

MODELANDO LA TOMA DE DECISIONES MEDIANTE FUSIÓN DE CREENCIAS

OSCAR CHÁVEZ-BOSQUEZ

oscar.chavez@ujat.mx

*Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, División Académica de Informática y Sistemas,
Carretera Cunduacán-Jalpa Km. 1. Cunduacán, Tabasco, México*

PILAR POZOS-PARRA

pilar.pozos@ujat.mx

*Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, División Académica de Informática y Sistemas,
Carretera Cunduacán-Jalpa Km. 1. Cunduacán, Tabasco, México*

Recibido (24/10/2014)

Revisado (15/12/2014)

Aceptado (22/12/2014)

RESUMEN: La fusión de creencias es una técnica relativamente reciente que permite combinar piezas de información, posiblemente contradictorias, provenientes de diferentes fuentes. Este proceso lo realiza un operador de fusión, en la literatura se describen principalmente los fundamentos teóricos de los operadores. Sin embargo, la fusión de creencias es en general poco conocida y existe escasa evidencia de su aplicabilidad para resolver problemas de la vida diaria. En este artículo se propone emplear esta técnica para solucionar problemas relacionados con la toma de decisiones en escenarios cotidianos, donde los involucrados poseen opiniones contradictorias y tienen el mismo nivel jerárquico, “fusionando” estas opiniones y generando una opinión conjunta sin contradicciones que representa la opinión de la mayoría. Se describen a detalle tres operadores de fusión de creencias con diferentes características: Δ_{Σ} , $\Delta_{GM_{ax}}$, y Δ_{ps} (*PS-Merge*); posteriormente los ejemplos clásicos de fusión de creencias se representan en lenguaje natural empleando escenarios prácticos, donde se involucra la toma de decisiones; finalmente para apoyar en la toma de decisiones de diversa índole se presenta un Prototipo Fusionador de Creencias bajo licencia libre, disponible en línea.

Palabras Clave: Fusión de creencias; inteligencia artificial; lógica proposicional; representación del conocimiento; software libre; toma de decisiones.

ABSTRACT: Belief merging is a relatively recent technique with the aim of combining pieces of information, possibly inconsistent, coming from different sources. This process is done by a merging operator, in the literature we found mainly the theoretical basis of operators. However, this technique is still little known and there is scarce evidence about its applicability to solve real-world problems. In this paper we propose to use belief merging in order to solve everyday decision-making problems, in which participants with the same level have contradictory opinions, by “merging” these opinions and generating a common non-contradictory opinion representing the views of the majority. We describe in detail three belief merging operators with differing properties: Δ_{Σ} , $\Delta_{GM_{ax}}$, y Δ_{ps} (*PS-Merge*); afterwards, the classic belief merging examples are presented in natural language as decision-making practical scenarios; finally, we present an online open source Belief Merging Prototype to support on diverse decision-making processes.

Keywords: Belief merging; artificial intelligence; propositional logic; knowledge representation; free software; decision-making.

1. Introducción

La toma de decisiones es un proceso cognitivo que resulta de la selección de una creencia o un curso de acción entre diversas alternativas. Ya sean los gerentes de una firma, médicos en un hospital o un padre de familia en el hogar, siempre están comprometidos a realizar un constante cuestionamiento para aprovechar los recursos, máxime cuando los individuos involucrados en el cuestionamiento tienen opiniones contradictorias entre sí.

En el contexto de la planeación estratégica se consideran generalmente dos tipos de decisiones: a corto plazo, referentes a la operación normal de una organización, y a largo plazo, respecto a inversiones de capital²⁸. Las decisiones a corto plazo pueden impactar las diferentes áreas que componen una organización: ventas, finanzas, producción, recursos humanos, entre otras. Existen diversas metodologías para apoyar en esta toma de decisiones, ya que son las que más comúnmente enfrenta la administración. De igual manera, se hace una clara diferencia entre las decisiones programadas, aquellas que se presentan con cierta regularidad y que tienen un método bien establecido de solución; y las no programadas, que abordan problemas poco frecuentes o excepcionales¹⁹.

Sin embargo, un área de oportunidad que no ha sido explotada surge cuando la toma de decisiones no planeadas a corto plazo debe realizarse por un consejo, en el que los miembros tienen diferentes puntos de vista de la situación pero todos con el mismo nivel jerárquico. Aunque existe evidencia de sistemas basados en técnicas de Inteligencia Artificial (IA) que sirven para la toma de decisiones, por ejemplo aplicaciones que emplean lógica difusa¹⁵, minería de datos⁷ o sistemas expertos³²; la fusión de creencias, una técnica para la integración de conocimiento, no ha sido considerada para el desarrollo de aplicaciones que apoyen a los involucrados en el proceso de elección.

La fusión de creencias es una técnica relativamente reciente de IA, existe abundante teoría al respecto pero aún no se conocen aplicaciones prácticas que muestren su potencial. Con el uso de esta técnica se pretende innovar en el proceso de toma de decisiones, ya que la fusión de creencias considera todas las opiniones con el mismo nivel de jerarquía y garantiza que se obtendrá la opción que mejor satisfaga a la mayoría.

2. Teorías formales de integración de conocimiento

La integración de conocimiento proveniente de diferentes fuentes es un tópico que ha sido extensamente estudiado en la literatura¹⁸. Tres enfoques a este problema de integración han sido propuestos: la actualización, la revisión y la fusión de creencias. Estos tres enfoques modelan el conocimiento de cada fuente de información como una base de creencias, que se define como un conjunto finito de fórmulas proposicionales que representan las creencias, deseos, opiniones o conocimiento de una fuente de información (entidad, agente, persona, sensor, robot; por citar algunos ejemplos)²¹.

La diferencia entre la actualización y la revisión de creencias radica en el momento que ocurre la acción que cambia las propiedades del escenario, modeladas como creencias.

Durante una actualización de creencias, el momento en que ocurre la acción que cambia el escenario y el momento en que se realiza la actualización es el mismo; en la revisión, por el contrario, el momento en que ocurre la acción que cambia el escenario y el momento en que se realiza la revisión de creencias son diferentes. En la revisión de creencias la nueva información se considera más fiable respecto a la información creída hasta el momento en que llega esta nueva información. Sin embargo, postulados diferentes deben ser aplicados cuando las dos fuentes de información son confiables y cada una tiene una opinión diferente de la situación, es decir, las dos opiniones se contradicen¹⁸. Si no existe una razón para considerar alguna de las fuentes como la más fiable, lo mejor que se puede hacer es “unir” las dos opiniones en una nueva, tratando de

conservar tanta información de ambas como sea posible, pero anulando las contradicciones. Este proceso es llamado fusión de creencias y se puede generalizar a n fuentes²¹.

La actualización de creencias corresponde a modificar las creencias anteriores para tomar en cuenta el cambio efectuado por la acción. Básicamente, la actualización de creencias consiste en reemplazar las creencias anteriores que son incompatibles con las creencias actuales para mantener así una base de creencias consistente²⁰.

La revisión de creencias modela escenarios donde la información más reciente tiene prioridad. Una propiedad básica de la revisión es que la nueva información es totalmente confiable y, por lo tanto, debe encontrarse en la base de creencias revisada (la base de creencias obtenida como resultado de la operación de revisión)¹².

La fusión de creencias se define como la operación de combinar información contenida en un conjunto de bases de creencias (posiblemente incompatibles entre sí) obtenidas de diferentes fuentes para producir una base de creencias única y consistente²⁷. Esta operación es de interés cuando se desconoce el estado general de un entorno, ya que puede determinar el estado “verdadero” del entorno a partir de las creencias obtenidas de las fuentes.

En este procedimiento importa lo que “cree” la mayoría de los involucrados, y los postulados aseguran que el resultado será independiente de la sintaxis, consistente y justo⁴.

3. Conceptos preliminares

La fusión de creencias tiene como base la lógica proposicional, en particular la teoría de modelos. A continuación se describen los conceptos empleados éstas.^{2,8,9,14,24}

Sea un lenguaje proposicional \mathcal{L} formado por:

- Variables proposicionales. También llamadas átomos, serán denotadas por el conjunto finito y ordenado $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ (la lógica proposicional acepta en general conjuntos infinitos de variables).
- Constantes proposicionales. Están conformadas por el conjunto de operadores lógicos $\pi = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
- Signos de agrupación. Los paréntesis se utilizan de la manera clásica.

El lenguaje proposicional \mathcal{L} es un conjunto de Fórmulas Bien Formadas (WFF, por las siglas en inglés de *Well Formed Formula*) o simplemente fórmulas, las cuales son expresiones que representan una proposición simple o compuesta y se encuentran bien escritas de acuerdo a la siguiente sintaxis:

- Cada variable proposicional es una fórmula.
- Si v es una fórmula, entonces $\neg v$ es una fórmula.
- Si v, ψ son fórmulas, y \circ es una constante, un operador lógico, entonces $(v \circ \psi)$ es una fórmula, donde $\circ \in \pi \setminus \{\neg\}$ es el conjunto de conectivos binarios.

Por conveniencia, si v es una fórmula o un conjunto de fórmulas, entonces $\mathcal{P}(v)$ denota el conjunto de átomos que aparecen en v . $|\mathcal{P}|$ denota la cardinalidad del conjunto \mathcal{P} .

Una literal es una variable proposicional l , o su negación $\neg l$.

Una cláusula es una disyunción de literales finita de la forma $l_1 \vee \dots \vee l_n$ donde cada l_i con $i = \{1, \dots, n\}$ es una literal.

Un término es una conjunción de literales finita de la forma $l_1 \wedge \dots \wedge l_n$ donde cada l_i con $i = \{1, \dots, n\}$ es una literal.

Una fórmula ψ se encuentra en Forma Normal Conjuntiva (CNF, por las siglas en inglés de *Conjunctive Normal Form*) si es una conjunción de cláusulas, es decir, tiene la forma $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n$ donde cada ψ_i con $i = \{1, \dots, n\}$ es una cláusula.

Una fórmula v se encuentra en Forma Normal Disyuntiva (DNF, por las siglas en inglés de *Disjunctive Normal Form*) si es una disyunción de términos, es decir, tiene la forma $v_1 \vee \dots \vee v_n$ donde cada v_i con $i = \{1, \dots, n\}$ es un término.

Si sólo existe una conectiva lógica en la fórmula, entonces la fórmula se trata de manera indistinta como CNF o DNF.

Una *interpretación, estado, o mundo* es una función w de P a $\{1, 0\}$, estos dos valores son identificados con los valores clásicos de Verdadero (V) y Falso (F) respectivamente.

El conjunto de todas las posibles interpretaciones se denotará como \mathcal{W} y sus elementos se denotarán como vectores de la forma $(w(p_1), \dots, w(p_n))$. \mathcal{W} puede representarse empleando una tabla de verdad, mientras que una interpretación emplea sólo una fila de la tabla. La cardinalidad del conjunto \mathcal{W} es $|\mathcal{W}| = 2^n$.

Una fórmula v se dice *satisfactible, satisficible* o *consistente* si $w(v) = 1$ para alguna interpretación w , una vez que w es extendida sobre los conectivos en la manera usual. En este caso w es un modelo para v .

La operación combinación (\sqcup) entre dos conjuntos contiene todos los elementos de ambos conjuntos sin eliminar elementos repetidos. El resultado es un *multiset*. La combinación es similar a la unión pero en esta operación se preservan los elementos repetidos.

Un *multiset* contiene un *par inconsistente* $\langle l, -l \rangle$ si tanto l y $-l$ están en el *multiset*.

La relación *consecuencia semántica* (\models) ocurre cuando toda interpretación que hace verdaderas a las premisas (operando izquierdo) también hace verdadera a la conclusión (operando derecho), i.e. cuando todo modelo de las premisas es también un modelo de la conclusión. La conclusión es *consecuencia lógica* de las premisas. Cuando la operación se realiza de manera sintáctica (\vdash), entonces se dice que la conclusión es *deducible* a partir de las premisas.

Además de los conceptos lógicos clásicos, se consideran las siguientes definiciones:

Definición 1 Una base de creencias K es un conjunto finito no vacío formado por WFFs de \mathcal{L} que representan las creencias de un agente. Se identifica a K como la conjunción de sus elementos.

Definición 2 Un perfil de creencias E denota las creencias del grupo de agentes que están involucrados en el proceso de fusión. E es un *multiset* de bases de creencias ya que se permite que dos o más agentes tengan creencias idénticas.

4. Operadores de fusión de creencias

Para llevar a cabo la fusión de creencias se requiere un operador, el cual es el encargado de devolver una base de creencias, sin contradicciones, que representa al conjunto de bases involucradas. En el caso de que cada base de creencias corresponda al conocimiento de un agente, al fusionar estas bases se obtiene una base que representa el conocimiento del grupo¹¹. Es común emplear interpretaciones en lugar de bases de creencias para representar el resultado de un operador de fusión, sin embargo, a partir de un conjunto de interpretaciones es posible obtener la fórmula que representa la base de creencias, salvo equivalencias.

Definición 3 Si Δ es un operador de fusión y E es un perfil de creencias, se representa con $\text{mod}(\Delta(E))$ el conjunto de interpretaciones resultantes de la fusión: el conjunto de modelos de la base de creencias consistente que se obtiene al aplicar el operador a E .

Se consideran dos tipos de operadores de fusión¹⁸:

1. **De mayoría.** Los operadores de fusión por mayoría se esfuerzan en satisfacer las bases de creencias de los involucrados como un todo. Si un subconjunto de creencias en el perfil de

creencias se repite el suficiente número de veces, entonces esta opinión es la que prevalece. Los operadores de mayoría tratan de minimizar la insatisfacción global.

- 2. De arbitraje:** Su objetivo es satisfacer a cada involucrado del grupo en el mejor grado posible. Esta propiedad es mucho más intuitiva cuando se expresa de manera modelo-teórica. Los operadores de arbitraje tratan de minimizar la insatisfacción individual.

Con la finalidad de realizar un análisis comparativo, se han elegido tres operadores de fusión para resolver problemas de toma de decisión. En la Tabla 1 se muestran los operadores y características particulares. Existen otros operadores descritos en la literatura, pero la mayoría de ellos se podrían considerar variantes de los aquí expuestos.

Tabla 1. Operadores de fusión de creencias a comparar y sus características particulares.

	Δ_{Σ}	$\Delta_{GM_{ax}}$	Δ_{ps} (<i>PS-Merge</i>)
Método	Sintáctico/Semántico	Semántico	Semántico
Tipo	Mayoría	Arbitraje	Mayoría/Arbitraje
Medida	Distancia Hamming	Distancia Hamming	Satisfacción parcial
Formato de creencias	DNF/Indistinto	Indistinto	DNF/CNF
Opera sobre bases	Consistentes	Consistentes	Consistentes/Inconsistentes

Para mostrar cómo se utilizan estos operadores se empleará un ejemplo que hemos denominado el “Hola Mundo” en fusión de creencias³⁰. Este ejercicio se utiliza comúnmente para mostrar el funcionamiento de nuevos operadores de fusión.

Ejemplo 1 *Considere un curso de base de datos con tres estudiantes. El profesor puede enseñar SQL, Datalog u O_2 , y solicita a los estudiantes escoger el curso o el lenguaje que desean aprender para satisfacer al máximo los deseos de la clase. El primer estudiante desea aprender indistintamente SQL u O_2 . El segundo desea aprender Datalog u O_2 pero no ambos. El tercero desea aprender los tres lenguajes.*

Considerando las variables proposicionales $P = \{S, D, O\}$ para denotar respectivamente los lenguajes SQL, Datalog y O_2 , se obtienen las tres fórmulas siguientes:

$$K_1 = (S \vee O) \wedge \neg D$$

$$K_2 = (\neg S \wedge D \wedge \neg O) \vee (\neg S \wedge \neg D \wedge O)$$

$$K_3 = S \wedge D \wedge O$$

que corresponden a las bases de creencias de cada uno de los estudiantes, las bases de creencias en DNF son:

$$DNF(K_1) = (S \wedge \neg D) \vee (O \wedge \neg D)$$

$$DNF(K_2) = K_2$$

$$DNF(K_3) = K_3$$

Por lo tanto, el perfil de creencias a fusionar que corresponde al conjunto de deseos de los tres estudiantes es:

$$E = \{K_1, K_2, K_3\}$$

4.1. Operador Δ_{Σ}

Uno de los primeros operadores de fusión de creencias propuesto (denominado originalmente como *CMerge*, antes de que se formalizara el concepto de operador de fusión), tiene como característica particular que puede implementarse empleando un método semántico así como uno sintáctico¹⁶.

4.1.1. Δ_Σ como operación sintáctica: *CMerge*

Definición 4 La equivalencia sintáctica del operador Δ_Σ (*CMerge*) consiste en la evaluación de (1).

$$CMerge(E) \equiv \bigvee \left\{ \bigwedge t(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \mathcal{S}, \text{ y } \nexists \mathcal{C}' \in \mathcal{S} \text{ tal que } |f(\mathcal{C}')| < |f(\mathcal{C})| \right\} \quad (1)$$

donde:

E = Perfil de creencias.

$\mathcal{S} = \{\mathcal{D}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{D}_n \mid \mathcal{D}_i \in DNF(K_i), i = 1, \dots, n\}$.

$\mathcal{C} = \text{Multiset}$ de elementos de \mathcal{S} .

$f(\mathcal{C}) = \text{Multiset}$ de los pares inconsistentes de \mathcal{C} .

$t(\mathcal{C}) = \text{Multiset}$ de los elementos restantes de \mathcal{C} , i.e. $\mathcal{C} \setminus f(\mathcal{C})$.

Este método tiene la particularidad de no requerir el cálculo de los modelos de las bases de creencias (la creación de la tabla de verdad del perfil de creencias).

Ejemplo 1.1 Dado el perfil de creencias del Ejemplo 1, para realizar la fusión mediante *CMerge*, el primer paso es presentar las creencias en *dual clause form*, donde la conjunción (\wedge) está representada por ‘,’ dentro de un conjunto de literales y la disyunción (\vee) está representado por ‘;’ separando conjuntos de literales²²:

$$Q_{K_1} = \{\{S, \neg D\}, \{O, \neg D\}\}$$

$$Q_{K_2} = \{\{\neg S, D, \neg O\}, \{\neg S, \neg D, O\}\}$$

$$Q_{K_3} = \{\{S, D, O\}\}$$

Posteriormente se debe realizar una combinación de los conjuntos $Q_{K_1}, Q_{K_2}, Q_{K_3}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{\mathcal{D}_1 \sqcup \mathcal{D}_2 \sqcup \mathcal{D}_3 \mid \mathcal{D}_i \in Q_{K_i}, i = 1, 2, 3\} \\ &= \{\{S, \neg D\} \sqcup \{\neg S, D, \neg O\} \sqcup \{S, D, O\}, \\ &\quad \{S, \neg D\} \sqcup \{\neg S, \neg D, O\} \sqcup \{S, D, O\}, \\ &\quad \{O, \neg D\} \sqcup \{\neg S, D, \neg O\} \sqcup \{S, D, O\}, \\ &\quad \{O, \neg D\} \sqcup \{\neg S, \neg D, O\} \sqcup \{S, D, O\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donde: } \mathcal{C}_1 &= \{S, \neg D, \neg S, D, \neg O, S, D, O\} \\ \mathcal{C}_2 &= \{S, \neg D, \neg S, \neg D, O, S, D, O\} \\ \mathcal{C}_3 &= \{O, \neg D, \neg S, D, \neg O, S, D, O\} \\ \mathcal{C}_4 &= \{O, \neg D, \neg S, \neg D, O, S, D, O\} \end{aligned}$$

Finalmente es necesario dividir los *multisets* \mathcal{C}_i en dos *sub-multisets*:

$f(\mathcal{C}_i)$: Contiene los pares inconsistentes en \mathcal{C}_i

$t(\mathcal{C}_i)$: Contiene los elementos restantes de \mathcal{C}_i eliminando los elementos de $f(\mathcal{C}_i)$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{\mathcal{S}, \neg \mathcal{B}, \neg \mathcal{S}, \mathcal{B}, \neg \emptyset, S, D, \emptyset\} \\ f(\mathcal{C}_1) &= \{S, \neg S, \neg D, D, \neg O, O\} \\ t(\mathcal{C}_1) &= \{S, D\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 &= \{\mathcal{S}, \neg \mathcal{B}, \neg \mathcal{S}, \neg D, O, S, \mathcal{B}, O\} \\ f(\mathcal{C}_2) &= \{S, \neg S, \neg D, D\} \\ t(\mathcal{C}_2) &= \{\neg D, O, S, O\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3 &= \{\emptyset, \neg \mathcal{B}, \neg \mathcal{S}, \mathcal{B}, \neg \emptyset, \mathcal{S}, D, O\} \\ f(\mathcal{C}_3) &= \{O, \neg O, \neg D, D, \neg S, S\} \\ t(\mathcal{C}_3) &= \{D, O\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_4 &= \{O, \neg \mathcal{B}, \neg \mathcal{S}, \neg D, O, \mathcal{S}, \mathcal{B}, O\} \\ f(\mathcal{C}_4) &= \{\neg D, D, \neg S, S\} \end{aligned}$$

$$t(\mathcal{C}_4) = \{O, \neg D, O, O\}$$

Dado que los *multisets* \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_4 tienen menor cantidad de pares inconsistentes, empleando (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} CMerge(Q_{K_1}, Q_{K_2}, Q_{K_3}) &= t(\mathcal{C}_2) \vee t(\mathcal{C}_4) \\ &= \{\{\neg D, O, S\}, \{O, \neg D\}\} \equiv \{O, \neg D\} \equiv \neg D \wedge O \end{aligned}$$

Por lo tanto, el profesor debe enseñar SQL y O_2 , o únicamente O_2 , para satisfacer los deseos de la mayoría de la clase.

4.1.2. Δ_Σ como operación semántica

Definición 5 La Distancia Hamming $dist$ entre dos interpretaciones corresponde al número de átomos proposicionales en los que dos interpretaciones difieren.

Por ejemplo, la distancia entre $(1, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$ es 1, ya que las dos interpretaciones se diferencian sólo en el segundo átomo: $dist((1, 0, 0), (1, 1, 0)) = 1$

Definición 6 La distancia entre una interpretación w y una base de creencias K se define como:

$$dist(w, K) = \min_{w' \models K} dist(w, w')$$

Definición 7 La Σ -distancia $dist_\Sigma$ se define, dado un perfil de creencias E e interpretación w , como:

$$dist_\Sigma(w, E) = \sum_{K \in E} dist(w, K)$$

De esta manera se define el preorden:

$$w \leq_E^\Sigma w' \iff dist_\Sigma(w, E) \leq dist_\Sigma(w', E)$$

Definición 8 El operador Δ_Σ se define mediante sus modelos como:

$$mod(\Delta_\Sigma(E)) = \min(\mathcal{W}, \leq_E^\Sigma) \quad (2)$$

Ejemplo 1.2 Dado el perfil de creencias del Ejemplo 1, para realizar la fusión mediante Δ_Σ , el primer paso es construir la tabla de verdad del perfil de creencias, posteriormente calcular la distancia de cada interpretación w_i con respecto a cada base de creencias, y finalmente calcular la suma de distancias de las bases de creencias. De acuerdo a la Tabla 2, para este perfil de creencias se tienen 8 posibles interpretaciones (w_1, \dots, w_8) , la Tabla 2 muestra las distancias entre interpretaciones y bases de creencias, cada renglón de la última columna corresponde a la suma de las distancias asociadas a la interpretación w_i y el perfil. El mínimo valor de la última columna es señalado con *, cuyas interpretaciones asociadas corresponden a los modelos del operador Δ_Σ , lo cual representa la opinión de la mayoría.

Como se puede observar en la Tabla 2, el menor valor en la última columna es 2, por lo que empleando (2) se obtiene:

Tabla 2. Fusión de creencias empleando Δ_Σ .

	S	D	O	$w_i(K_1)$	$w_i(K_2)$	$w_i(K_3)$	$\text{dist}(w_i, K_1)$	$\text{dist}(w_i, K_2)$	$\text{dist}(w_i, K_3)$	$\mathbf{dist}_\Sigma(w_i, E)$
w_1	1	1	1	0	0	1	1	2	0	3
w_2	1	1	0	0	0	0	1	1	1	3
w_3	1	0	1	1	0	0	0	1	1	2*
w_4	1	0	0	1	0	0	0	2	2	4
w_5	0	1	1	0	0	0	1	1	1	3
w_6	0	1	0	0	1	0	2	0	2	4
w_7	0	0	1	1	1	0	0	0	2	2*
w_8	0	0	0	0	0	0	1	1	3	5

$$\text{mod}(\Delta_\Sigma(E)) = \{w_3, w_7\} = \{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$$

6

$$\Delta_\Sigma(E) = (S \wedge \neg D \wedge O) \vee (\neg S \wedge \neg D \wedge O) \equiv \neg D \wedge O$$

Por lo tanto, el profesor debe enseñar SQL y O_2 , o únicamente O_2 para satisfacer los deseos de la mayoría de la clase.

Como es de esperarse, los resultados empleando ambos métodos de Δ_Σ son equivalentes.

4.2. Operador Δ_{GMax}

Además de definir el concepto de operador de fusión de creencias denotado por Δ (Definición 3), en¹⁷ se propone el primer operador de fusión de creencias de arbitraje denominado Δ_{GMax} , el cual constituye un refinamiento del operador Δ_{Max} ³¹. Este operador emplea la noción de distancia entre dos interpretaciones y la noción de distancia entre una interpretación y una base de creencias introducidas en la sección precedente.

Definición 9 La *GMax-distancia* se define a partir de la lista de distancias entre cada w y las n bases de creencias de E : $(\text{dist}_1^w \dots \text{dist}_n^w)$, con $\text{dist}_j^w = \text{dist}(w, K_j)$ para $j = 1, \dots, n$. Sea L_w^E la lista obtenida de $(\text{dist}_1^w \dots \text{dist}_n^w)$ colocando sus elementos en orden descendente. Se denota como $\text{dist}_{GMax}(w, E)$ la lista L_w^E . Sea \leq_{lex} el orden lexicográfico entre las secuencias de números enteros (de la misma longitud), se define el siguiente pre-orden total:

$$w \leq_{GMax}^E w' \iff \text{dist}_{GMax}(w, E) \leq_{lex} \text{dist}_{GMax}(w', E)$$

Definición 10 El operador Δ_{GMax} se define empleando sus modelos como:

$$\text{mod}(\Delta_{GMax}(E)) = \min(\mathcal{W}, \leq_{GMax}^E) \quad (3)$$

Ejemplo 1.3 Dado el perfil de creencias del Ejemplo 1, para calcular la fusión mediante Δ_{GMax} , el primer paso es construir la tabla de verdad del perfil de creencias, posteriormente calcular la distancia de cada interpretación w_i con respecto a cada base de creencias, y finalmente calcular la lista de distancias $\text{dist}_{GMax}(w_i, E)$. De acuerdo a la Tabla 3, para este perfil de creencias se tienen 8 posibles interpretaciones (w_1, \dots, w_8) , la Tabla 3 muestra las distancias entre interpretaciones y bases de creencias, cada renglón de la última columna corresponde a la lista de distancias dist_{GMax} ordenadas lexicográficamente. El valor mínimo lexicográficamente (señalado con *) se asocia a las interpretaciones que corresponden a los modelos del operador Δ_{GMax} , lo cual representa la opinión de la mayoría.

Como se puede observar en la Tabla 3, el valor mínimo en la columna $\text{dist}_{GM_{ax}}(w_i, E)$ de acuerdo a (3) es $(1, 1, 0)$ por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{mod}(\Delta_{GM_{ax}}(E)) &= w_3 = \{(1, 0, 1)\} \\ &\quad \acute{o} \\ \Delta_{GM_{ax}}(E) &= S \wedge \neg D \wedge O \end{aligned}$$

Por lo tanto, el profesor debe enseñar SQL y O_2 para satisfacer al máximo los deseos de cada uno de los estudiantes.

Tabla 3. Fusión de creencias empleando $\Delta_{GM_{ax}}$.

	S	D	O	$w_i(K_1)$	$w_i(K_2)$	$w_i(K_3)$	$\text{dist}(w_i, K_1)$	$\text{dist}(w_i, K_2)$	$\text{dist}(w_i, K_3)$	$\text{dist}_{GM_{ax}}(w_i, E)$
w_1	1	1	1	0	0	1	1	2	0	(2,1,0)
w_2	1	1	0	0	0	0	1	1	1	(1,1,1)
w_3	1	0	1	1	0	0	0	1	1	(1,1,0)*
w_4	1	0	0	1	0	0	0	2	2	(2,2,0)
w_5	0	1	1	0	0	0	1	1	1	(1,1,1)
w_6	0	1	0	0	1	0	2	0	2	(2,2,0)
w_7	0	0	1	1	1	0	0	0	2	(2,0,0)
w_8	0	0	0	0	0	0	1	1	3	(3,1,1)

4.3. Operador Δ_{ps} (PS-Merge)

Este operador de fusión de mayoría, a diferencia de los operadores anteriores, considera bases de creencias inconsistentes, extrayendo información de aquellas piezas que no causaron la inconsistencia. Es sensible a la frecuencia de creencias de un agente, es decir, toma en cuenta la repetición de ellas y no está basado en una medida clásica de distancia entre modelos (distancia Hamming) sino en la noción de Satisfacción Parcial (*Partial Satisfiability*)²⁵. Esta noción permite el ahorro de cómputo de los modelos de las bases de creencias.

Definición 11 La satisfacción parcial se define a partir de una base de creencias normalizada en formato DNF: Q_K , $w \in \mathcal{W}$ una interpretación cualquiera y $|\mathcal{P}| = n$. La satisfacción parcial de Q_K para w , denotada por $w_{ps}(Q_K)$, se define como:

1. Si Q_K es una conjunción $C_1 \wedge \dots \wedge C_s$ donde cada C_i es una literal entonces:

$$w_{ps}(Q_K) = \max \left\{ \sum_{i=1}^s \frac{w(C_i)}{s}, \frac{n - |\mathcal{P}(\bigwedge_{i=1}^s C_i)|}{2n} \right\} \quad (4)$$

Donde:

n = Número de átomos del lenguaje considerado.

s = Número de literales que aparecen en la conjunción.

2. Si Q_K es una disyunción $D_1 \vee \dots \vee D_r$ donde cada D_i es una conjunción de literales entonces:

$$w_{ps}(Q_K) = \max \{w_{ps}(D_1), \dots, w_{ps}(D_r)\} \quad (5)$$

La interpretación intuitiva de la Satisfacción Parcial es como sigue: es natural pensar que si se tiene la conjunción de dos literales y solamente una es satisfecha, el agente estará satisfecho

al 50 %. Al generalizar esta idea se puede medir la satisfacción de la conjunción de uno o más literales utilizando la suma de la evaluación de las literales bajo la interpretación sobre el número de conjuntados.

Cuando la creencia del agente considera algunos y no todos los átomos del lenguaje, la decisión o evaluación sobre dichos átomos no le afecta, ya que no aparecen en sus creencias, entonces él es indiferente en la evaluación de estos átomos ajenos, así que interpretamos esta indiferencia como satisfacción del 50 % para cada átomo que no aparece en su creencia. Utilizando el concepto de Satisfacción Parcial se define el operador Δ_{ps} .

Definición 12 *El operador Δ_{ps} se define a partir de los valores que maximizan la suma de la satisfacción parcial de las bases del perfil. Sea E un perfil de creencias obtenido de las bases de creencias Q_{K_1}, \dots, Q_{K_m} , la fusión de E empleando satisfacción parcial, denotada por $\Delta_{ps}(E)$ es una función que va del conjunto de perfiles de creencias al conjunto de bases de creencias tal que:*

$$\text{mod}(\Delta_{ps}(E)) = \left\{ w \in W \mid \sum_{i=1}^m w_{ps}(Q_{K_i}) \geq \sum_{i=1}^m w'_{ps}(Q_{K_i}) \text{ para todo } w' \in W \right\} \quad (6)$$

Ejemplo 1.4 Dado el perfil de creencias del Ejemplo 1, para calcular la fusión empleando Δ_{ps} , el primer paso es calcular la Satisfacción Parcial de cada base bajo cada interpretación w_i , finalmente se suma la satisfacción de cada una de las bases. De acuerdo a la Tabla 4, para este perfil de creencias se tienen 8 posibles interpretaciones (w_1, \dots, w_8), la Tabla 4 muestra la satisfacción parcial de cada base de creencias con respecto a cada interpretación. En la columna $\sum_{j=1}^3 (w_{i_{ps}}(Q_{K_j}))$ se muestra la suma de las satisfacciones parciales de las bases, el máximo valor (señalado con *) corresponde a los modelos del resultado del operador $\Delta_{ps}(E)$, lo cual representa la opinión de la mayoría. En la columna $\min_{j=1}^3 (w_{i_{ps}}(Q_{K_j}))$ se muestra la mínima satisfacción parcial del conjunto de agentes para cada interpretación, el valor máximo (señalado con *) corresponde a un refinamiento del resultado de $\Delta_{ps}(E)$.

Tabla 4. Fusión de creencias empleando $\Delta_{ps}(E)$.

	S	D	O	$w_{i_{ps}}(Q_{K_1})$	$w_{i_{ps}}(Q_{K_2})$	$w_{i_{ps}}(Q_{K_3})$	$\sum_{j=1}^3 (w_{i_{ps}}(Q_{K_j}))$	$\min_{j=1}^3 (w_{i_{ps}}(Q_{K_j}))$
w_1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{11}{6} \approx 1.83$	$\frac{1}{3}$
w_2	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{6} \approx 1.83$	$\frac{1}{2}$
w_3	1	0	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{6} \approx 2.33^*$	$\frac{2}{3}^*$
w_4	1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{6} \approx 1.67$	$\frac{1}{3}$
w_5	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{6} \approx 1.83$	$\frac{1}{2}$
w_6	0	1	0	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{6} \approx 1.50$	$\frac{1}{6}$
w_7	0	0	1	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{6} \approx 2.33^*$	$\frac{1}{3}$
w_8	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{7}{6} \approx 1.67$	0

De manera ilustrativa, se muestra el cálculo de la satisfacción parcial para la base Q_{K_1} en la interpretación w_3 . El procedimiento para calcular la satisfacción parcial es como sigue (5):

$$w_{3_{ps}}(Q_{K_1}) = \max \{ w_{3_{ps}}(S \wedge \neg D), w_{3_{ps}}(O \wedge \neg D) \}$$

La satisfacción parcial de $w_{3_{ps}}(S \wedge \neg D)$ se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} w_{3_{ps}}(S \wedge \neg D) &= \max \left\{ \frac{w(S) + w(\neg D)}{2}, \frac{3 - |\mathcal{P}(S \wedge \neg D)|}{2(3)} \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{1 + 1}{2}, \frac{3 - 2}{6} \right\} = \max \left\{ \frac{2}{2}, \frac{1}{6} \right\} = 1 \end{aligned}$$

La satisfacción parcial de $w_{3_{ps}}(O \wedge \neg D)$ se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} w_{3_{ps}}(O \wedge \neg D) &= \max \left\{ \frac{w(O) + w(\neg D)}{2}, \frac{3 - |\mathcal{P}(S \wedge \neg D)|}{2(3)} \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{1 + 1}{2}, \frac{3 - 2}{6} \right\} = \max \left\{ \frac{2}{2}, \frac{1}{6} \right\} = 1 \end{aligned}$$

Finalmente, la satisfacción parcial de la base de creencias Q_{K_1} en la interpretación w_3 es:

$$w_{3_{ps}}(Q_{K_1}) = \max \{1, 1\} = 1.$$

Como se puede observar en la Tabla 4, las primeras columnas definen las interpretaciones posibles. Las 3 columnas siguientes especifican la satisfacción parcial de las bases de creencias Q_{K_1} , Q_{K_2} y Q_{K_3} , respectivamente. La siguiente columna despliega la suma de la satisfacción parcial de las tres bases de creencias y finalmente en la última columna se despliega el mínimo de las satisfacciones parciales de las tres bases de creencias.

A pesar de que $\Delta_{ps}(E)$ pertenece a la categoría de operadores de mayoría, éste puede ser refinado tendiendo a ser un operador arbitrario si se calcula el valor mínimo entre la satisfacción parcial de las bases. Con este refinamiento se obtiene una forma imparcial para elegir entre las interpretaciones resultantes, que intenta satisfacer a todos los agentes tanto como sea posible.

Revisando la Tabla 4, hay dos interpretaciones que son el resultado de la fusión: w_3 y w_7 , ya que ambas interpretaciones maximizan los deseos del grupo. Sin embargo, en la última columna de la Tabla 4 se puede observar que la función $\min(Q_{K_1}, Q_{K_2}, Q_{K_3})$, el mínimo de las satisfacciones parciales $w_{i_{ps}}(Q_{K_1})$, $w_{i_{ps}}(Q_{K_2})$ y $w_{i_{ps}}(Q_{K_3})$. La interpretación w_3 obtiene el valor mínimo de las dos mejores interpretaciones, ya que satisface a cada estudiante al menos en dos terceras partes, al contrario de la interpretación w_7 que satisface al menos en una tercera parte a cada estudiante. El resultado de este refinamiento coincide con el del operador Δ_{GMax} .

5. Escenarios de prueba

En los cuadros siguientes se muestra un catálogo de 8 ejemplos básicos propuestos en²². A menudo estos ejemplos se utilizan como *benchmark* para comparar los resultados obtenidos por diferentes operadores de fusión de creencias¹. Cabe mencionar que estos ejemplos se formularon originalmente utilizando notación matemática, por lo que una aportación más de este trabajo es la traducción de éstos a lenguaje natural para describirlos de manera intuitiva en situaciones de la vida cotidiana.

Los tres operadores obtienen los mismos resultados en la mayoría de casos, exceptuando los escenarios 3 y 6, en los cuales el operador Δ_{ps} es el que produce una base de creencias distinta a los otros dos operadores. Analizando a detalle ambos resultados, se puede concluir que el operador Δ_{ps} obtiene resultados más precisos, porque no deja variables sin asignar un único valor de Verdadero o Falso.

Escenario 1 Los tres socios de una firma deben tomar una decisión acerca de cambiar de domicilio la oficina central: el primero y el segundo opinan a favor de la mudanza, mientras que el tercero opina que deben permanecer en el mismo establecimiento.

$$\begin{aligned} K_1 &= \{a\} & a &= \text{Mudanza de la oficina central.} \\ K_2 &= \{a\} \\ K_3 &= \{\neg a\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \{K_1, K_2, K_3\} \\ \Delta_\Sigma(E_1) &\equiv \Delta_{GM_{ax}}(E_1) \equiv \Delta_{ps}(E_1) = \{a\} \end{aligned}$$

Resultado: Mudanza de la oficina central.

Escenario 2 Un grupo de especialistas médicos debe tomar una decisión acerca de la vida de un paciente. Uno de los especialistas detecta un cáncer incurable en el paciente y recomienda practicar la eutanasia. El segundo especialista observa que si el paciente tiene cáncer, entonces debe ser sometido a quimioterapia, no practicar eutanasia. El tercer especialista comenta que la experiencia indica que si se aplica la quimioterapia entonces el paciente sufre, y recomienda la práctica de la eutanasia.

$$\begin{aligned} K_1 &= \{a, c\} & a &= \text{Cáncer diagnosticado.} \\ K_2 &= \{a \rightarrow b, \neg c\} & b &= \text{Quimioterapia.} \\ K_3 &= \{b \rightarrow d, c\} & c &= \text{Eutanasia.} \\ & & d &= \text{Sufrimiento.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \{K_1, K_2, K_3\} \\ \Delta_\Sigma(E_2) &\equiv \Delta_{GM_{ax}}(E_2) \equiv \Delta_{ps}(E_2) = \{a, a \rightarrow b, b \rightarrow d, c\} \end{aligned}$$

Resultado: Cáncer diagnosticado, Quimioterapia, Sufrimiento y Eutanasia.

Escenario 3 En una fábrica se debe llegar a un acuerdo con respecto al manejo de desechos. El departamento de producción opina que la fábrica está produciendo desechos y que éstos deben arrojarlos a un lago cercano. El departamento de mejora continua opina que si la fábrica produce desechos entonces debe contratar a un especialista en el manejo de desechos y de ninguna manera arrojarlos al lago, dado que se está buscando obtener el distintivo como “Empresa Socialmente Responsable”. El departamento de finanzas apunta que si se contrata a un especialista en gestión de desechos entonces se incrementarán los costos, y concluye con que se deben arrojar los desechos al lago. El departamento de calidad menciona que de ninguna manera se deben arrojar los desechos al lago.

$$\begin{aligned} K_1 &= \{a, c\} & a &= \text{Producción de desechos.} \\ K_2 &= \{a \rightarrow b, \neg c\} & b &= \text{Contratar a un especialista en desechos.} \\ K_3 &= \{b \rightarrow d, c\} & c &= \text{Arrojar desechos en el lago.} \\ K_4 &= \{\neg c\} & d &= \text{Incremento en los costos.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= \{K_1, K_2, K_3, K_4\} \\ \Delta_\Sigma(E_3) &\equiv \Delta_{GM_{ax}}(E_3) = \{a, a \rightarrow b, b \rightarrow d\} \\ \Delta_{ps}(E_3) &= \{a, a \rightarrow b, b \rightarrow d, \neg c\} \end{aligned}$$

Resultado de Δ_Σ y $\Delta_{GM_{ax}}$: Se producen desechos, se contrata a un especialista en gestión de desechos y se incrementan los costos.

Resultado de Δ_{ps} : Se producen desechos, se contrata a un especialista en gestión de desechos, se incrementan los costos y no se arrojan los desechos al lago.

Escenario 4 Tres gerentes debaten acerca de la reducción de costos en su compañía. El primero opina que es menester reducir costos a como dé lugar. El segundo opina que se debe reducir el personal, ya que si se realiza esta acción se verán disminuidos los costos de la compañía. Finalmente el tercero opina que la reducción de costos no es necesaria.

$$\begin{aligned} K_1 &= \{b\} & a &= \text{Reducir personal.} \\ K_2 &= \{a, a \rightarrow b\} & b &= \text{Reducir costos.} \\ K_3 &= \{-b\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_4 &= \{K_1, K_2, K_3\} \\ \Delta_{\Sigma}(E_4) &\equiv \Delta_{GM_{ax}}(E_4) \equiv \Delta_{ps}(E_4) = \{a, a \rightarrow b\} \end{aligned}$$

Resultado: Reducir el personal y reducir costos.

Escenario 5 Una persona consulta a dos especialistas para ayudarle a reducir su peso. El primer especialista recomienda ejercicio diario, el segundo especialista recomienda una dieta balanceada y ejercicio diario. La persona en cuestión no desea realizar ejercicio en lo absoluto.

$$\begin{aligned} K_1 &= \{b\} & a &= \text{Ejercicio diario.} \\ K_2 &= \{a, b\} & b &= \text{Dieta balanceada.} \\ K_3 &= \{-b\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_5 &= \{K_1, K_2, K_3\} \\ \Delta_{\Sigma}(E_5) &\equiv \Delta_{GM_{ax}}(E_5) \equiv \Delta_{ps}(E_5) = \{a, b\} \end{aligned}$$

Resultado: Ejercicio diario y dieta balanceada

Escenario 6 En un hospital hay tres médicos examinando a un paciente en estado crítico. El primer médico diagnostica que el paciente está a punto de perder la vida. El segundo médico opina que si el paciente está al borde de la muerte, entonces se debe someter a cirugía de inmediato. El tercer médico diagnostica que el paciente está a punto de morir, pero no se debe someter a cirugía dado que no resistirá la operación.

$$\begin{aligned} K_1 &= \{a\} & a &= \text{Paciente en estado crítico.} \\ K_2 &= \{a \rightarrow b\} & b &= \text{Cirugía.} \\ K_3 &= \{a, -b\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_6 &= \{K_1, K_2, K_3\} \\ \Delta_{\Sigma}(E_6) &\equiv \Delta_{GM_{ax}}(E_6) = \{a\} \\ \Delta_{ps}(E_6) &= \{a, a \rightarrow b\} \end{aligned}$$

Resultado de Δ_{Σ} y $\Delta_{GM_{ax}}$: Paciente en estado crítico.

Resultado de Δ_{ps} : Paciente en estado crítico y cirugía.

Escenario 7 El departamento de recursos humanos debe tomar una decisión acerca del futuro de un empleado. Uno de los auditores descubrió que dicho empleado ha cometido una falta administrativa. El responsable del departamento opina que si se comete una falta admi-

nistrativa, entonces ese empleado debe ser despedido. La secretaria comenta que efectivamente el empleado ha cometido una falta, pero no amerita que se le despida. El representante de derechos humanos comenta que de ninguna manera se debe despedir al empleado.

$$\begin{array}{ll} K_1 = \{a\} & a = \text{Empleado con falta administrativa.} \\ K_2 = \{a \rightarrow b\} & b = \text{Despido.} \\ K_3 = \{a, \neg b\} & \\ K_4 = \{\neg b\} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} E_7 &= \{K_1, K_2, K_3, K_4\} \\ \Delta_\Sigma(E_7) &\equiv \Delta_{GM_{ax}}(E_7) \equiv \Delta_{ps}(E_7) = \{a, \neg b\} \end{aligned}$$

Resultado: Empleado con falta administrativa pero no despido.

Escenario 8 En un hogar se debe llegar a un consenso entre las opiniones de las personas adultas de la familia. El padre desea premiar a su hijo con una computadora portátil, dado su buen desempeño escolar. La madre opina que si se compra una computadora portátil al hijo, entonces deben comprarle lo mismo a la hija. El abuelo está de acuerdo en premiar al nieto, sin embargo menciona que la nieta no debería recibir ninguna recompensa. Finalmente, la abuela opina lo mismo que la madre de los pequeños.

$$\begin{array}{ll} K_1 = \{a\} & a = \text{Computadora portátil para el hijo.} \\ K_2 = \{a \rightarrow b\} & b = \text{Computadora portátil para la hija.} \\ K_3 = \{a, \neg b\} & \\ K_4 = \{a \rightarrow b\} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} E_8 &= \{K_1, K_2, K_3, K_4\} \\ \Delta_\Sigma(E_8) &\equiv \Delta_{GM_{ax}}(E_8) \equiv \Delta_{ps}(E_8) = \{a, a \rightarrow b\} \end{aligned}$$

Resultado: Computadora portátil para el hijo y computadora portátil para la hija.

Es importante hacer notar que en todos los escenarios, el modelo considera a todos los involucrados con la misma prioridad, aunque en la vida real se podrían manejar jerarquías que harían innecesaria la fusión de creencias. Por ejemplo en el escenario 7, la opinión de un gerente general invalidaría los argumentos de cualquier departamento.

Por otro lado, en la mayoría de los escenarios no todos los involucrados consideran todas las variables, y en caso de que los involucrados sí opinen respecto a todos los parámetros de decisión, podría resultar en una base de creencias diferente. Por ejemplo en el escenario 3, el departamento de producción sólo menciona que se producen desechos y que éstos deben arrojarse al lago cercano, sin contemplar las variables restantes.

6. Prototipo Fusionador de Creencias

Se desarrolló un Prototipo Fusionador de Creencias que implementa los tres operadores de fusión a comparar. El Fusionador ha sido probado con varios ejemplos, entre ellos, los ocho escenarios mostrados. Los operadores Δ_Σ (método semántico) y $\Delta_{GM_{ax}}$ se implementaron usando el Open Java Development Kit versión 6 (Open JDK 6). El operador Δ_{ps} implementado en lenguaje M²⁶, se incluyó en el Prototipo mediante la biblioteca libre JavaOctave, por lo que se requiere GNU Octave¹⁰ para poder utilizar este último operador.

La interfaz del Prototipo Fusionador de Creencias se muestra en la Figura 1. Las bases de creencias se asignan en cada una de las filas de la tabla ubicada en la parte izquierda del Prototipo

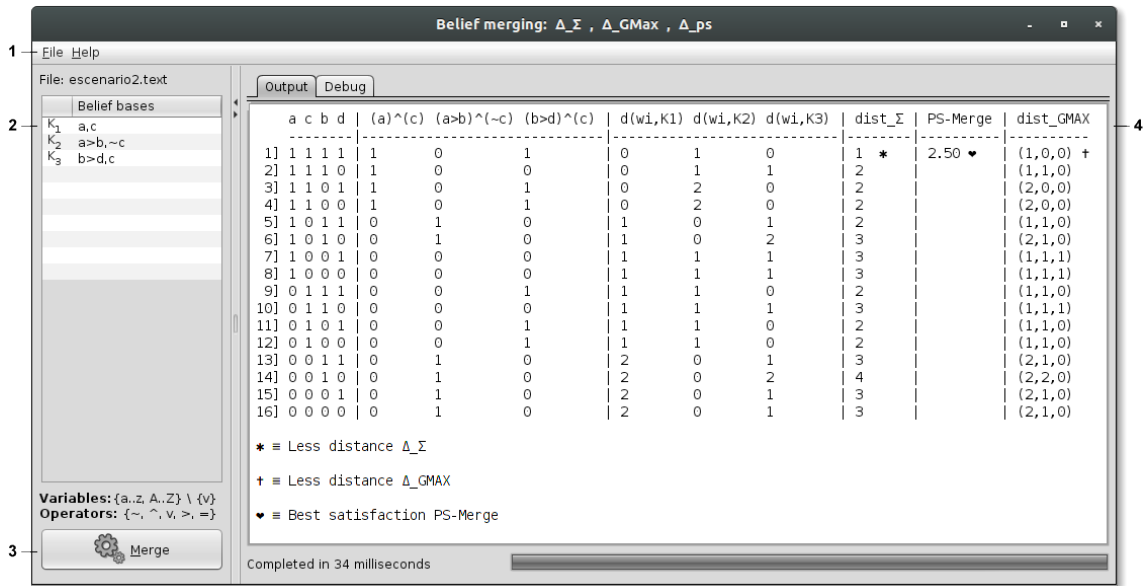


Fig. 1. Prototipo Fusionador de Creencias.

(i.e. una fila por base de creencia). Las variables proposicionales se representan por las letras del alfabeto (exceptuando la letra ‘v’, mayúsculas y minúsculas se tratan de manera distinta), y los operadores lógicos en π se representan por los caracteres ‘~’, ‘^’, ‘v’, ‘;’, ‘=’, respectivamente. Cada creencia es separa por comas.

En la Figura 1 se muestran los elementos de la interfaz del Prototipo: (1) Opciones de menú: bajo el menú Principal se encuentra la opción Cargar archivo, bajo el menú Ayuda se puede acceder al contenido descriptivo del Prototipo. (2) Listado de bases de creencias a fusionar, que pueden corresponder a entradas de un archivo de texto cargado o pueden ser introducidas directamente por el usuario en las celdas editables. (3) Botón de acción para realizar el proceso de fusión de creencias. (4) Panel de salida donde se despliega el resultado de los 3 operadores de fusión, mostrando también los cálculos preliminares.

Adicionalmente es posible cargar un archivo de texto con el mismo formato, considerando cada fila del archivo como una base de creencias diferente. En la Figura 1 se muestra la carga de un archivo de texto que corresponde al escenario 2:

```

a,c
a>b,~c
b>d,c
```

Los ocho escenarios se evaluaron utilizando el Prototipo Fusionador de Creencias, por lo que los resultados obtenidos fueron los modelos de la fusión de cada perfil E_i . Luego se tradujeron estos modelos a las fórmulas proposicionales correspondientes a cada base de creencia. Finalmente se interpreta la base de creencias resultante en lenguaje natural.

El tiempo máximo en resolver cada uno de los escenarios fue de 24 milisegundos, en una computadora portátil Alienware M17x con procesador con procesador Intel Core i7 a 2 GHz, memoria RAM de 8 GB y sistema operativo Ubuntu Linux 14.10. El tiempo que tarda el Prototipo es menor con respecto al tiempo en el orden de minutos que tardaría un ser humano en resolverlos, suponiendo que el individuo está familiarizado con el concepto de fusión de creencias. Además, estos escenarios son ejemplos “pequeños” que podrían resolverse “a mano”, pero al añadir más

variables y más involucrados, el problema puede ser inmanejable de manera manual, ya que aunado al tiempo, es muy probable cometer errores al realizar los múltiples cálculos del proceso de fusión de creencias.

Cabe resaltar que aunque existen implementaciones de operadores de fusión de creencias^{26,13,29}, no se ha encontrado hasta el momento una herramienta que permita realizar de manera automática la fusión de bases de creencias (incluso para ejemplos pequeños), en un formato gráfico e intuitivo. Existen herramientas gráficas que evalúan fórmulas proposicionales y realizan la evaluación de consecuencias lógicas⁶, pero no realizan fusión de creencias. Las implementaciones mencionadas corresponden a operadores de fusión en código fuente que el usuario debe compilar y ejecutar en línea de comandos.

El Prototipo Fusionador de Creencias es software libre y se puede descargar desde <http://www.sourceforge.net/p/beliefmerger>.

7. Conclusiones

El proceso de toma de decisiones no es un problema sencillo ni económica ni matemáticamente, ya que usualmente no existe una solución óptima. Diversos criterios pueden estar inmiscuidos en el proceso (e.g. criterios de carácter social, económico, financiero, ecológico y tecnológico) que deben considerarse simultáneamente y muchos de ellos se encuentran en conflicto entre sí³.

La técnica de fusión de creencias es una alternativa viable para resolver problemas que involucren la toma de decisiones, ya que se ha demostrado que es posible traducir un problema de lenguaje coloquial al lenguaje formal de la lógica proposicional en forma de bases de creencias, para aplicar un operador de fusión y así obtener como resultado de la fusión un conjunto de opciones sin contradicciones que representa efectivamente la opinión de la mayoría, esto mediante un operador de fusión de creencias.

Hasta el momento, la técnica de fusión de creencias es poco conocida y existe poca evidencia en la literatura que muestre su uso para resolver problemas de la vida diaria^{5,23}, por lo que el uso de esta teoría es una estrategia novedosa que puede aportar no sólo a las Ciencias Computacionales sino también al área de Planeación Estratégica, dado que puede apoyar en la toma de decisiones de diversa índole.

Por ejemplo, en un escenario con sistemas multiagente en el cual cada agente obtiene mediante sensores datos discrepantes acerca del estado del mundo, se podría utilizar un operador de fusión de creencias para determinar cuál es el estado verdadero del mundo. Otro caso interesante se presenta cuando un individuo solicita un crédito en una institución bancaria, puesto que si dicha institución revisa el historial crediticio del solicitante y encuentra tanto datos a favor como en contra de su reputación, entonces podría utilizar la fusión de creencias para determinar la viabilidad del crédito.

Los operadores de fusión de creencias presentados poseen características particulares que los vuelven interesantes para su comparación. En este sentido, Δ_{ps} constituye un operador interesante al obtener resultados más apropiados para el contexto de la toma de decisiones, dado que en los casos mostrados siempre asigna un valor a cada variable proposicional.

Existe abundante información teórica en la literatura con respecto a la fusión de creencias, pero eso no es suficiente para orientar a un usuario inexperto que se interese en aplicar esta técnica para problemas específicos. Por ello, se propuso como aporte adicional la “traducción” a lenguaje natural de los 8 escenarios básicos utilizados recurrentemente en la literatura (la traducción a lenguaje formal es un término común pero no la traducción a la inversa, ya que no se tiene una traducción única pues hay un número infinito de traducciones a lenguaje coloquial), y se desarrolló un Prototipo Fusionador de Creencias que permite fusionar creencias modeladas en lógica proposicional. Así, se demuestra la aplicabilidad de esta técnica y se abre una nueva ruta de investigación con amplio futuro, donde un trabajo a futuro inmediato consiste en el desarrollo de

una herramienta orientada al usuario final con interfaz intuitiva en la cual se puedan formular las creencias de cada agente en lenguaje natural, se traduzcan automáticamente a lenguaje formal, se realice el proceso de fusión y finalmente se muestre el resultado en lenguaje natural al usuario.

Al identificar las características particulares de cada uno de los métodos, los lectores con poca experiencia en la fusión de creencias pueden entender el funcionamiento general de los enfoques. Cabe hacer notar que el tiempo requerido para entender cada enfoque suele ser significativo, dado el conocimiento matemático requerido. Hasta donde sabemos, no existen referencias para saber con certeza qué métodos utilizar en determinadas situaciones. Sería de utilidad que haya comparaciones globales empleando casos del mundo real para poder hacer comparaciones entre los resultados obtenidos por los operadores.

Referencias bibliográficas

1. I. Bloch and A. Hunter. Fusion: General concepts and characteristics. *International Journal of Intelligent Systems*, 10(16):1107–1134, 2001.
2. P. Bro Miltersen, J. Radhakrishnan, and I. Wegener. On converting CNF to DNF. *Theoretical Computer Science*, 347(1-2):325–335, 2005.
3. R. Caballero Fernández and G. M. Fernández Barberis (Coord.). *Toma de decisiones con criterios múltiples*. ASEPUMA. Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas aplicadas a la Economía y la Empresa, 1 edition, 2002.
4. J. L. Chacón and R. Pino Pérez. Duality between merging operators and social contraction operators. In N. Bjørner and A. Voronkov, editors, *Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning*, volume 7180 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 183–196. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
5. O. Chávez-Bosquez, J. Marchi, and P. Pozos-Parra. Nutritional menu planning: a hybrid approach and preliminary tests. *Research in Computing Science*, 82:95–106, 2014.
6. O. Chávez-Bosquez and P. Pozos-Parra. Logic Calculator. <http://www.sourceforge.net/p/logiccalculator>, 2013. Consultado: 20/11/2014.
7. Zhengxin Chen. *Computational Intelligence for Decision Support*. CRC Press, Inc., USA, 1 edition, 2000.
8. J. Cuena. *Lógica Informática*. Alianza Editorial, España, 1 edition, 1986.
9. E. de Gortari. *Diccionario de la lógica*. Plaza y Valdés, España, 1 edition, 1988.
10. J.W. Eaton, D. Bateman, and S. Hauberg. *GNU Octave version 3.8.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2011.
11. P. Everaere, S. Konieczny, and P. Marquis. Conflict-based merging operators. In G. Brewka and J. Lang, editors, *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the Eleventh International Conference, KR 2008, Sydney, Australia, September 16-19, 2008*, pages 348–357. AAAI Press, 2008.
12. P. Gärdenfors. *Belief revision*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 1992.
13. N. Gorogiannis and A. Hunter. Supporting code for the paper “Implementing semantic merging operators using binary decision diagrams”. <http://www.eis.mdx.ac.uk/staffpages/nikosgkorogiannis/>, s.f. Consultado: 07/09/2014.
14. M. Hazewinkel. *Encyclopedia of Mathematics*. Springer, Netherlands, 1 edition, 1994.
15. J. Kacprzyk. A ‘down-to-earth’ managerial decision making via a fuzzy-logic-based representation of commonsense knowledge. In L. F. Pau, editor, *Proceedings of IFAC Workshop on Artificial intelligence in economics and management*, pages 57–64. Pergamon, 1986.
16. H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52:263–294, 1991.
17. S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR’98)*, pages 488–498, 1998.
18. S. Konieczny and R. Pino Pérez. Logic based merging. *Journal of Philosophical Logic*, 40(2):239–270, 2011.
19. H. Koontz and H. Wehrich. *Administración: una perspectiva global*. McGraw-Hill Interamericana de España, 12 edition, 2004.
20. J. Lang. Belief update revisited. In *Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial*

- Intelligence*, IJCAI'07, pages 2517–2522, San Francisco, CA, USA, 2007. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
21. P. Liberatore and M. Schaerf. Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 10(1):76–90, 1998.
 22. J. Lin and A. O. Mendelzon. Knowledge Base Merging by Majority. In R. Pareschi and B. Fronhofer, editors, *Dynamic Worlds: From the Frame Problem to Knowledge Management*. Kluwer, 1999.
 23. K. McAreavey, W. Liu, P. C. Miller, and C. Meenan. Tools for finding inconsistencies in real-world logic-based systems. In *Proceedings of the 6th European Starting AI Researcher Symposium (STAIRS'12)*, pages 192–203, 2012.
 24. E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. CRC Press, USA, 5 edition, 2009.
 25. P. Pozos Parra and V. Borja Macías. Partial satisfiability-based merging. In A. Gelbukh and Á. F. Kuri Morales, editors, *MICAI 2007: Advances in Artificial Intelligence*, volume 4827 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 225–235. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
 26. P. Pozos Parra and V. Borja Macías. PS-Merge source code. <http://www.utm.mx/~vero0304/PSMerge/PSMerge.htm>, s.f. Consultado: 25/07/2014.
 27. Q. Qi, W. Liu, and D.A. Bell. Merging stratified knowledge bases under constraints. In *Proceedings of the twenty-first AAAI conference on artificial intelligence (AAAI'06)*, 2006.
 28. D.N. Ramírez Padilla. *Contabilidad Administrativa*. McGraw-Hill México, 8 edition, 2008.
 29. C. Redl. Development of a Belief Merging Framework for dlhex. Master's thesis, Vienna University of Technology, Knowledge-Based Systems Group, Vienna, Austria, 2010.
 30. P. Z. Revesz. On the semantics of theory change: Arbitration between old and new information. In *Proceedings of the twelfth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART symposium on principles of databases*, 1993.
 31. P.Z. Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(02):133–160, 1997.
 32. Efraim Turban, Jay E. Aronson, and Ting-Peng Liang. *Decision Support Systems and Intelligent Systems*. Prentice-Hall, Inc., USA, 7 edition, 2004.