ARETE. Vol. II Nº 1 1990

SOBRE LOS METATEOREMAS DE DEDUCCION Y EL CONCEPTO DE "IMPLICACION LOGICA"

José Carlos Cifuentes Vásquez

En este artículo se dan condiciones necesarias y suficientes para una forma generalizada del metateorema de deducción y se lo aplica a varios sistemas lógicos usándolo como un criterio para determinar la existencia de una implicación interna a tales sistemas.

("On Metatheorems of Deduction and the concept of 'logical implication' "). This paper discusses the necessary and sufficient conditions for a generalized form of the metatheorem of deduction and is applied to various logical systems as a criterium to determine the existence of an internal implication to those systems. (Transl. by R. Rizo-Patrón)

I. *EL METATEOREMA DE DEDUCCION*

En Axiomática, cuando se estudia un lenguaje formal se da primero una caracterización de sus expresiones bien formadas, llamadas "Fórmulas", y luego se separa o se distingue una colección de fórmulas que serán llamadas "Axiomas" del sistema en construcción.

Las fórmulas del sistema constituyen lo que se llama "El lenguaje-objeto", y las afirmaciones que se hacen acerca del mismo constituyen lo que se conoce con el nombre de "Metalenguaje".

Un sistema formal se convierte en un sistema deductivo definiendo el concepto de "Deducibilidad" o de "Consecuencia sintáctica".

A continuación presentamos, como ejemplo introductorio, el sistema deductivo más simple, dentro de lo clásico, llamado *Sistema Proposicional Implicativo Positivo*, y bosquejamos una de sus propiedades más importantes, el metateorema de la deducción, el cual motiva e inspira este trabajo.

EL SISTEMA L_o

El alfabeto del lenguaje del sistema L_o está constituído por una colección numerable de proposiciones p_1, p_2, p_3..., p_n,... y el símbolo "$\rightarrow$" que llamaremos "implicación material".

El conjunto de fórmulas For es el menor conjunto tal que

(i) $\forall\ K \geq 1$: $p_k \in$ For

(ii) A, B $\in$ For $\Rightarrow$ (A) $\rightarrow$ (B) $\in$ For

NOTAS

1) El uso de los paréntesis es importante para evitar ambigüedades en la construcción de las fórmulas y no los mencionamos en nuestro alfabeto por simplicidad. Es más, cuando no sea necesario no haremos uso de ellos.

2) Las letras A, B, C... (como en (ii)) denotan fórmulas cualesquiera y se les llama "Metavariables". Obsérvese que no son símbolos del lenguaje-objeto.

La colección de axiomas Ax de L_o está caracterizada por las siguientes fórmulas:

A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \overset{\rightarrow}{\cdot\,\cdot} (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$

Ahora, para definir la deducibilidad hay que dar las reglas de deducción, que nos dicen cómo obtener una cierta fórmula como "consecuencia inmediata" de otras. En L_o tenemos como única regla de dedución el Modus Ponens:

MP) $A \rightarrow B$

$$\frac{A}{B}$$

DEDUCIBILIDAD

Sea $\Gamma \subseteq$ For y $A \in$ For, decimos que A es consecuencia sintáctica de Γ, y escribimos "$\Gamma \vdash A$", si existe una secuencia finita $A_1,\ldots,A_n \in$ For tal que:

(i) A_n es A.

(ii) $\forall\, K = 1,\ldots, n$ se tiene que: $A_k \in A_x$ o $A_k \in \Gamma$ o existen A_i, A_j con i, j < K tal que A_k es consecuencia inmediata de A_i, A_j por la regla MP.

En este último caso, A_i sería, por ejemplo, de la forma $A_j \rightarrow A_k$.

Tal secuencia se llama "una prueba o dedución de A a partir de Γ ", y a los elementos de Γ se les llama "premisas".

Si $\phi \vdash A$ diremos que A es un teorema o tesis del sistema y escribimos simplemente $\vdash A$.

Bien, el metateorema de la deducción se enuncia de la siguiente manera:

T.D.) $\quad \Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B$

el cual afirma lo siguiente: Si existe una prueba de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ entonces también es posible una prueba de $A \rightarrow B$ a partir solo de Γ; esto es, cada vez que se quiera probar la fórmula $A \rightarrow B$ a partir de un conjunto de premisas Γ, lo cual puede ser muy complicado, basta probar la fórmula B a partir del nuevo conjunto de premisas $\Gamma \cup \{A\}$.

La demostración del T.D. se hace por inducción sobre la longitud n de la prueba de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ y hace uso de los siguientes hechos, ciertos en L_o:

(i) $\vdash A \rightarrow A$

(ii) $B \vdash A \rightarrow B$

(iii) Cada vez que $B \rightarrow C, B \vdash C$ se tiene que

$A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B \vdash A \rightarrow C.$

Estos hechos nos van a servir como punto de partida para generalizar el T.D. a cualquier sistema que satisfaga ciertas condiciones que analizaremos.

Por último, señalemos que, a la luz de la regla MP. se tiene el recíproco del T.D.

i.e. $\Gamma \vdash A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \cup \{A\} \vdash B$

Así, en el caso particular de que $\Gamma = \phi$ se tiene:

$A \vdash B \Leftrightarrow \vdash A \rightarrow B.$

Este hecho es sumamente importante y hay que saber interpretarlo. El primer miembro afirma que B es consecuencia de A, lo cual es una relación que se da en el metalenguaje, y el segundo afirma que A implica materialmente a B, hecho que ocurre en el lenguaje-objeto; tal relación íntima no nos dice más que lo siguiente: El operador lógico "$\rightarrow$" captura fielmente, en el lenguaje-objeto, el concepto metalinguístico de deducibilidad, y por tal motivo es lícito llamarlo una (buena) implicación interna al sistema L_o.

II. *GENERALIZACION*

En muchos sistemas, ampliación del clásico L_o, se pretende conservar la ya probada fuerza deductiva del T.D., sin embargo, no es posible demostrarlo, en tales sistemas ampliados, más que debilitando el concepto de deducibilidad o restringiendo el uso del mismo. Esto sucede, por ejemplo, en los sistemas modal y de primer orden.

Presentamos a continuación las condiciones que debe satisfacer un sistema deductivo para que su noción de deducibilidad, en toda su generalidad, admita un T.D. y sea posible definir, en consecuencia, una implicación propia del sistema.

Sea L un lenguaje formal cuyo conjunto de fórmulas llamaremos For y cuyo conjunto de axiomas llamaremos Ax.

Las reglas de deducción del sistema tienen la forma $\dfrac{B_1,\ldots, B_m.}{B}$

Nótese que no precisamos ningún símbolo especial en el lenguaje-objeto.

DEFINICION 1)

Sea $\Gamma \subset$ For y $A \in$ For. Decimos $\Gamma \vdash A$ si existen $A_1,\ldots, A_n \in$ For tal que:

(i) A_n es A

(ii) $\forall\ k = 1,\ldots, n$ se tiene que: $A_k \in$ Ax o $A_k \in \Gamma$ o existen $A_{k_1},\ldots,A_{k_m}$ con $k_1,\ldots, k_m < k$ tal que A_k es consecuencia inmediata de ellas por una de las relgas de deducción.

Nuevamente se tiene que si $\Gamma = \phi$, A es llamada una tesis del sistema y escribimos $\vdash A$.

NOTAS

1) $A \in Ax \Rightarrow \vdash A$

2) $\vdash A \Rightarrow \forall \Gamma \subset For: \Gamma \vdash A$

3) Obsérvese que $A_{k_1},\ldots,A_{k_m}$ de (ii) ocurren en la prueba de A, a partir de Γ, como pasos intermedios.

DEFINICION 2)

Diremos que el sistema L es "implicativamente deductivo" si $\forall A \in For$ existe una aplicación λ_A: For $\rightarrow$ For tal que:

d1) $\vdash \lambda_A (A)$

d2) $B \vdash \lambda_A (B)$

d3) Si $B_1,\ldots, B_m \vdash B$ es una regla de deducción, entonces

$\lambda_A (B_1),\ldots, \lambda_A (B_m) \vdash \lambda_A (B)$.

En particular, de (d2) tenemos: $\vdash B \Rightarrow \vdash \lambda_A (B)$.

METATEOREMA 1)

$\Gamma \vdash B \Rightarrow \forall A \in For: \lambda_A (\Gamma) \vdash \lambda_A (B)$.

Prueba: Por inducción sobre la longitud n de la prueba de B a partir de Γ

n = 1.

Caso 1) $B \in Ax \Rightarrow \vdash B \Rightarrow \vdash \lambda_A (B)$ por (d2)

$\Rightarrow \vdash \lambda_A (\Gamma) \vdash \lambda_A (B)$

Caso 2) $B \in \Gamma \Rightarrow$ como $\lambda_A(\Gamma) \vdash \lambda_A(C)\ \forall C \in \Gamma$, en particular para

$$B\colon\ \lambda_A(\Gamma) \vdash \lambda_A(B).$$

n > 1

Caso 1) $B \in Ax$ (en forma análoga)

Caso 2) $B \in \Gamma$ (en forma análoga)

Caso 3) B es consecuencia inmediata de $B_1, \ldots, B_m$ por una regla de deducción. En este caso se tiene que $B_1, \ldots, B_m$ aparecen en la prueba de B partir de Γ, i.e. $\Gamma \vdash B1, \ldots, Bm$ y sus respectivas pruebas tienen una longitud menor que n, luego, por hipótesis inductiva:

$$\lambda_A(\Gamma) \vdash \lambda_A(B_1), \ldots, \lambda_A(B_m)$$

y como $\lambda_A(B_1), \ldots, \lambda_A(B_m) \vdash \lambda_A(B)$ por (d3) tenemos que

$$\lambda_A(\Gamma) \vdash \lambda_A(B)$$

COMENTARIO

El metateorema (1) asevera que la deducibilidad es *invariante* bajo la familia de aplicaciones

$$G = \{\lambda_A : A \in For\}$$

Tal familia no necesariamente es cerrada para la operación de composición.

METATEOREMA 2) (Metateorema de la deducción en L)

T.D.) $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash \lambda_A(B)$

Prueba. Por inducción sobre la longitud n de la prueba de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$

n = 1.

Caso 1) $B \in Ax \Rightarrow \vdash B \Rightarrow \vdash \lambda_A (B)$ por (d2),

$$\Rightarrow \Gamma \vdash \lambda_A (B)$$

Caso 2) B es A $\Rightarrow$ como $\vdash \lambda_A (A)$ tenemos que $\vdash \lambda_A (B)$

$$\Rightarrow \vdash \lambda_A (B)$$

Caso 3) $B \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash B$, y como $B \vdash \lambda_A (B)$ tenemos que

$$\Gamma \vdash \lambda_A (B)$$

n > 1.

Caso 1) $B \in Ax$ (en forma análoga)

Caso 2) B es A (en forma análoga)

Caso 3) $B \in \Gamma$ (en forma análoga)

Caso 4) B es consecuencia inmediata de $B_1, \ldots, B_m$, entonces se tiene que $B_1, \ldots, B_m$ aparecen en la prueba de B antes que B, i.e. $\Gamma \cup \{A\} \vdash B_1, \ldots, B_m$ y sus respectivas pruebas tienen una longitud menor que n, luego por hipótesis inductiva:

$$\Gamma \vdash \lambda_A (B_1), \ldots, \lambda_A (B_m)$$

y como $\lambda_A (B_1), \ldots, \lambda_A (B_m) \vdash \lambda_A (B)$ por (d3), tenemos que

$$\Gamma \vdash \lambda_A (B)$$

NOTA: Si exigiéramos además

D4) $\lambda_A (B),\ A \vdash B$

entonces podríamos probar el recíproco del T.D.:

T.D.*) $\Gamma \vdash \lambda_A (B) \Rightarrow \Gamma \cup \{A\} \vdash B.$

con lo que tendríamos, en el caso particular de $\Gamma = \phi$, lo siguiente:

$$A \vdash B \Leftrightarrow \vdash \lambda_A (B)$$

con lo que la operación (binaria) λ_A (B) capturaría, en L, la esencia de la deducibilidad de B a partir de A, y podría ser considerada en forma natural como "una implicación" o tal vez, "La implicación" en el sistema L.

METATEOREMA 3)

Sea L un sistema con una familia de aplicaciones $\{\lambda_A\}_{A\in For}$ que satisface $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Leftrightarrow \Gamma \vdash \lambda_A (B)$ entonces L es un sistema implicativamente deductivo y λ_A satisface d4).

Prueba

d1) Como $A \vdash A$ entonces por hipótesis $\vdash \lambda_A (A)$.

d2) Como $B, A \vdash B$, entonces por hipótesis $B \vdash \lambda_A (B)$.

d4) De $\lambda_A (B) \vdash \lambda_A (B)$ por hipótesis obtenemos $\lambda_A (B), A \vdash B$.

d3) Supongamos $B_1,\ldots, B_m \vdash B$, entonces a partir de d4) obtenemos

$\lambda_A (B_1),\ldots, \lambda_A (B_m), A \vdash B_1,\ldots, B_m \vdash B$, por lo tanto

$\lambda_A (B_1),\ldots, \lambda_A (B_m)\ \lambda_A \vdash (B)$.

DEFINICION 3)

Sea L un sistema implicativamente deductivo que además satisfaga (d4), definimos la implicación "$\rightarrow$" como:

$$A \rightarrow B := \lambda_A (B)$$

Tal implicación será llamada en lo que sigue "implicación débil" en el sistema L, y la razón de ello será expuesta más adelante.

Nótese que (d4) adopta la forma de la regla MP. para la nueva implicación.

III. *ALGUNOS SISTEMAS IMPLICATIVAMENTE DEDUCTIVOS*

1. *SISTEMA PROPOSICIONAL IMPLICATIVO POSITIVO*

En este sistema, ya analizado en la primera parte, la implicación débil es la misma implicación material.

2. *FRAGMENTO IMPLICATIVO DEL SISTEMA MODAL S4*

El conjunto For está generado por las proposiciones $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ y los operadores "$\rightarrow$" y "$\Box$".

El operador, llamado operador de necesidad, adjuntado a una fórmula A, produce "$\Box A$", lo cual puede leerse "A es necesario". Con ésto los sistemas modales tratan de estudiar la diferencia entre la verdad contingente y la verdad necesaria.

AXIOMAS

A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \overset{\rightarrow}{.\,.} (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$

T) $\Box A \rightarrow A$

F) $\Box (\Box A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

REGLAS DE DEDUCCION

MODUS PONENS (MP)

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}$$

REGLA DE NECESARIEDAD (RN)

$$\frac{A}{\Box A}$$

Tomamos $\lambda_A (B) = \Box A \rightarrow B$. No es difícil probar que se satisfacen las condiciones (d1)... (d4).

NOTA

En la literatura, el sistema S4 presenta, como axiomas característicos, en lugar de nuestro axioma (F), los siguientes:

K) $\square (A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)$

4) $\square A \rightarrow \square\square A$.

A la luz de los axiomas (A1), (A2) y (T) ambos sistemas son equivalentes. De hecho (K) y (4) pueden probarse muy facilmente usando el T.D. en su versión modal, que abreviaremos T.D.M. (Ver además [1]).

T.D.M.) $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash \square A \rightarrow B$

En efecto, de $A \rightarrow B, A \vdash B$ tenemos $A \rightarrow B, A \vdash \square B$ por R.N., luego, $A \rightarrow B \vdash \square A \rightarrow \square B$, y por último tenemos

(K): $\vdash \square(A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)$

Similarmente se prueba (4).

NOTA

Corolario Del T.D.M. es que, si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ y en tal prueba no se ha usado la regla RN. o solo se la ha aplicado a tesis del sistema, entonces $\Gamma \vdash A \rightarrow B$. Esta es la versión que generalmente se usa en los sistemas modales.

OBSERVACION

Hughes y Cresswell (ver [5]) admiten la siguiente versión débil de la Regla de Necesariedad: $\vdash A \Rightarrow \vdash \square A$, con la cual ya no es más válido el T.D.M., sin embargo debemos resaltar que ambas versiones del sistema S4 son equivalentes a nivel de demostraciones sin premisas, es decir, tienen los mismos teoremas.

Este fragmento S4 es base para una serie de sistemas modales proposicionales, entre los que tenemos, el sistema S4 clásico, el sistema S4 intuicionista, los sistemas C_nS4 de Newton Da Costa y los sistemas B_nS4 de Martin Bunder, con la cual estos sistemas disponen de un T.D. propio y una implicación interna a los mismos.

3. *SUBSISTEMAS DEL SISTEMA TRIVALENTE DE LUKASIEWICZ*

El sistema trivalente de Lukasiewicz queda caracterizado por las siguientes tablas veritativas:

A \ B	1	0.5	0	□A	¬A	*A
1	1	0.5	0	1	1	0
0.5	1	1	0.5	0	0.5	1
0	1	1	1	0	0	0

La primera tabla corresponde a la implicación material A → B. Aquí una fórmula es considerada válida cuando su tabla de verdad arroja siempre el valor 1.

Los operadores monádicos presentados tienen la siguiente acepción:

□ A: Es necesrio A
¬ A: No es el caso A
* A: Es indeterminado A.

A continuación mostramos tres subsistemas cuyos conjuntos de fórmulas respectivos, generados por las proposiciones $p_1,\ldots,p_n,\ldots$, quedan determinados por el contexto.

Tales subsistemas se distinguirán por el índice k = 1, 2, 3.

AXIOMAS

T1) $\lambda^K_A\ (B \rightarrow A)$

T2) $\lambda^K_A\ (B \rightarrow A) \cdot\!\rightarrow\!\cdot\ \lambda^K_A\ (B) \rightarrow \lambda^K_A\ (C)$

T3) $\nabla_K \lambda_A^K (B) \rightarrow \lambda_A^K (\nabla_K B)$

REGLAS DE DEDUCCION

MP) $\dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}$ R) $\dfrac{A}{\nabla_k A}$

En donde: $\nabla_1 A = A$, $\nabla_2 A = \Box A$, $\nabla_3 A = \neg {}^* A$

y $\lambda_A^1 (B) = A \rightarrow (A \rightarrow B)$

$\lambda_A^2 (B) = \Box A \rightarrow B$

$\lambda_A^3 (B) = \neg {}^*A \rightarrow (A \rightarrow B)$

A continuación es muy fácil probar (d1)... (d4), con lo que $\lambda_A^K (B)$ sería la implicación débil correspondiente a cada subsistema.

Por ejemplo, la prueba de (d1) sería la siguiente:

1) $\lambda_A^K ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \bullet\!\!\rightarrow\!\!\bullet\ \lambda_A^K (A \rightarrow A) \rightarrow \lambda_A^K (A)$ ... (T2)

2) $\lambda_A^K ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ ... (T1)

3) $\lambda_A^K (A \rightarrow A) \rightarrow \lambda_A^K (A)$ ... (1, 2) MP.

4) $\lambda_A^K (A \rightarrow A)$ ... (T1)

5) $\lambda_A^K (A)$ ... (3, 4) MP

COMENTARIO

El subsistema correspondiente a k = 1 es sugerida por D. Monk (ver [3]), en su axiomática para el sistema trivalente de Lukasiewicz.

El subsistema correspondiente a k = 2 es la versión trivalente del fragmento modal S4 presentado anteriormente (ver también [1]).

El subsistema correspondiente a k = 3 es estudiado por el autor en [2], en el cual se le sugiere como base para un nuevo sistema modal. En tal sistema, "$\neg$* " puede interpretarse como la modalidad de "no-indeterminación".

4. *SISTEMAS DE PRIMER ORDEN*

El lenguaje de primer orden que presentamos es el más simple posible para efectos del tema que nos ocupa.

Como alfabeto tenemos una cantidad numerable de variables $x_1,\ldots,x_m$, ..., una cantidad finita o numerable de relatores R^n_k (n denota el número de argumentos a los cuales se aplica), el conector "$\rightarrow$ " y el cuantificador universal "$\forall$".

El conjunto de fórmulas For es genrado por las expresiones de la forma

$$R^n_k \;(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$$

y toda fórmula de nuestro lenguaje encaja en uno de los dos siguientes moldes:

$$A \rightarrow B \quad \text{o} \quad (\forall x_i)A \qquad \text{donde } A, B \in \text{For}$$

SUBSISTEMAS DE NUMERO FINITO DE VARIABLES

En lo que sigue consideremos, en el mismo lenguaje, solo las variables $x_1,\ldots,x_m$, y las demás, aunque aparecen en las fórmulas, serán tratadas como constantes o como parámetros.

Denotemos con $\forall$ A la fórmula $(\forall x_i)$ $(\forall x_2) \ldots (\forall x_m)A$. En realidad el orden en que aparecen las variables no tiene importancia, pero una vez que se ha prefijado un orden, es el mismo en toda la exposición.

AXIOMAS:

A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \;\cdot\!\!\rightarrow\!\!\cdot\; (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$

A3) $(\forall x_i)A \rightarrow A, \quad i = 1,\ldots,m$

A4) $(\forall x_i)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\forall x_i)B)$ si x_i no es una variable libre en A, $i = 1,\ldots,m$.

REGLAS DE DEDUCCION

MODUS PONENS (MP)

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

GENERALIZACION UNIVERSAL (GU)

$$\frac{A}{(\forall x_i)A, \quad i = 1,\ldots,m}$$

En este caso, la familia de aplicaciones que convierte al sistema en un sistema implicativamente deductivo está dado por $\lambda^K_A(B) = \forall A \rightarrow B$, con lo que el T.D. adopta la forma:

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash \forall A \rightarrow B.$$

Ahora, interpretando este resultado en el contexto del sistema de primer orden general, tal como aparece por ejemplo en [4], se tiene nuestra versión del T.D. generalizado:

T.D.G.) Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ y en la prueba de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ se ha usado, por GU., las variables $x_1,\ldots,x_m$, entonces

$$\Gamma \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_m)A \rightarrow B.$$

Se tiene los siguientes corolarios en el mismo contexto.

COROLARIO 1) (Ver [4])

Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ y si la deducción no contiene aplicaciones de la regla GU. con respecto a una variable que aparezca libre en A, entonces

$$\Gamma \vdash \forall A \rightarrow B.$$

COROLARIO 2)

Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A^1 \rightarrow B$ donde A^1 es la clausura universal de A.

COROLARIO 3) (Versión usual)

Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ y A es una sentencia (Fórmula cerrada o sin variables libres), entonces $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

COMENTARIO FINAL

Obsérvese que la implicación material "$\rightarrow$" aparece en todos los sistemas presentados, pero, salvo honrosas excepciones, no es considerada, desde nuestro punto de vista, como una implicación interna al sistema. Sin embargo, a la luz del T.D. y dado que se tiene la regla MP. podemso justificar la denominación de "implicación débil" dada a $A \rightarrow B$ (= $\lambda_A(B)$) mediante el siguiente argumento:

$$A \rightarrow B, A \vdash B \Rightarrow A \rightarrow B \vdash \lambda_A (B),$$

i.e. $A \rightarrow B \vdash A \Rightarrow B$

Departamento de Humanidades
Pontificia Universidad Católica del Perú

REFERENCIAS

[1] CIFUENTES V., J.C. *Una Implicación Débil en Lógica Modal.* Actas del Primer Congreso Nacional de Filosofía. Lima, 1984.

[2] ——— *Lógica Modal de la Indeterminación.* Notas no publicadas. Lima 1984.

[3] MONK, J. Donald. *Mathematical Logic.* Springer-Verlag. New York, 1976.

[4] HAMILTON, A.G. *Lógica para Matemáticos.* Ed. Paraninfo S.A. Madrid, 1981.

[5] HUGHES, G.E. y CRESSWELL, M.J. *Introducción a la Lógica Modal.* Ed. Tecnos, Madrid, 1973.