DISEÑO DE UNA PLANTILLA LABORAL ÓPTIMA MEDIANTE TÉCNICAS BORROSAS

Lourdes Canós Darós, Carmen Domingo Juan, Vicente Liern Carrión
Universitat de València.

RESUMEN:

En este trabajo mostramos métodos de gestión basados en la teoría de subconjuntos borrosos que permiten diseñar plantillas óptimas. Se parte de un modelo de programación matemática que es modificado para incorporar la imprecisión en los datos y la incertidumbre originada al planear situaciones futuras. Tras una breve descripción teórica para los casos generales, se hace hincapié en el caso en que el modelo inicial resulta infactible. Finalmente, aplicamos las técnicas descritas a los datos de una empresa telefónica estadounidense.

INTRODUCCIÓN.

En la presente comunicación describiremos algunas técnicas de elaboración de plantillas óptimas que emplean modelos de decisión basados en la programación matemática. En ellas, el objetivo de la empresa es confeccionar una plantilla que minimice los costes relativos a la mano de obra: salarios, formación, etc. satisfaciendo una serie de requisitos que, *grosso modo,* podríamos clasificar en alguno de los siguientes tipos: legislación laboral, contratación (reclutamiento, selección y socialización), formación del personal, promoción y sistema de retribuciones (véase [3]). El punto de partida suele ser un programa con un único objetivo a optimizar sujeto a un conjunto de restricciones que refleja todos o parte de los requisitos anteriores.

Aunque trabajaremos un ejemplo real en el que los modelos para diseñar una plantilla no tienen por qué ser lineales, lo cierto es que éstos son los más empleados por la facilidad de cálculo. Además, la existencia de muchos paquetes comerciales, junto con el gran desarrollo teórico que permite hacer post-optimización y análisis de sensibilidad, convierten a la Programación Lineal, PL, en una herramienta apropiada para decidir cuál es la plantilla más adecuada. Formalmente, una primera aproximación a un modelo general podríamos expresarla de la forma siguiente:

$$\begin{array}{lll} \textbf{Min} & c^T x & \text{(costes)} \\ \textbf{s. a} & A_1\, x \leq b_1 & \text{(transiciones en la empresa)} \\ & A_2\, x \geq b_2 & \text{(necesidades de personal)} \\ & A_3\, x \leq b_3 & \text{(imposiciones legales)} \\ & A_4\, x \geq b_4 & \text{(fomación)} \\ & A_5\, x \leq b_5 & \text{(criterios de calidad)} \\ & x \geq 0 & \end{array} \qquad (1)$$

donde $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{A_i}$ son matrices reales de tipo k_i x n y los vectores $\mathbf{b_i}$ tienen k_i componentes, para $1 \leq i \leq 5$. En las desigualdades, el signo se ha establecido de acuerdo con el ejemplo numérico de la Sección 4.

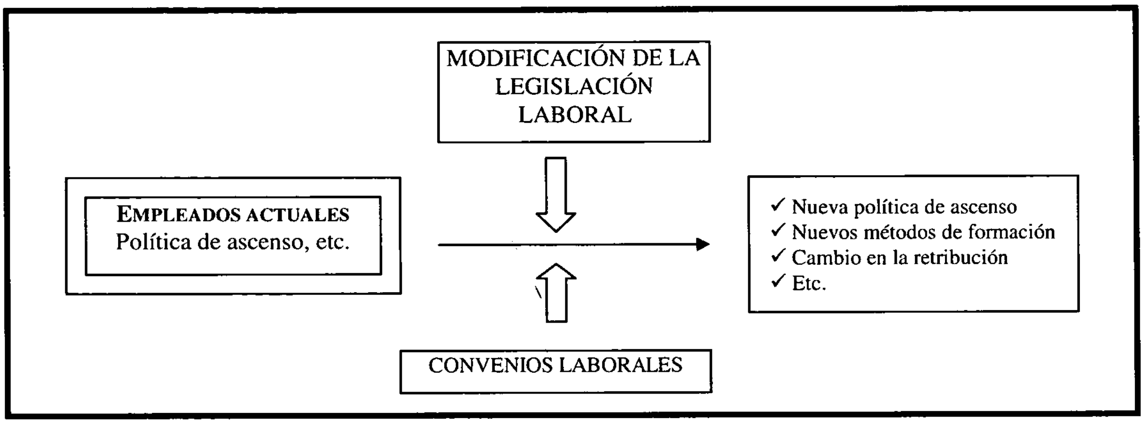
En la práctica, la construcción del modelo lineal que finalmente se ha de resolver es un proceso iterativo en el que se pretende reflejar, de forma cada vez más precisa, la realidad que se desea modelizar. En este proceso de acercamiento a la realidad es necesario tener en cuenta dos fenómenos:

a. Las estimaciones que aparecen en el modelo se obtienen a partir de datos que no siempre se han recogido de forma rigurosa.
b. El diseño de una plantilla se suele confeccionar a largo plazo, por tanto en los coeficientes del modelo se está suponiendo una estabilidad que no siempre ha sido contrastada.

Ante esta perspectiva, es razonable mantener ciertas dudas respecto a la interpretación de los resultados obtenidos, y antes de convertir una solución óptima en una política de actuación, deberá comprobarse que su comportamiento sigue siendo bueno para otras representaciones plausibles del problema real.

En esquema, las modificaciones que se suelen incorporar al modelo inicial son las siguientes:

FIGURA 1.- CAMBIOS EN EL MODELO.



La teoría de **subconjutos borrosos** permite considerar dos elementos que resultan esenciales para nuestros propósitos: la incertidumbre de los datos y cualquier información adicional que el modelizador, gestor, etc. puedan aportar. Por tanto, las técnicas de gestión borrosas ofrecen una visión mucho más global del problema y proporcionan soluciones que de otra manera no se habrían considerado o habrían pasado inadvertidas (véase [5], [13]).

El beneficio de un planteamiento borroso es aún más evidente cuando el modelo **rígido**[1] se comprueba que es infactible puesto que, en estos casos , la lógica booleana cuenta con pocas herramientas. Sin embargo, los que acostumbran a modelizar situaciones reales, saben que es bastante habitual que, sobre todo en las primeras instancias que se plantean, no haya soluciones posibles. Esta infactibilidad se puede deber a errores cometidos en algún paso del proceso de modelización pero, a menudo, el modelo contiene todo lo que el modelizador intenta reflejar. Así, por ejemplo pueden aparecer restricciones que individualmente son razonables pero que globalmente resultan inconsistentes. En este caso será necesario encontrar las razones de la infactibilidad y, si es posible, modificar el modelo de forma que se convierta en un problema viable.

No hace demasiado tiempo, los paquetes informáticos no proporcionaban información adicional al usuario acerca del problema que estaba resolviendo. H. J. Greenberg creó la idea de *Computer-Assisted Analysis* (CAA) a finales de los años 70 (véase [4]) y desarrolló uno de los primeros programas, ANALYZE, que proporciona algunas herramientas para diagnosticar las razones por las que en cierta instancia se tiene un problema infactible. Desde entonces, se han desarrollado algunos métodos algorítmicos para CAA así como sus implementaciones computacionales (véase [1]). En esta comunicación resumiremos brevemente estas aportaciones y mostraremos cómo los métodos borrosos resultan muy útiles para estos casos (véanse [7], [8]).

En las Secciones 3 y 4 describimos brevemente cómo utilizar la potencia de las técnicas borrosas junto con las aportaciones rígidas para el tratamiento de la infactibilidad y la **viabilidad** de modelos con restricciones lineales.

APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS BORROSAS AL DISEÑO DE PLANTILLAS

Sería complicado, si no utópico, intentar mostrar técnicas que fuesen válidas en general para todas las empresas. Por tanto, vamos a centrarnos en una situación bastante habitual en la que sólo se modificarán las restricciones que afectan a la política de ascenso y a determinadas exigencias internas de calidad, por ejemplo, mientras que el resto de restricciones se mantendrán invariables.

Supogamos una empresa en la que hay una división compuesta por K categorías diferentes que cuenta con una política de ascensos tradicional que expresaremos mediante la matriz de Markov T_A . Tras una nueva normativa legal, se impone a la empresa que, transcurrido un periodo de N años, la plan-

[1] A partir de aquí usaremos el término rígido para designar los modelos clásicos, es decir los obtenidos utilizando lógica booleana.

tilla debe contar con determinados porcentajes en la dirección. Por ejemplo, fija un número mínimo de mujeres que deben formar parte de los cargos directivos. A partir de esta legislación, la empresa debe consensuar una nueva política de ascensos que expresamos mediante la matriz T_N .

$$T_A = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1K} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{K1} & t_{K2} & \dots & t_{KK} \end{pmatrix} \qquad T_N = \begin{pmatrix} t'_{11} & t'_{12} & \dots & t'_{1K} \\ t'_{21} & t'_{22} & \dots & t'_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t'_{K1} & t'_{K2} & \dots & t'_{KK} \end{pmatrix} \tag{2}$$

En estas matrices, los términos son no negativos y verifican:

a) $t_{ii} >> t_{ij}$, $i \neq j$; $\sum_{j=1}^{K} t_{ij} \leq 1$, $\sum_{i=1}^{K} t_{ij} \leq 1$, $i, j = 1, \dots, K$ (3)

b) $t'_{ii} >> t'_{ij}$, $i \neq j$; $\sum_{j=1}^{K} t'_{ij} \leq 1$, $\sum_{i=1}^{K} t'_{ij} \leq 1$, $i, j = 1, \dots, K$ (4)

Conviene analizar qué partes del modelo general dado en (1) son de naturaleza incierta y cuáles no. Claramente, la nueva política de ascensos, dada por T_N, puede considerarse más como una primera aproximación que como una auténtica política para diseñar la plantilla óptima. Por tanto, parece razonable suponer una **matriz de transiciones borrosa** de la forma siguiente:

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} [T^o{}_{11}, T^1{}_{11}] & [T^o{}_{12}, T^1{}_{12}] & \dots & [T^o{}_{1K}, T^1{}_{1K}] \\ [T^o{}_{21}, T^1{}_{21}] & [T^o{}_{22}, T^1{}_{22}] & \dots & [T^o{}_{2K}, T^1{}_{2K}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [T^o{}_{K1}, T^1{}_{K1}] & [T^o{}_{K2}, T^1{}_{K2}] & \dots & [T^o{}_{KK}, T^1{}_{KK}] \end{pmatrix} \tag{5}$$

de modo que las matrices T_A y T_N aparezcan reflejadas en la matriz borrosa $\tilde{T}$, es decir ,
t_{ij}, , $t'_{ij} \in [T^0{}_{ij}, T^1{}_{ij}]$, $\forall$ i, j .

Por otro lado, en el modelo hay una parte que es necesariamente rígida : las restricciones determinadas por las imposiciones legales y las necesidades de personal .

Ahora se trata de reescribir el modelo (1) de forma que aparezca todos los cambios que hemos introducido, es decir,

$$\begin{array}{lll} \textbf{Min} & c^T x & \\ \textbf{s. a} & \tilde{A}_1 x \leq \tilde{b}_1 & \text{(transiciones en la empresa)} \\ & A_2 x \leq b_2 & \text{(necesidades de personal)} \\ & A_3 x \leq b_3 & \text{(imposiciones legales)} \\ & \tilde{A}_4 x \leq \tilde{b}_4 & \text{(formación)} \\ & \tilde{A}_5 x \leq \tilde{b}_5 & \text{(criterios de calidad)} \end{array} \tag{6}$$

donde las tildes denotan los elementos borrosos del modelo (véase [5]).

Para obtener la solución de este programa, como veremos en la Sección 4, sólo hay que elegir unas funciones de pertenencia adecuadas a cada subconjunto borroso y, resolverlo mediante programas auxiliares rígidos (véase [5], [13]).

APLICACIÓN A MODELOS INFACTIBLES.

TRATAMIENTO DE LA INFACTIBILIDAD CON TÉCNICAS RÍGIDAS

En esta Sección resumiremos las aproximaciones más importantes para tratar la infactibilidad de programas lineales rígidos. Básicamente, seguiremos un trabajo de H. Greenberg (véase [4]) donde se presentan tres métodos para aislar la parte del problema que causa la infactibilidad. Estos métodos se basan en los precios duales del problema de la Fase I del método Símplex (véase [10]). Brevemente recordamos que dado un modelo lineal (P) tiene asociado un problema de la Fase I de la forma siguiente:

Modelo inicial **Fase I**

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{(P) Opt} & c^{T} x & \qquad \textbf{(FP) Min} & 1^{T} a + 1'^{T} a' \\
\textbf{sujeto a} & D_1 x \geq b_1 & \qquad \textbf{sujeto a} & D_1 x - I\, h + I\, a = b_1 \\
 & D_2 x \leq b_2 & & D_2 x + I' h' = b_2 \\
 & D_3 x = b_3 & & D_3 x + I\, a' = b_3 \\
 & x \geq 0 & & x, h, h', a, a' \geq 0
\end{array} \tag{7}
$$

donde las matrices D_i son del tipo $n_i x\ n$, (i=1, 2, 3), I, I' son las matrices identidad de orden n_1 y n_2, 1 y 1' son las diagonales principales de I, I', h y h' son variables de holgura y a, a' son variables artificiales.

En general hay tres métodos para tratar la infactibilidad:

1. "*Agregación" de los precios duales.* Se basa en el siguiente resultado de George Dantzig (véase [4])
   "Si un programa lineal es infactible, existe una uno-restricción LP que es infactible, construida sumando las filas ponderadas por los precios duales de la Fase I.".
   Es importante resaltar que la información útil para detectar las causas de infactibilidad proviene de las restricciones cuyo precio dual no es nulo puesto que serán las que formen parte de la uno-restricción o restricción "agregada", y no suele provenir de los valores numéricos de los precios duales.
2. *Subsistemas Irreducibles Infactibles.* Un Subsistema Irreducible Infactible (SII) es un conjunto de
   restricciones que no tiene solución factible de modo que cualquier subconjunto propio es factible. En este conjunto se incluyen todas las restricciones de cotas.
   Se han desarrollado varios algoritmos para aislar subsistemas irreducibles que difieren en la velocidad computacional. Una clase de estos algoritmos se basa en dos teoremas de K. G. Murty (véase [9]) que hacen uso de los precios duales de la Fase I y que podemos resumir de la forma siguiente: *"Si una restricción (o cota de columna) tiene precio sombra (o coste reducido) no nulo, debe formar parte de algún subsistema irreducible infactible. Las restricciones o cotas que tienen precios sombra o costes reducidos nulos deben ser descartados, y las restantes restricciones deben contener al menos un subsistema irreducible infactible"*
3. *Reducción de cotas.* Este método, ampliamente aplicado en el preproceso de programas lineales, consiste en
   usar diferentes tests simples para intentar reducir las cotas.

INFACTIBILIDAD Y TÉCNICAS BORROSAS

Los métodos anteriores pueden ayudar a determinar las causas de infactibilidad de una instancia en particular, pero en general no proporcionan información suficiente para poder establecer un diagnóstico. Además, no proponen cómo resolverla. Replantear el problema infactible rígido haciendo uso de la lógica multivaluada proporciona un marco de trabajo mucho más general. De hecho, aplicar los enfoques que proporcionan los métodos basados en los subconjuntos borrosos permiten resolver modelos convencionales de difícil solución.

Si bien es la situación real modelizada quien marca las componentes del programa (coeficientes, restricciones, etc.) que son borrosas de forma natural, lo cierto es que sería una pérdida de información no aprovechar la capacidad de la mayoría de los programas comerciales para aislar SII.

Nuestra propuesta es la siguiente:

1) Dado un Subsistema Irreducible Infactible analizamos qué coeficientes son de naturaleza borrosa.
2) Asignamos rangos de variación para estos coeficientes.
3) Determinamos funciones de pertenencia adecuadas.
4) La solución borrosa se obtendrá mediante problemas auxiliares rígidos.

Con este método se evita trabajar con todo el programa, que normalmente será de gran tamaño. Es suficiente estudiar la naturaleza borrosa de cualquier Subsistema Irreducible Infactible, puesto que en este subconjunto de restricciones se encuentra alguna causa de infactibilidad.

APLICACIÓN A UN PROBLEMA REAL

R. D. Shapiro, en [12], resume un problema real de la empresa Wentworth Pacific Telephone Company, WPTC. Ésta es una empresa telefónica estadounidense fundada en 1903. Aunque es una compañía de ámbito regional, en enero de 1976 tenía contratados alrededor de 9000 empleados, lo que significaba un porcentaje considerable de la población activa de la región. La división de operadores, compuesta por operadores, supervisores y managers, es la que cuenta con el mayor número de personal. El 1-I-1976, esta sección empleaba a 3211 personas distribuidas de la forma siguiente:

TABLA 1: DISTRIBUCIÓN DE PERSONAL

1-I-1976	OPERADORES	SUPERVISORES	MANAGERS
HOMBRE	152	23	28
MUJERES	2878	128	2

Tradicionalmente, la política de ascensos en esta sección para periodos de cinco años ha sido la que aparece expresada en la siguiente matriz de Markov:

TABLA 2: POLÍTICA DE ASCENSOS TRADICIONAL

AHORA / 5 AÑOS DESPUÉS	OPERADORES	SUPERVISORES	MANAGERS	DEJAN LA SECCIÓN
OPERADORES	0.6250	0.0200	0	0.3550
SUPERVISORES	0.0077	0.5350	0.0094	0.4486
MANAGERS	0	0.0020	0.9040	0.0940

A finales de 1975, la Comisión Estatal encargada de garantizar el cumplimiento de la Ley de Igualdad de Empleo, EEO, sometió a la WPTC a una inspección tras la que informó a la compañía de que incumplía dicha ley, a la vez que concedía un periodo de 5 años (es decir hasta el 1-I-81) para subsanar esta situación. Las modificaciones exigidas eran las siguientes:

a. El número de mujeres operadoras no debe ser superior al 80% del total de operadores
b. El número de mujeres supervisoras no debe ser superior al 80% del total de supervisores.
c. El número de hombres managers no debe representar más del 75% del total de managers.

Los directivos de la WPTC, conscientes de las dificultades que supondría no adaptarse a las normas de la EEO, se vieron en la necesidad de hacer un estudio de las futuras contrataciones, a cinco años vista, de modo que pudiesen garantizar la legitimidad en los porcentajes de contratación.

Los costes de contratación por persona son los siguientes:

TABLA 3: COSTES POR CATEGORÍAS

	SUPERVISOR	**SUPERVISOR**	**MANAGER**
HOMBRE	1500 $	2000 $	3000 $
MUJER	1000 $	2000 $	7000 $

Además de la contratación directa de supervisores y managers, un porcentaje de éstos proceden de los cursos de preparación que la WPTC organiza: cuatro cursos de preparación de operadores para ser supervisores, y dieciséis cursos de supervisores para ser managers. Todo el personal que supera estos cursos pasa a desempeñar el nuevo empleo dentro de la Sección. Los costes de preparación son de 3000 $ para supervisores y de 7500 $ para managers, independientemente de que sean hombres o mujeres.

Indudablemente, para lograr las exigencias de la EEO, la WPTC necesitaba modificar los porcentajes de ascenso dentro de la Sección, de modo que se obtenga más control sobre los porcentajes de los hombres y mujeres empleados el 1-I-81. La nueva política de ascensos, viene expresada en la siguiente matriz de Markov:

TABLA 4: NUEVA POLÍTICA DE ASCENSOS

1976/80 / 1-I-1981	OPERADORES	SUPERVISORES	MANAGERS	DEJAN LA SECCIÓN
OPERADORES	0.8265	0.0035	0	0.1700
SUPERVISORES	0	0.9050	0	0.0950
MANAGERS	0	0	0.9700	0.0300

A todas estas condiciones hay que añadir una última exigencia en cuanto al número de hombres operadores. Además de que contratar operadores es más costoso que contratar mujeres para el mismo empleo, se prefiere la voz de mujer para operadora. Por tanto, la dirección fija en 500 el máximo de operadores (hombres) que deberían contratarse en un periodo de 5 años.

Formalmente, la situación puede modelizarse con el programa lineal siguiente:

(P) MIN 1.5 OCh+ OCm + 2 SCh + 2 SCm + 3 MCh + 7 MCm + 3 SPh + 3 SPm + 7.5 MPh+ 7.5 MPm SUJETO A

a) Transiciones

1) 0.8265 OCh- SPh - Oh = - 95.16
2) 0.8265 OCm - SPm - Om = - 1800
3) 0.0035 OCh + 0.905 SCh + SPh - MPh - Sh = - 15.41
4) 0.0035 OCm + 0.905 SCm + SPm - MPm - Sm = - 126
5) 0.97 MCh + MPh - Mh = - 25.53
6) 0.97 MCm + MPm - Mm = - 3.024

b) Necesidades de personal

7) Oh + Om $\geq$ 3030
8) Sh + Sm $\geq$ 151
9) Mh + Mm $\geq$ 30

c) Imposiciones legales

10) - 0.8 Oh + 0.2 Om $\leq$ 0
11) - 0.8 Sh + 0.2 Sm $\leq$ 0
12) 0.25 Mh - 0.75 Mm $\leq$ 0

d) Política de formación

13) - 0.25 MCh - 0.25 MCm + MPh + MPm $\geq$ - 1.418

e) Exigencias de calidad

14) OCh $\leq$ 500

donde las variables son todas no negativas, la h o m minúscula de la derecha significa hombre o mujer respectivamente, y las mayúsculas significan lo siguiente:

OC = Operadores Contratados, SC = Supervisores contratados, MC = Managers Contratados
SP= Supervisores en Preparación, MP= Managers en Preparación
O= Opereadores actuales, M= Managers actuales, S=Supervisores actuales.

Resolvemos el modelo mediante el paquete comercial LINDO y comprobamos que resulta infactible. De acuerdo con lo expuesto en la Sección 2, vamos a obtener un subsistema que nos permita detectar algún motivo de infactibilidad. El comando DEB de LINDO proporciona el siguiente subsistema irreducible infactible:

1) 0.8265 OCh- SPh - Oh = - 95.16
7) Oh + Om $\geq$ 3030 Precio dual -1 (8)
10) - 0.8 Oh + 0.2 Om $\leq$ 0
14) OCh $\leq$ 500

a) Tratamiento rígido de la infactibilidad:

(i) *Agregación de precios duales.* Calculamos Σ_i (precio dual (i) * restricción (i))

-5 * (1) -1* (7) +5 *(10) +4.1325 *(14) , es decir, 5 SPh $\leq$ -487.950

Una causa de la infactibilidad es que la variable SPh debería ser negativa.

(ii) *Acotación sucesiva* : El comando TITAN de LINDO añade las cotas que, de forma implícita, contiene el programa. En nuestro caso son

a) OCh $\leq$ 500
b) SPh $\leq$ 508.41
c) Oh $\leq$ 508.41

(iii) Si calculamos de nuevo un subsistema irreducible obtenemos

7) Oh + Om $\geq$ 3030
10) - 0.8 Oh + 0.2 Om $\leq$ 0

Si ahora "agregamos" los precios, obtenemos Oh $\geq$ 606, lo cual contradice la cota superior expresada en la desigualdad (c) anterior, y por tanto estamos ante una causa de infactibilidad. Aunque este método nos advierte de las causas técnicas de la infactibilidad, éstas no nos permiten obtener una formulación viable del modelo, de ahí que necesitemos un planteamiento menos rígido.

b) Tratamiento borroso de la infactibilidad:

En el subsistema dado en (8), la restricción 7) es rígida por tratarse de una necesidad de personal, y la 10) también es rígida por ser una imposición legal. Por tanto, sólo podemos considerar borrosas 1) y 14), es decir, la nueva política de ascensos y las exigencias de calidad.

- En cuanto a las *exigencias de calidad*, vamos a considerar que el número de hombres contratados como operadores puede estar entre 500 y 550, es decir OCh $\leq$ [500, 550].
- En cuanto a las *política de ascensos*, de acuerdo con lo expuesto en la Sección 2, vamos a construir una matriz de Markov borrosa para la nueva política de ascensos en la empresa:

TABLA 6: POLÍTICA DE ASCENSOS BORROSA

1976/80 \ 1-I-1981	OPERADORES	SUPERVISORES	MANAGERS
OPERADORES	[0.6250, 0.8265]	0.0035	0
SUPERVISORES	[0.007, 0.080]	0.9050	0
MANAGERS	0	0	0.9700

Teniendo en cuenta la política expresada en la Tabla 6 y sustituyendo las 6 primeras restricciones, que son igualdades, en el resto de desigualdades, el modelo (P) queda reformulado de la forma siguiente:

(FP) Min OCm + **1.5** OCh + **2** SCm + **2** SCh + **7** MCm + **3** MCh +**3** SPm + **3** SPh + **7.5** MPm + **7.5** MPh

sujeto a

b) Necesidades de personal

[0.625, 0.8265] OCh + **[0.625, 0.8265]** OCm+ **[0.007, 0.08]** SCh +**[0.007, 0.08]** SCm - SPh - SPm $\geq$ 1134.84

0.0035 OCh + 0.0035 OCm + 0.905 SCh +0.905 SCm +SPh +SPm -MPh -MPm $\geq$ 9.59

0.97 MCh + 0.97 MCm + MPh +MPm $\geq$ 1.446

c) Imposiciones legales

-**[2.5, 3.342]** OCh- **[0.028, 0.32]** SCh+**[0.625, 0.8265]** OCm + **[0.007,0.08]** HS+ 4 SPh - SPm $\leq$ -1419.36

-0.014 OCh - 3.62 SCh -0.0035 OCm +0.905 SCm - 4SPh +4MPh +SPm -MPm $\leq$ -64.36

-0.97 MCh-2.91 MCm +MPh -3MPm + MPh - 3 MPm $\leq$ - 16.458

d) Política de formación

-0.25 MCh - 0.25 MCm + MPh + MPm $\geq$ -1.418

e) Exigencias de calidad

OCh $\leq$ **[500, 550]**

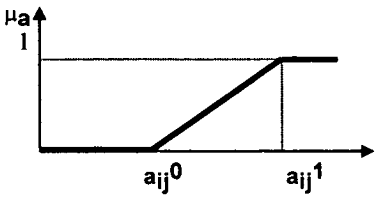
De acuerdo con Carlsson y Korhonen (véase [13]) consideramos las siguientes funciones de pertenencia:

a) Lineal para las a_{ij}, i.e.

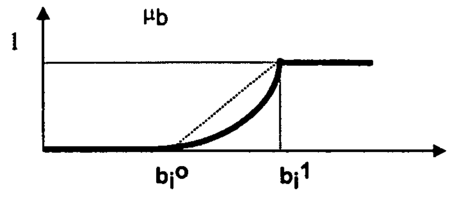
$$\mu_{aij}(x) = \begin{cases} 0 & a_{ij} < a_{ij}^0 \\ \dfrac{a_{ij} - a_{ij}^1}{a_{ij}^0 - a_{ij}^1} & a_{ij}^0 \leq a_{ij} \leq a_{ij}^1 \\ 1 & a_{ij} > a_{ij}^1 \end{cases} \qquad (9)$$

b) Exponencial para los b_j, i.e.

$$\mu_{bi}(x) = \begin{cases} 0 & b_i < b_i^0 \\ \dfrac{1-\exp\left[\dfrac{2(b_i-b_i^0)}{b_i^1-b_i^0}\right]}{1-\exp(2)} & b_i^0 \le b_i \le b_i^1 \\ 1 & b_i > b_i^1 \end{cases} \qquad (10)$$



F. de pertenencia lineal



F. de pertenencia exponencial

Nota: La elección de una función de pertenencia exponencial para b_i se debe a que preferimos un crecimiento más lento que si tuviésemos una función lineal. En el gráfico, la función lineal aparece con trazo discontínuo.

Bajo la hipótesis de un equilibrio entre los números borrosos de a_{ij} y b_i construimos el siguiente problema auxiliar rígido:

(FAux) Min **1** OCm + **1.5** OCh + **2** SCm + **2** SCh + **7** MCm + **3** MCh + **3** SPm + **3** SPh + **7.5** MPm + **7.5** MPh

sujeto a

b) Necesidades de personal

$(0.2015\,\mu + 0.625)$ OCh $+(0.2015\,\mu + 0.625)$ OCm$+$ $(0.073\,\mu + 0.007)$ SCh $+ (0.073\,\mu + 0.007)$ SCm - SPh -SPm ≥ 1134.84

0.0035 OCh + 0.0035 OCm + 0.905 SCh +0.905 SCm +SPh +SPm -MPh -MPm ≥ 9.59

0.97 MCh + 0.97 MCm + MPh +MPm ≥ 1.446

c) Imposiciones legales

$-(0.806\,\mu + 2.5)$ OCh- $(0.292\,\mu + 0.028)$ SCh+ $(0.2015\,\mu + 0.625)$ OCm + $+(0.073\,\mu + 0.007)$ SCm + 4 SPh - SPm ≤ -1419.36

-0.014 OCh - 3.62 SCh -0.0035 OCm +0.905 SCm - 4SPh +4MPh +SPm -MPm ≤ -64.36

-0.97 MCh-2.91 MCm +MPh -3MPm + MPh - 3 MPm ≤ -16.458

d) Política de formación

-0.25 MCh - 0.25 MCm + MPh + MPm ≥ -1.418

d) Exigencias de calidad

OCh $\leq 25\,\mathrm{Ln}(1-\mu\,(1-e^2))+500$

e) $0 \leq \mu \leq 1$

En función del parámetro μ, las soluciones de (FAux) pueden ser expresadas de la forma siguiente:

TABLA 7: SOLUCIÓN BORROSA

μ	COSTE z*	DECISIÓN x*				
		OCM	OCH	SCH	SH	SM
0.0	58456.9	998.4	500	28334.3	25259.7	129.5
0.1	26991.7	967.2	512.4	12608.2	11427.6	129.4
0.2	16989.7	937.9	520.6	7615.6	6909.4	129.3
0.3	12104.8	910.3	526.8	5182.4	4707.3	129.2
0.4	9216.7	884.4	531.7	3747.6	3408.8	129.1
0.5	7310.1	859.8	535.8	2803.5	2554.4	129.0
0.6	5957.3	836.6	539.4	2136.1	1950.4	128.9
0.7	4947.2	814.6	542.5	1639.7	1501.2	128.8
0.8	4163.7	793.7	545.3	1256.3	1154.3	128.8
0.9	3537.9	773.8	547.7	951.4	878.4	128.7
1.0	3026.2	754.9	550	703.3	653.8	128.6

El resto de las variables, independientemente del valor de μ, toman los valores siguientes:

$$SCm = MCh = SPm = SPh = MPm = MPh = 0$$

$$MCm=5.6,\ Oh=606,\ Om=2424,\ Mh=25.5,\ Mm=8.5$$

Si ahora interpretamos la solución desde un punto de vista rígido, la decisión que optimiza la plantilla se alcanza para $\mu = 1$, con un coste $z^*=3026.2$. En este caso, la tabla que contiene la nueva política de ascensos viene dada por

TABLA 8: POSIBLE POLÍTICA DE ASCENSOS

1976/80 \ 1-I-1981	OPERADORES	SUPERVISORES	MANAGERS	DEJAN LA SECCIÓN
OPERADORES	0.8265	0.0035	0	0.1700
SUPERVISORES	0.08	0.905	0	0.0150
MANAGERS	0	0	0.97	0.0300

Es evidente que las Tablas 4 y 8 , que representan la política de ascensos propuesta por la empresa y la que se obtiene con nuestro método respectivamente, son muy similares. Esto significa que con una pequeña modificación en la política de promoción propuesta por la WPTC el problema es viable.

CONCLUSIONES

Al aplicar técnicas de Programación Matemática a una situación real de diseño de una plantilla óptima (desde un punto de vista rígido) , si en el programa se obtiene una instancia infactible, podemos considerar que nuestro modelo matemático presenta alguna de las dificultades siguientes:

a) Contiene instancias que por alguna razón presentan errores en la formulación final del problema.
b) Refleja exactamente lo que el modelizador ha querido plasmar pero esto es incompatible con la realidad.

Será en la clase (b) donde los métodos de decisión borrosa se muestran especialmente provechosos.

Nosotros hemos resuelto un problema usando números borrosos, pero somos conscientes de que la Programación Lineal Borrosa permite considerar muchas modificaciones dependiendo de las hipótesis o de las características del problema a modelizar . No hemos considerado, por ejemplo, restricciones borrosas o coeficientes de la función objetivo borrosa porque nuestra intención era solamente hacer viable el problema obteniendo una solución aceptable. Además, es muy importante que el trabajo previo de modelización (en ocasiones muy costoso) pueda ser usado.

Resulta evidente que la lógica multivaluada es más recomendable en algunas situaciones. Prever políticas futuras de forma demasiado rígida puede no tener sentido y quizá nos lleve a ignorar soluciones del problema que resultarían provechosas.

Por último, nos gustaría advertir que tanto para casos factibles como infactibles el resultado obtenido mediante la programación borrosa no tiene por qué ser la política a adoptar, sino que lo adecuado es replantear el problema como uno de programación entera del que se podría obtener la solución definitiva.

BIBLIOGRAFÍA

CHINNEK, J. W. (1997): "FEASIBILITY AND VIABILITY" IN [2].

GAL, T.; GREENBERG, H. J. (1997): ADVANCES IN SENSITIVITY ANALYSIS AND PARAMETRIC PROGRAMMING. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS. BOSTON.

GÓMEZ-MEJÍA, L. R.; BALKIN, D. B. Y CARDY, R. L. (1998) GESTIÓN DE RECURSOS HUMANOS. PRENTICE HALL, MADRID.

GREENBERG, H. J. (1993): "HOW TO ANALYZE THE RESULTS OF LINEAR PROGRAMS-PART 3: INFEASIBILITY DIAGNOSIS", INTERFACES, VOL. 23, 120-139.

KAUFMANN, A. Y GIL ALUJA, J. (1987): TÉCNICAS OPERATIVAS DE GESTIÓN PARA EL TRATAMIENTO DE LA INCERTIDUMBRE. EDITORIAL HISPANO EUROPEA, S. A. BARCELONA.

LEÓN, T.; LIERN, V. (1997): "UTILIZACIÓN DE LAS VARIABLES DUALES EN SITUACIONES PATOLÓGICAS EN PROGRAMACIÓN LINEAL", ACTAS DEL XXIII CONGRESO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA. VALENCIA, 11-14 DE MARZO 1997.

LEÓN, T.; LIERN, V. (1998): "FUZZY METHODS AND INFEASIBLE LINEAR PROGRAMS: AN APPLICATION TO STAFF DESIGN PROBLEMS", FUZZY ECONOMIC REVIEW, VOL .3 , 79-94.

LEÓN, T.; LIERN, V. (1998): "VIABILIDAD DE PROBLEMAS LINEALES INFACTIBLES MEDIANTE TÉCNICAS FUZZY", ACTAS DEL VIII CONGRESO ESPAÑOL SOBRE TECNOLOGÍAS Y LÓGICA FUZZY, PP. 71-76, PAMPLONA, .8-10 SEP. 1998.

LEÓN, T.; LIERN, V. (1999): "A FUZZY METHOD TO REPAIR INFEASIBILITY IN LINEARLY CONSTRAINED PROBLEMS", FUZZY SETS AN SYSTEMS, (EN PRENSA).

MURTY, K. G. (1983) : LINEAR PROGRAMMING. WILEY AND SONS. NUEVA YORK.

ROODMAN, G.M. (1980): "POST-INFEASIBILITY ANALYSIS IN LINEAR PROGRAMMING.". MANAGEMENT SCIENCE, VOL. 25, 916 - 922.

SHAPIRO, R. D. (1984): OPTIMIZATION MODELS FOR PLANNING AND ALLOCATION: TEXT AND CASES IN MATHEMATICAL PROGRAMMING.. WILEY AND SONS. NUEVA YORK.

ZIMMERMANN, H. J. (1996): FUZZY SET THEORY AND ITS APPLICATIONS. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS. BOSTON.