu(1-D)} [b_{n+1} (1-\theta) \Delta\gamma - 1] : X_n^D + \frac{1}{2\mu(1-D)} \frac{\partial \Theta}{\partial \Delta\gamma}$$

y $\frac{\partial \hat{n}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$ resulta de (21)

$$\frac{\partial \hat{n}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial \hat{n}_{n+1}}{\partial B_n} \frac{\partial B_n}{\partial \varepsilon_{n+1}} \equiv \frac{1}{\|B_{n+1}\|} (\mathbf{I} - \hat{n}_{n+1} \otimes \hat{n}_{n+1}) : \frac{\partial B_n}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (32a)$$



donde

$$\frac{\partial B_n}{\partial \varepsilon_{n+1}} = 2\mu(1-D) \left(\Pi - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) + (b'_{n+1} \Delta\gamma + b_{n+1}) X_n \otimes \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \varepsilon_{n+1}}$$

Haciendo $\bar{K}_4 = b'_{n+1} \Delta\gamma + b_{n+1}$ y sustituyendo $\frac{\partial B_n}{\partial \varepsilon_{n+1}}$ en (32a) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{n}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} &= \frac{\partial \hat{n}_{n+1}}{\partial B_n} \frac{\partial B_n}{\partial \varepsilon_{n+1}} \equiv \frac{2\mu(1-D)}{\|B_n\|} \left(\Pi - \hat{n}_{n+1} \otimes \hat{n}_{n+1} - \frac{1}{3} \hat{\mathbf{I}} \otimes \hat{\mathbf{I}} \right) + \\ &\frac{1}{\|B_n\|} \left(\hat{\mathbf{I}} - \hat{n}_{n+1} \otimes \hat{n}_{n+1} \right) : \left(\frac{\bar{K}_4}{\bar{K}_3} \hat{n}_{n+1} \otimes X_n^D \right) \end{aligned} \quad (32b)$$

Usando las ecuaciones (31) y (32b) en (30) resulta:

$$\begin{aligned} C_{n+1}^{EVPD} &= (1-D) \kappa \hat{\mathbf{I}} \otimes \hat{\mathbf{I}} + 2\mu(1-D) \delta_{n+1} \left(\Pi - \frac{1}{3} \hat{\mathbf{I}} \otimes \hat{\mathbf{I}} \right) - 2\mu(1-D) \bar{\theta}_{n+1} \hat{n}_{n+1} \otimes \hat{n}_{n+1} - \\ &\frac{2\mu(1-D)}{\|B_n\|} \Delta\gamma (\Pi - \hat{n}_{n+1} \otimes \hat{n}_{n+1}) : \frac{\bar{K}_4}{\bar{K}_3} \hat{n}_{n+1} \otimes X_n^D \end{aligned} \quad (33)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &= 1 - \frac{\Delta\gamma 2\mu(1-D)}{\|B_n\|} \\ \bar{\theta}_{n+1} &= \frac{1}{\bar{K}_3} - \frac{\Delta\gamma 2\mu(1-D)}{\|B_n\|} \end{aligned}$$

3. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Para validar el modelo numérico presentado es conveniente particularizar la ecuación (8). Para este fin se selecciona la ley de flujo de Kashyap y Murty (1981) propuesta en su origen para describir la respuesta de aleaciones de plomo-estaño utilizadas comúnmente en soldaduras eléctricas para empaquetamiento electrónico. Kashyap y Murty (1988) describen el comportamiento viscoplastico de este material por medio de la siguiente relación fenomenológica y con las propiedades presentadas en la tabla 1.

$$\eta = \frac{k\theta}{AD_0 E^{n-1} b} \left(\frac{d}{b}\right)^p e^{Q/R\theta} \quad (34)$$

Adicionalmente, se utiliza la siguiente función de tipo Perzyna que permite definir de manera completa el modelo constitutivo indicado en la Ec. (8)

$$\langle \phi(F) \rangle = \langle F \rangle^n \quad (35)$$

Utilizando este modelo se simula numéricamente la respuesta de una capa delgada de soldadura eléctrica y sometida a ensayos de cortante monotónicos, cíclicos y de fatiga reportados en Tang (2002). También se modela el ensayo de tensión uniaxial realizado por Adams (1986). Pueden encontrarse detalles de ambos estudios experimentales en dichas referencias. La tabla 2 presenta las simulaciones elaboradas. La figura 1 muestra los resultados de las simulaciones comparados con los ensayos en tensión uniaxial de Adams (1986) a diferentes temperaturas. La figura 2 muestra comparaciones con ensayos de cortante monotónico a diferentes temperaturas y para una rata de deformación constante. Se observa que el modelo efectivamente muestra la variación de las respuestas a diferentes temperaturas. Las diferencias con los resultados experimentales son esperables, pues en la realidad y como consecuencia de su proceso de fabricación, las soldaduras tienen imperfecciones y vacíos que no se consideran en el modelo computacional. La figura 3 muestra el mismo ensayo anterior, pero a temperatura ambiente y para distintas ratas de deformación. Se observa que el modelo efectivamente refleja la variación de la respuesta de la velocidad de aplicación de los desplazamientos. En la figura 4 se comparan las simulaciones con los resultados de ensayos en condiciones de cortante cíclico a rata de deformación constante, temperatura ambiente y diferentes rangos de deformación inelástica. Las figuras 5-8 ilustran simulaciones durante varios ciclos de fatiga y diferentes rangos de deformación inelástica así como también la evolución de la variable de daño correspondiente a dichas simulaciones. El marco computacional efectivamente describe la degradación por ciclos de fatiga.

4. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS PARA TRABAJOS FUTUROS

En este artículo se presenta la implementación de un modelo constitutivo que satisface requisitos termodinámicos así como su algoritmo de integración. El algoritmo utilizado es el clásico esquema propuesto por Simo y Hughes (1998), pero extendido para considerar leyes de endurecimiento cinemático no lineales, efectos dependientes del tiempo y daño. El algoritmo puede adaptarse con facilidad para tratar problemas axisimétricos y en 3D. El carácter local del esquema permite su implementación en diferentes plataformas con elementos finitos. Las ecuaciones se presentan de manera general de forma que se pueden adaptar a diferentes modelos constitutivos como el introducido.

Para problemas idealizados como de esfuerzos planos se debe desarrollar un algoritmo alterno. Dicho esquema que incorpora simultáneamente efectos de daño, endurecimiento cinemático no lineal y efectos viscoplásticos no está disponible en la literatura actual.

Es deseable también utilizar este modelo para estudiar la respuesta de materiales en nuestro medio particularizando las ecuaciones presentadas e incorporando diferentes medidas de daño que se podrían adaptar fácilmente al algoritmo.

5. REFERENCIAS

- ADAMS, P. J. (1986). Thermal fatigue of solder joints in micro-electronic devices, M. S. Thesis, Department of Mechanical Engineering, MIT, Cambridge, MA, 1986.
- ALFANO, G., De ANGELIS, F. and ROSATI, L. (2001). General solution procedures in elasto/viscoplasticity *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 190, pp. 5123-5147.
- ARMSTRONG, P. J. and FREDERICK, C. O. (1996) A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, CEGB Report RD/B/N731.
- BASARAN, C. and TANG, H. (2002). Implementation of a thermodynamic framework for damage mechanics of



- solder interconnect in microelectronic packaging. Proceedings of IMECE, 2002 ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition. New Orleans, Louisiana.
- BASARAN, C. and YAN, C. (1998). A thermodynamic framework for damage mechanics of solder joints. *Journal of Electronic Packaing, Trans. ASME*, 120, pp. 379-384.
- BASARAN, C., CHANDAROY R. and ZHAO, Y. (1998). Influence of grain size and microstructure on dynamic response of solder joints, 98-WA/EEP-12, ASME Publications.
- BASARAN, C., ZHAO, Y., TANG, H. and GÓMEZ, J., (2004). A damage mechanics based unified constitutive model for Pb/Sn solder alloys. Accepted. *ASME Journal of Electronic Packaging*.
- CHABOCHE, J. L. (1989) Constitutive equations for cyclic plasticity and viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, Vol.3, pp. 247-302.
- DARVEAUX, R. and BANERJI, K. (1992). Constitutive relations for tin-based solder joints, *IEEE Trans. Comp. Hybrids Manuf. Technol.*, vol.15 No. 6, pp. 1013-1024, Dec.1992.
- HILL, R. (1950). *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press, Oxford, Reino Unido.
- HONG, B. Z. and BURRELL, L. G. (1995). Nonlinear finite element simulation of thermoviscoplastic deformation of C4 solder joints in high density packaging under thermal cycling, *IEEE Trans. Components, Packaging, and Manufacturing Technology-Part A*, vol.18, No. 3, pp. 585-590, Sep. 1995.
- HUGHES, T. and Taylor, R. (1978). Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto/viscoplastic finite element analysis. *Computers and Structures*, 8, pp. 169-173.
- KACHANOV, L. M. (1986). *Introduction to continuum damage mechanics*. Martinus Nijhoff, Países Bajos.
- KASHYAP, B. and MURTY, G. (1981). Experimental constitutive relations for the high temperature deformation of a Pb-Sn eutectic alloy. *Material Science and Engineering*, 50, pp. 205-213.
- KITANO, B. P., KAWAI, S. and SHIMIZU, L. (1988). Thermal fatigue strength estimation of solder joints of surface mount IC packages, *Proc. 8th Annual Int. Elec. Packaging Conf., IEPS, Dallas, Texas*, pp. 4-8, Nov. 1988.
- KNOCHT, S. and FOX L. R. (1990). Constitutive relation and creep-fatigue life model for eutectic tin-lead solder, *IEEE Trans Comp. Hybrids Manuf. Technol.*, vol. 13, pp. 424-433, 1990.
- KRIEG, R. D. and Key, S. (1976). Implementation of a time dependent plasticity theory into structural computer programs. Constitutive equations in viscoplasticity: Computational and engineering aspects, Editors J. A. Stricklin and K. J. Saczalski, AMD-20, ASME, New York. In: *Methods of Computational Physics*. Editors B. Alder *et al.*, Academic Press, New York.
- LAU, J. and RICE, J. R. (1990). Thermal stress/ strain analyses of ceramic quad flat pack packages and interconnects, *Elect. Components and Technology*, 40th Conf., vol.1, Las Vegas, Nevada, pp. 824-934, May, 1990.
- LUBARDA, V. and BENSON, D. (2002). On the numerical algorithm for isotropic-kinematic hardening with the Armstrong-Frederick evolution of the back stress. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191, pp. 3583-3596.
- McDOWELL, D. L., MILLER, M. P. and BROOKS, D. C. (1994). A unified creep-plasticity theory for solder alloys, *Fatigue Testing of Electronic Materials*, pp. 42-59, ASTM STP 1153, 1994.
- NAGTEGAAL, J. C. (1982). On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 33.
- OWEN, D. R. J. and HINTON, E. (1980). *Finite element in plasticity*, Pineridge Press Limited, Swansea, Reino Unido. 594 p.
- PRAGER, W. (1956). A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids. *J. Appl. Mech.*, 23(4), pp. 493-496.
- RABOTNOV, Y. N. (1968). Creep rupture. In *Proceedings of the XII International Congress on Applied Mechanics*, Standford-Springer, pp. 342-349.
- SIMO, J. and HUGHES, T. (1998). *Computational inelasticity*. Interdisciplinary applied mathematics. Springer.
- SIMO, J. and TAYLOR, R., (1985). Consistent tangent operators for rate dependent elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 48, pp. 101-118.
- TANG, H. (2002). A thermodynamic damage mechanics theory and experimental verification for thermomechanical fatigue life prediction of microelectronics solder joints. PhD Dissertation. University at Buffalo. The State University of New York.

WILCOX, J. R., SUBRAHMANYAN, R. and LI, C. (1989). Thermal stress cycles and inelastic deformation in solder joints. Proc. 2nd ASME Int. Electronic Mat. and Processing Congr., Filadelfia, PA, pp. 208-211, April 1989.

WILKNIS, M. L. (1964). Calculation of elastic-plastic flow. In: Methods of Computational Physics. Editors B. Alder et al., Academic Press, New York.

ZHAO, Y. (2000). Thermomechanical behavior of ball grid array solder joints under thermal and vibration loading; testing and modeling. PhD Dissertation. University at Buffalo. The State University of New York.

Tablas y Figuras

Tabla 1. Parámetros del material.

ELÁSTICOS	
Módulo de Young (GPa)	52,10-0,1059
Módulo cortante (GPa)	19,44-0,0395
ENDURECIMIENTO ISOTRÓPICO	
R ₀₀ (MPa)	37,47-0,0748
c	383,3
y	60,069-0,140
ENDURECIMIENTO CINEMÁTICO	
c ₁	2040
c ₂	180
LEY DE FLUJO	
A	7,60E+09
D ₀ (mm/s ²)	48,8
b (mm)	3,18E-07
d (mm)	1,06E-02
n	1,67
p	3,34
Q (mJ/mol)	4,47E+07

Tabla 2. Simulaciones elaboradas.

ENSAYO DE ADAMS			
	Rata de deformación	Temperatura	ISR
	/s	°C	
CASO I			
	1	-15	
	2	-55	
	3	125	
	4	22	
	1,67E-02	75	
CORTANTE MONOTÓNICO			
	Rata de deformación	Temperatura	ISR
	/s	°C	
CASO II			
	1	-40	
	2	22	
	3	60	
	4	100	
	1,67E-03		
CORTANTE MONOTÓNICO			
	Rata de deformación	Temperatura	ISR
	/s	°C	
CASO III			
	1	1,67E-01	
	2	1,67E-02	
	3	1,67E-03	
	4	1,67E-04	22
CORTANTE CÍCLICO			
	Rata de deformación	Temperatura	ISR
	/s	°C	
CASO IV			
	1		0,005
	2		0,012
	3		0,020
	1,67E-03	22	
FATIGA POR CORTANTE			
	Rata de deformación	Temperatura	ISR
	/s	°C	
CASO V			
	1		0,022
	1,67E-04	22	0,004

ISR: Rango Inelástico de Deformación

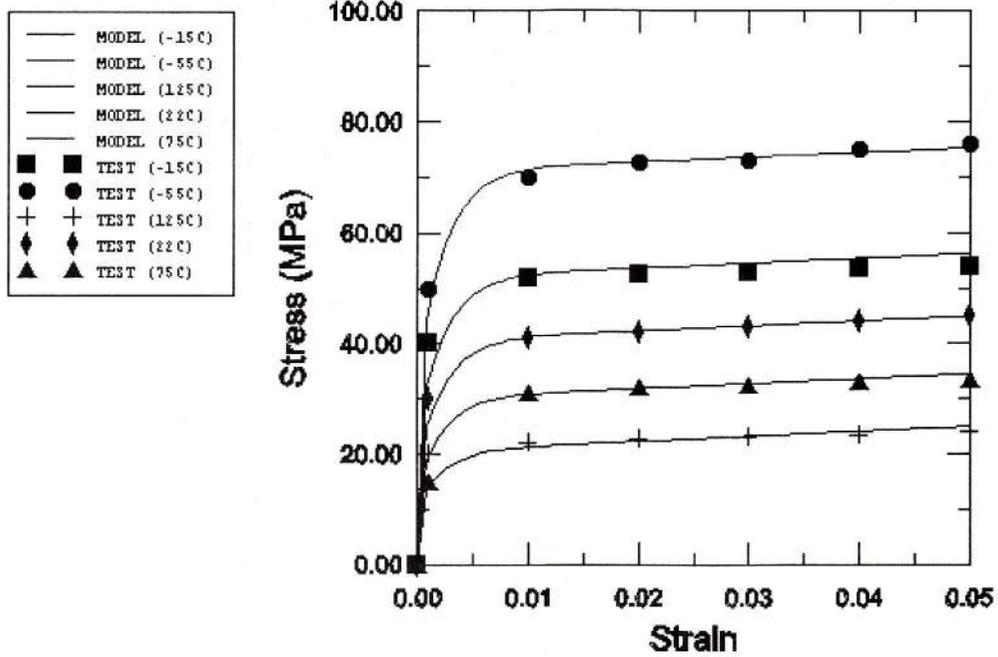


Figura 1. Simulaciones del ensayo de Adams (1986) bajo una tasa de deformación de $1,67 \times 10^{-2}$ /s y a diferentes temperaturas.

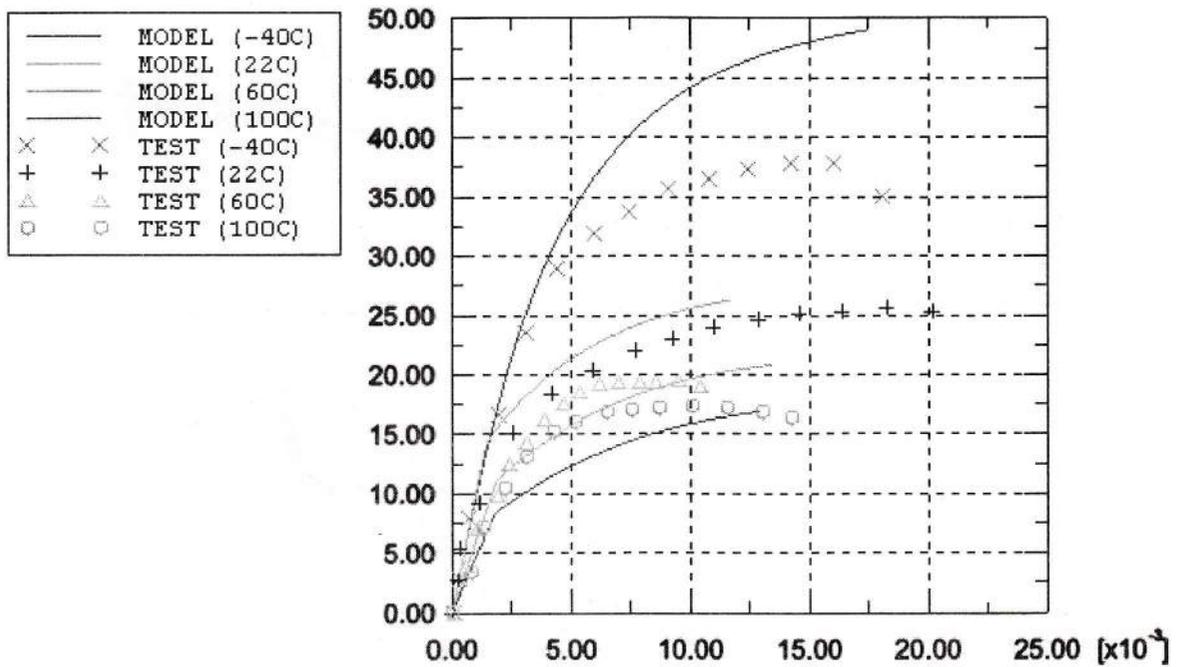


Figura 2. Ensayo a cortante monotónico a una tasa de deformación de $1,67 \times 10^{-3}$ /s y diferentes temperaturas.

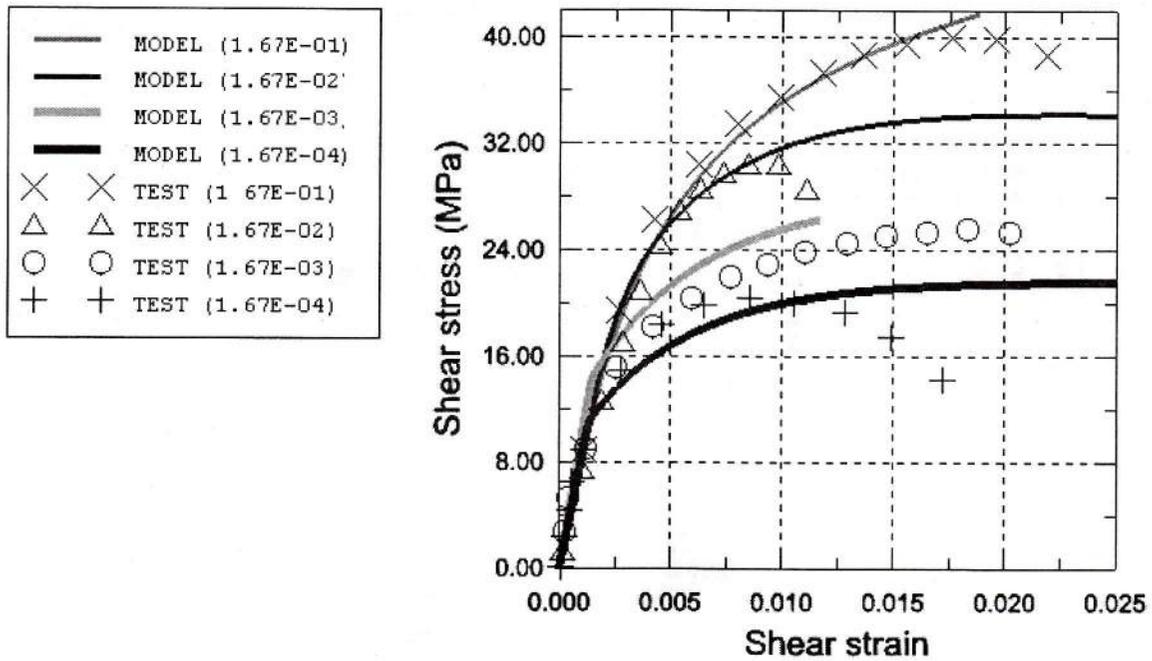


Figura 3. Ensayo a cortante monotónico a diferentes ratas de deformación y a temperatura ambiente.

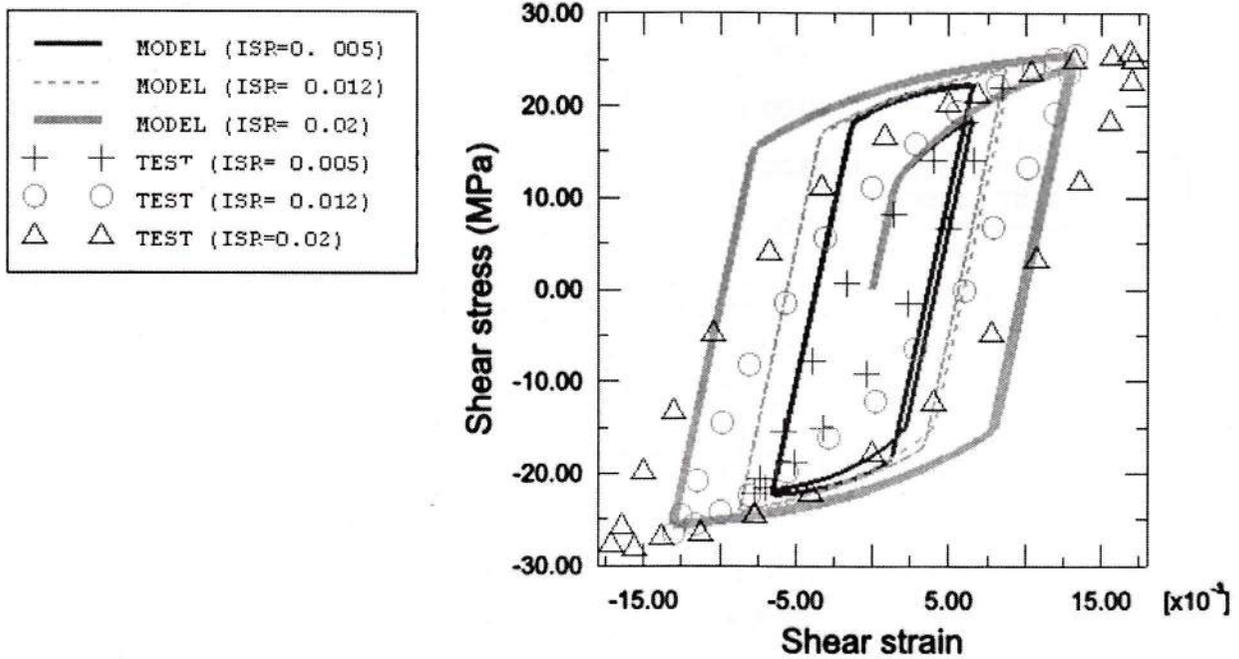
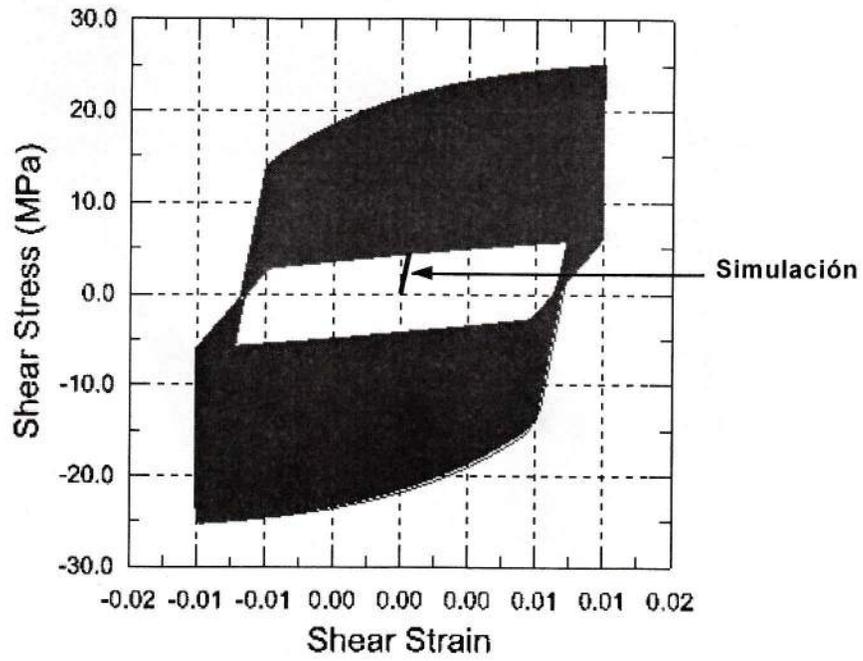
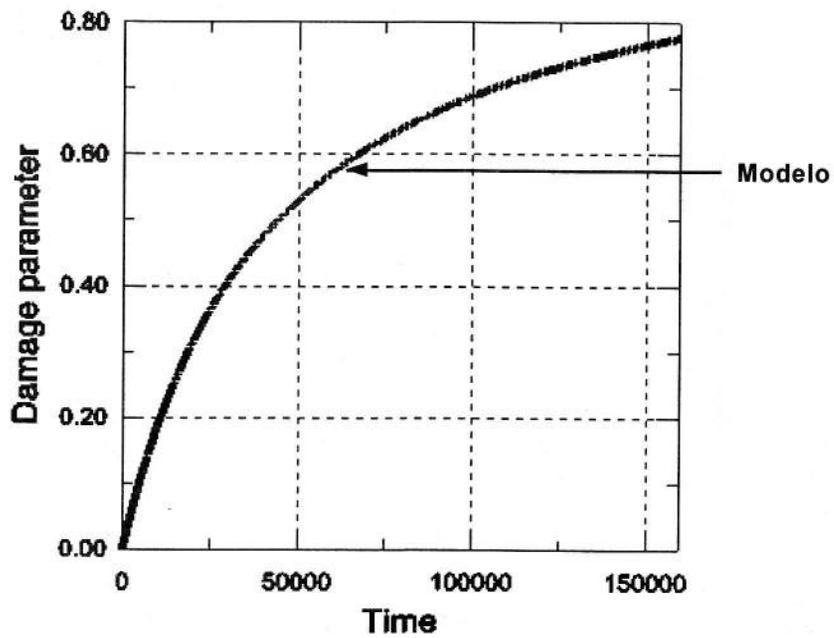


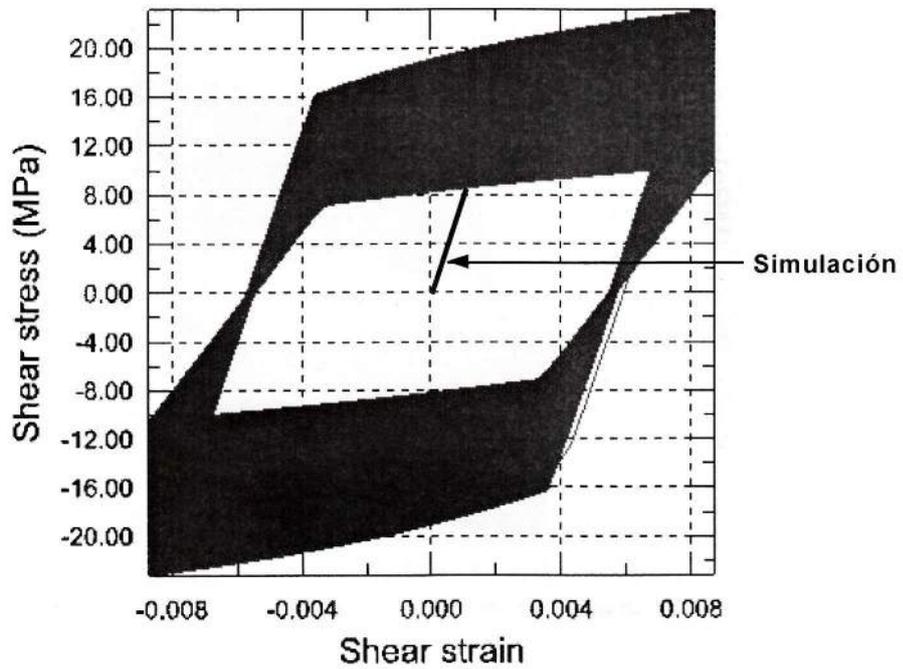
Figura 4. Ensayos a cortante cíclico a una rata de deformación de $1,67 \times 10^{-3}$ /s y a temperatura ambiente con diferentes rangos de deformación inelástica.



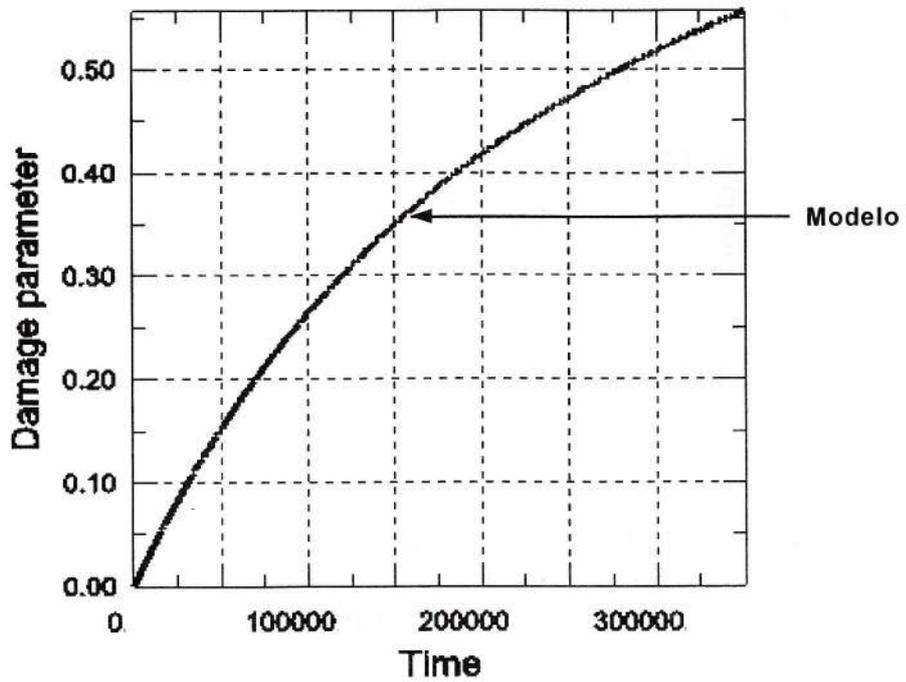
Figuras 5. Ensayo de fatiga isotérmica a cortante a una rata de deformación de $1,67 \times 10^{-4}$ /s y a temperatura ambiente para $ISR=0,022$



Figuras 6. Evolución del parámetro de daño en fatiga para un $ISR=0,022$



Figuras 7. Ensayo de fatiga isotérmica a cortante a una tasa de deformación de $1,67 \times 10^{-4}$ /s y a temperatura ambiente para $ISR=0,004$



Figuras 8. Evolución del parámetro de daño en fatiga para un $ISR=0,004$