Los sistemas cognitivos artificiales en la enseñanza de la matemática[1]

Luis Alberto Toro-Carvajal

Universidad Autonoma de Manizales-
Universidad Nacional de Colombia,
Sede Manizales.
Manizales, Colombia.
alberto_toro@autonoma.edu.co

Hugo Hernán Ortíz-Álvarez

Universidad Autonoma de Manizales-
Universidad Nacional de Colombia,
Sede Manizales.
Manizales, Colombia.
h.h.ortiz@ucaldas.edu.co

Francy Nelly Jiménez-García

Universidad Autonoma de Manizales-
Universidad Nacional de Colombia,
Sede Manizales.
Manizales, Colombia.
francy@autonoma.edu.co

Jairo de Jesús Agudelo-Calle

Universidad Autonoma de Manizales-
Universidad Nacional de Colombia,
Sede Manizales.
Manizales, Colombia.
jdjac945@autonoma.edu.co

Resumen

Este artículo presenta la implementación de los sistemas cognitivos artificiales (SCA) en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La justificación teórica de tal implementación se hace desde el punto de vista de la Matemática y la Educación Matemática como ciencias y la Ciencia Cognitiva, de las cuales emerge el Modelo Computacional-Representacional de la Matemática (MCRMAT). Este modelo de las matemáticas da cuenta del porqué los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas pueden y deben ser mediados mediante los sistemas cognitivos artificiales, que deben ser entendidos como herramientas de reorganización cognitiva. La comprensión que se alcance sobre el conocimiento producido con la mediación de las herramientas proporcionadas por los sistemas cognitivos artificiales es importante para la enseñanza de la matemática. En los ejemplos que se presentan en este trabajo se ha empleado software licenciado como Matlab y Mathcad.

Palabras clave

Enseñanza de las matemáticas, método educativo, aprendizaje virtual, matemáticas, programa informático de aprendizaje, tecnología educacional (Fuente: Tesauro de la Unesco).

Recepción: 2011-07-28 | Aceptación: 2012-06-30

Para citar este artículo / To reference this article / Para citar este artigo

Toro-Carvajal, L. A., Ortíz-Álvarez, H. H., Jiménez-García, F. N., Agudelo-Calle J. J. (2012) Los sistemas cognitivos artificiales en la enseñanza de la matemática. Educ. Educ. Vol. 15, No. 2, 167-183.

1 Este trabajo es un resultado del proyecto de investigación “Incorporación de nuevas tecnologías a la enseñanza de la matemática” inscrito en la Unidad de Investigación de la Universidad Autónoma de Manizales.

Artificial Cognitive Systems in Teaching Mathematics

Abstract

The use of artificial cognitive systems (ACS) in processes for teaching-learning mathematics is proposed in this article. The theoretical justification for that implementation is based on a view of mathematics and the teaching mathematics as sciences and the cognitive sciences, from which the so-called Computational Representational Model of Mathematics (MCRMATH) has emerged. This model of mathematics shows why mathematics teaching and learning can and should be mediated by artificial cognitive systems, which are to be understood as tools for cognitive reorganization. An understanding of the knowledge produced through the use of tools provided by artificial cognitive systems is important to the teaching mathematics. The software licensed as Matlab and Mathcad was used in the examples presented in this study.

Keywords

Teaching mathematics, educational method, virtual learning, mathematics, computerized learning program, educational technology (Source: Unesco Thesaurus)

Os sistemas cognitivos artificiais no ensino da matemática

Resumo

Este artigo apresenta a implementação dos sistemas cognitivos artificiais (SCA) nos processos de ensino-aprendizagem da matemática. A justificativa teórica dessa implementação se faz sob o ponto de vista da Matemática e da Educação Matemática como ciências e a Ciência Cognitiva, das quais emerge o Modelo Computacional-Representacional da Matemática (MCRMAT). Esse modelo da matemática dá conta de por que os processos de ensino-aprendizagem da matemática podem e devem ser mediados pelos sistemas cognitivos artificiais, que devem ser entendidos como ferramentas de reorganização cognitiva. A compreensão que se atinge sobre o conhecimento produzido com a mediação das ferramentas proporcionadas pelos sistemas cognitivos artificiais é importante para o ensino da matemática. Nos exemplos que se apresentam neste trabalho, empregou-se o software licenciado como Matlab e Mathcad.

Palavras-chave

Ensino de matemática, método educativo, aprendizagem virtual, matemática, programa informático de aprendizagem, tecnologia educacional. (Fonte: Tesauro da Unesco).

Introducción

La matemática como ciencia siempre ha estado ligada a las necesidades del hombre de resolver problemas que involucran el conteo y la medición. Desde el punto de vista histórico dichos problemas han avanzado en complejidad desde la antigüedad hasta elaborados modelos de la ciencia actual. La solución de estos problemas ha involucrado una cantidad cada vez más creciente en el número de cálculos requeridos llegando al punto en que se ha hecho imprescindible desligar al hombre de estas tareas computacionales.

La enseñanza de la matemática, desde el punto de vista de la solución de problemas, debe asimilar estos nuevos desafíos, lo que lleva de inmediato al uso de los computadores y software matemático especializado. De otra parte, es sabido que la enseñanza de esta ciencia requiere de un sistema variado y flexible de formas de representación de los objetos y estructuras que la componen. A este respecto Kaput (1992), describe las actividades matemáticas que tienen lugar en el proceso de enseñanza como: las transformaciones sintácticamente restringidas dentro de un sistema particular con o sin referencia a otros significados externos; traducciones entre sistemas de notación; construcción y verificación de modelos matemáticos; consolidación de relaciones y procesos en objetos conceptuales que pueden ser usados en relaciones y procesos de un orden más alto de organización. Estas actividades involucran frecuentemente el uso de representación de carácter algebraico, gráfico y numérico. Una medida de qué tan bien se aprenden las matemáticas está dada por la capacidad que alcanza el individuo en el manejo de estas representaciones. El software disponible actualmente permite tanto al docente como al estudiante una mejor integración de estas formas de representación liberando al individuo de procesos de cálculos repetitivos y permitiéndole concentrarse en lo realmente importante que es la comprensión e interiorización de los conceptos que se abordan y su aplicación en diferentes contextos.

Para el desarrollo de cualquier metodología encaminada a la enseñanza de la matemática es indispensable la identificación de un modelo que dé cuenta de la forma como se aprenden los conceptos. Uno de ellos es el *modelo computacional representacional de mente* (MCRM) desarrollado por Thagard (2006), el cual da una explicación de cómo el individuo realiza diversos procesos cognitivos.

En este escrito se retoma el modelo teórico descrito por Luis Alberto Toro, que justifica la enseñanza de la matemática mediada por ayudas computacionales, como el *modelo computacional representacional de la matemática* (MCRMAT). Así mismo se presentan algunos ejemplos del uso del MCRMAT en la enseñanza de la matemática en cursos dirigidos a estudiantes de ingeniería que han sido puestos a prueba con éxito en la Universidad Autónoma de Manizales (UAM), en el marco del proyecto de investigación “Incorporación de Nuevas Tecnologías en la Enseñanza a la Matemática” del Grupo de Investigación en Física y Matemática con énfasis en la Formación de Ingenieros. Para este trabajo de investigación se emplearon los softwares Matlab y Mathcad, adquiridos por la UAM.

Contenido

Necesidad de incorporar los sistemas cognitivos artificiales (SCA) en la enseñanza de la matemática

Un hecho histórico: el estudio de los sistemas dinámicos complejos inició en 1920 por los matemáticos franceses Pierre Fatou y Gaston Julia, pero hubo que esperar hasta finales de la década de los setenta y comienzos de los ochenta para que el rápido desarrollo de las técnicas de gráficos por computadora permitiera a Benoit Mandelbrot y a otros matemáticos visualizar algunas de las estructuras con las que habían trabajado Fatou y Julia. Las figuras increíblemente bellas que surgieron de este estudio, los fractales, se convirtieron desde entonces en una especie de forma de arte por derecho propio.

El mencionado episodio histórico no justifica por sí sólo la introducción de las herramientas computacionales en la enseñanza de las matemáticas, pero sí nos dice que el cambio en la práctica de las matemáticas nos obliga a repensar la educación matemática a todo nivel, desde la primaria hasta la universitaria. Tal justificación tampoco proviene de la constatación de que la computadora supone e impone una transformación sin precedentes en todos los ámbitos de la actividad humana, y como la máquina de vapor, determina las capacidades de la movilidad social, de las maneras de producir y de hacer, pero que además condiciona nuestro estar en el mundo como personas, puesto que se trata de un ingenio que presenta fuertes analogías con las categorías *lógicas* y *mentales* de la persona. Tal justificación debe darse desde la matemática y la educación matemática como ciencias con la ayuda de la ciencia cognitiva. ¿De qué tratan éstas ciencias?

La matemática es la ciencia de las estructura. La idea de *estructura* domina por completo la matemática de hoy día (Toro, 2007). El matemático examina estructuras abstractas: numéricas, de formas, de movimiento y del cambio, de comportamiento, las estructuras con las que se repiten los sucesos aleatorios, las de simetría y las de regularidad, las del razonamiento, las estructuras fundamentales del universo. ¿De dónde provienen estas estructuras? Pueden ser imaginarias o reales, visuales o mentales, estáticas o dinámicas, puramente utilitarias. Su origen puede residir en el mundo real que nos rodea, o en las profundidades del espacio y del tiempo, o en la actividad de la mente humana.

La educación matemática. Gutiérrez (1999) estudia los procesos de enseñanza-aprendizaje de los saberes matemáticos en los procesos teórico-conceptuales y de resolución de problemas, tratando de caracterizar los factores que condicionan dichos procesos.

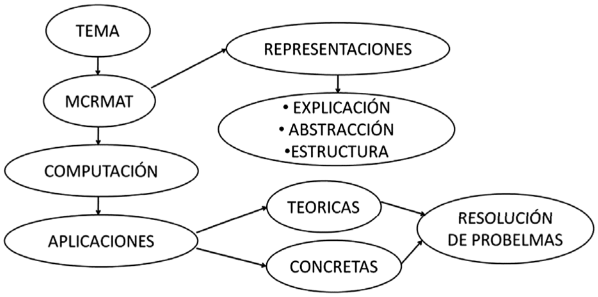
La ciencia cognitiva (CC). Friedenberg (2006), se puede definir como el estudio científico e interdisciplinario de la mente, que intenta comprender los principios de la conducta cognitiva e inteligente que permiten una mejor comprensión del proceso enseñanza-aprendizaje y del desarrollo de aparatos inteligentes que aumentan la capacidad humana de manera constructiva. Su metodología primaria es el método científico, aunque muchas otras metodologías también contribuyen. La principal característica de la CC es su aproximación interdisciplinaria, incluyendo filosofía, psicología, lingüística, inteligencia artificial, robótica y neurociencia. Cada una de ellas brinda un único conjunto de herramientas y perspectivas.

Cuando se estudia algo tan complejo como la mente, ninguna perspectiva individual es adecuada, en su lugar, la intercomunicación y cooperación entre los practicantes de estas disciplinas dicen mucho más. Para entender lo que realmente es la CC, todo lo que se necesita es conocer cuál es la perspectiva teórica acerca de la mente. Tal perspectiva se centra sobre la idea de *computación,* que alternativamente puede denominarse *procesamiento de información*. Los científicos cognitivos ven la mente como un *procesador de información*, y por tanto estos procesadores deben *representar* y *transformar* la información. Según esta perspectiva una mente debe incorporar alguna forma de representación y procesamiento mental, que actúa sobre la información y la manipula. De acuerdo con lo anterior, la CC presenta el *modelo computacional representacional de la mente, MCRM,* en el que adopta la hipótesis según la cual en la mente existen representaciones mentales análogas a estructuras de datos y procesos computacionales semejantes a los algoritmos que usan las computadoras: *representaciones mentales más procesos computacionales producen el pensamiento*.

Una representación es un símbolo o conjunto de símbolos que puede ser interpretado por la mente o por una computadora, y de cuya interpretación emerge un significado. Existen diversos tipos de representaciones, entre las que se encuentran los *conceptos,* las *proposiciones,* las *reglas* y las *analogías*. La mente humana funciona simbólicamente cuando ciertas experiencias (símbolos) recuerdan estados de conciencia y emociones que reflejan otras experiencias (significado de los símbolos). El cerebro es capaz de percibir un objeto simbólico al mismo tiempo como algo real en sí mismo y como la representación de algo más. DeLoache (2005) se refiere a ello como la "teoría de la representación dual", la cual describe nuestra capacidad para atribuirle características y significados a cosas que en realidad no las tienen, es decir, podemos imaginar cosas que no están presentes.

Las matemáticas tienen un alto nivel representacional, debido al uso extensivo de símbolos para denotar todo tipo de objetos matemáticos, y por lo tanto las representaciones ocupan un lugar central en la enseñanza de las matemáticas. La razón de tal interés se debe encontrar en el hecho de que hablar de representación, equivale a hablar de conocimiento, significado, comprensión, modelización. Sin duda, estas nociones constituyen el núcleo central, no sólo de la matemática, sino también de la epistemología, psicología y demás ciencias y tecnologías que se ocupan de la cognición humana, su naturaleza, origen y desarrollo. Esta diversidad de disciplinas interesadas por la representación es la razón de la diversidad de enfoques y maneras de concebirla. De otra parte los conceptos matemáticos (representaciones) se construyen mediante la combinación (computación) de otros conceptos matemáticos (de nuevo representaciones). Por lo tanto, en estrecha analogía con el MCRM, se puede hablar de un *modelo computacional-representacional de la matemática,* MCRMAT, que considera que desde el punto de vista interno de la matemática como ciencia, *la matemática realiza cómputos con representaciones, cuyo objetivo final es la creación de estructuras abstractas*. Puede pensarse del MCRMAT como un instrumento teórico que capta lo esencial de la matemática: su carácter *abstracto, representacional y de estructura*; pero además es un instrumento teórico para la enseñanza de las matemáticas. La figura 1 muestra el MCRMAT y su relación con cualquier tema de matemáticas, o al menos los que se enseñan en los curso de pregrado.

Figura 1. El MCRMAT y el aula de clase.



El siguiente ejemplo ayudará a comprender la figura 1. Se está enseñando ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). En primer lugar, aparece el *concepto de ecuación diferencial ordinaria* (una representación). Luego, es necesario traducir tal concepto mediante *símbolos* (representaciones) y dar una adecuada *explicación* de los símbolos que se usan en tal representación, haciendo énfasis en su *abstracción,* es decir que podemos cambiar los símbolos sin incidir en el concepto de ecuación diferencial ordinaria. Sean las expresiones,

$$\frac{dy}{dx}+(1-x^2)y=\cos x\,, \qquad \frac{df}{dz}+(1-z^2)f=\cos z\,. \tag{1}$$

Las ecuaciones (1) son dos *representaciones* de la misma ecuación diferencial de primer orden. En la primera, la función desconocida es y, la variable independiente es x; mientras que en la segunda la función desconocida es f y la variable independiente es z. Las expresiones anteriores pueden escribirse en forma de una *estructura simbólica* general, pues en realidad tales expresiones son funciones de la forma:

F (Derivada de la función desconocida, función desconocida, variable independiente)=0.

Aquí F (u otro símbolo adecuado) se utiliza para designar la relación funcional entre las variables que intervienen en la ecuación diferencial, que se revela al pasar los términos de los segundos miembros, en las ecuaciones (1), al primero. De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones diferenciales (1) pueden escribirse de la siguiente forma:

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0, \quad F\left(\frac{df}{dz}, f, z\right) = 0 . \tag{2}$$

Otra forma de estructura aparece cuando se estudian las soluciones de una EDO de orden homogénea con coeficientes constantes, cuyas soluciones tienen la estructura de espacio vectorial. A continuación viene el concepto de *solución de una ecuación diferencial*; luego se estudian los teoremas acerca de cuándo una EDO tiene solución (única o más de una), y cuándo no la tiene. Después, se presentan los diferentes métodos para obtener (*computar*) la o las soluciones de una ecuación diferencial; se tratan algunas cuestiones *teóricas* y ejemplos *específicos,* que preparan al estudiante para enfrentar la aplicación de las EDOs a la solución de problemas (*modelar y simular*) de las ciencias e ingeniería, donde las ecuaciones diferenciales son parte integral del modelo matemático del problema a resolver.

La mayoría de los cursos actuales de ecuaciones diferenciales que se imparten en las universidades colombianas hacen énfasis en los aspectos *computacionales*, es decir, la mayor parte del curso se dedica a presentar métodos para hallar soluciones analíticas de las EDOs, descuidando los aspectos representacionales y de aplicaciones (a los que se dedica poco tiempo), lo que es, desde nuestro punto de vista un error metodológico. Es en éste punto donde el uso de *sistemas cognitivos artificiales* entra en acción y restituye el equilibrio entre los aspectos teóricos, computacionales y aplicaciones en la enseñanza de las EDOs, como se puede apreciar en los ejemplos que se presentan posteriormente.

Lenguajes de programación como *Matlab* y *MathCad,* incorporan, además de sistemas de representación numérico y gráfico, un sistema representacional que permite realizar cómputos algebraicos. Esto significa, que además de realizar cálculo numérico y graficar ecuaciones, tales lenguajes permiten hacer cómputos simbólicos. Operaciones tales como factorización de polinomios, derivación e integración simbólica (en una, dos y tres dimensiones), simplificación de expresiones algebraicas y trigonométricas, cálculo simbólico de determinantes (orden dos y tres), operaciones con matrices simbólicas, descomposición en fracciones parciales, solución de algunas *ecuaciones diferenciales ordinaria* y *parciales*, por mencionar solamente unas pocas, son realizadas eficientemente en tales sistemas representacionales.

Así, puede verse como un *sistema cognitivo artificial* inducido por el MCRMAT revela no solamente el carácter computacional-representacional que tiene la matemática, sino su acción a través de medios artificiales. Es cognitiva, porque tales sistemas representacionales realizan actividades semejantes a las cognitivas de la mente (memoria, análisis, computaciones y toma de decisiones, entre otras) y artificiales, porque son llevadas a cabo por un agente externo a la mente, la computadora. Por lo tanto la enseñanza de la matemática puede y debe ser mediada por sistemas representacionales como los ya mencionados.

El uso de sistemas representacionales artificiales numéricos, gráficos y algebraicos permiten estudiar una situación matemática dada desde cualquiera de los tres puntos de vista: numérico, gráfico o simbólico. Pero lo más importante es que, desde el punto de vista *cognitivo*, tal situación puede *estudiarse integralmente desde los tres puntos de vista*. La anterior integración abre la posibilidad de establecer nuevas relaciones entre los tres tipos de representación, y por tanto, emerge *una mayor elaboración conceptual de los objetos matemáticos involucrados en la situación bajo estudio*. Se concluye entonces que tales sistemas son aptos para la enseñanza de las matemáticas, y su uso representa un punto de inflexión en la enseñanza de tal ciencia.

No debe pensarse de los instrumentos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas como *"simples prótesis para la acción"*. Tales instrumentos deben verse como reorganizadores de todo el funcionamiento cognitivo, ya que contribuyen al rediseño de estrategias en la resolución de problemas y a la reconceptualización mediante la sustitución de un sistema de representación, como los mismos autores lo han experimentado durante los años que llevan usando diversos sistemas cognitivos artificiales como instrumentos, no solamente para sus investigaciones sino también para la enseñanza de la matemática, y a los que se hará referencia posteriormente.

Finalmente, uno de los objetivos del grupo de investigación en la implementación de tecnologías en la enseñanza de la matemática, es el de entender cómo se debe realizar tal implementación, ya que los sistemas de representación artificiales permiten dos posibilidades: entenderlos como herramientas de *amplificación* o entenderlos como herramientas de *reorganización*, y pasar de la amplificación a la reorganización no es tarea fácil. De hecho se debe trabajar en el marco de un currículum ya establecido, pero la idea es que las innovaciones exitosas tendrán la capacidad de *"erosionar"* los currículos tradicionales. Según Moreno (2001), la comprensión que se alcance sobre el conocimiento producido con la mediación de las herramientas proporcionadas por las tecnologías de la información, se torna de vital importancia para la enseñanza de la matemática.

Aspectos clave para una correcta incorporación de los SCA en la enseñanza

> *Casi nadie considera que la matemática es una forma de pensar, de enfrentar problemas, de resolver problemas (si aceptamos que pensar es en esencia resolver problemas), sin embargo, la aparición de la tecnología contemporánea ratifica cada vez más que la actividad distintiva del hombre es la resolución de problemas y que la matemática como actividad típicamente humana es esencialmente una actividad de pensamiento y no una rutina o mecanismo que las máquinas pueden realizar, (Villanueva, 2004).*

Cuando un individuo se enfrenta a un problema y no tiene a la mano soluciones dadas o externas, lo más natural es que surjan propuestas de diversa índole y eficiencia, pero la aplicación repetitiva de las soluciones encontradas no se traduce en un mejor desempeño en la ejecución de la tarea, sino que es a través de la reflexión sobre las ventajas y desventajas de aplicar el método lo que permite alcanzar nuevas y mejores formas de realizar el trabajo. Lo anterior es válido tanto para el estudiante como para el profesor. Por ejemplo, no basta que el estudiante se aferre a esquemas o rutinas de aprendizaje preestablecidas para alcanzar su óptimo desempeño, sino es necesario que pueda dar razón sobre las intencionalidades de cada actividad que realiza para el logro de los objetivos, habilidades o competencias, que conozca sus debilidades y fortalezas y la manera en que aprende, para que pueda replantear el proceso de aprendizaje que emplea. Así mismo, el profesor debe reconocer que no es la práctica repetida del ejercicio docente lo que lo hace mejor maestro sino que es la reflexión permanente de su quehacer, la evaluación (científica) de su desempeño, la contrastación con pares y la actualización en las tendencias de la comunidad académica lo que permite formular nuevas estrategias para una labor más eficiente en el proceso de enseñanza.

Una de las reflexiones obligadas de los docentes es acerca de la forma en que sus estudiantes aprenden, y es aquí donde cobran importancia los modelos de aprendizaje como el MCRM discutido anteriormente. Aunque estos modelos no son perfectos sí explican tendencias y comportamientos, lo que permite el planteamiento de metodologías de enseñanza que privilegien aquellos procesos que conducen a una mejor aprehensión y construcción del conocimiento.

Las estructuras de la matemática como ciencia se nutren de diversas clases de representaciones como símbolos, ecuaciones, comparaciones, enunciados verbales, gráficos y tablas entre otros; el pensamiento matemático surge cuando el individuo

ISSN 0123–1294 | **Educ.Educ. Vol. 15. No. 2** | Mayo-agosto de 2012 | pp. 167-183.
Universidad de La Sabana | Facultad de Educación

genera habilidades para hacer uso de cada una de estas representaciones y las relaciona entre sí para producir objetos cada vez más complejos y elaborados. El éxito al momento de enfrentar un problema matemático ya sea de naturaleza teórica o aplicada depende de la capacidad que posee la persona de ligar dicho problema a las representaciones matemáticas de que dispone. La facilidad de pasar de una representación a otra del mismo objeto matemático incrementa la capacidad de procesamiento y por tanto mejora las posibilidades de llegar a un camino de solución.

Dado que los objetos sólo son accesibles por medio de sus representaciones mentales, el proceso de instrucción debe tener como objetivo el desarrollo de representaciones internas adecuadas y bien conectadas en los estudiantes (Font, 2001).

Las diferentes heurísticas que se abordan en una metodología de enseñanza basada en la solución de problemas pueden verse de alguna manera como funciones o aplicaciones donde el argumento de entrada es el problema a resolver y el de salida la solución. La elección de una u otra heurística involucra procesos complejos de decisión que tienen en cuenta entre otras las experiencias previas del individuo, el tipo de representaciones que admite el problema y la facilidad con que puede manejarlas o transformarlas en otras más accesibles para él.

Los sistemas representacionales importantes para las matemáticas y su aprendizaje tienen estructura, de manera que las diferentes representaciones dentro de un sistema están relacionadas de manera rica unas a otras (Goldin, 2001).

El computador permite de una manera ágil el cambio entre diversas formas de representación de un mismo objeto matemático ya sea simbólico, gráfico o numérico. El alumno puede hacer uso de ellas como un todo para una mejor comprensión del objeto en cuestión o elegir una que le sea más familiar para realizar de mejor forma su trabajo.

Las diferentes formas de representación (diagramas, gráficas y expresiones simbólicas) han sido enseñadas y aprendidas como si fueran fines en sí mismas. Las representaciones deben ser tratadas como elementos esenciales para apoyar la comprensión de los estudiantes de los conceptos y relaciones matemáticas; en comunicar acercamientos, argumentos e ideas matemáticas a uno mismo y a los demás, en reconocer conexiones entre conceptos matemáticos relacionados; y en aplicar las matemáticas a situaciones de problemas realisticos a través de la modelización (Rico, Castro, Coriat, Marín, Puig, Sierra, Socas, 1997).

Modelos matemáticos

Virtualmente, cada fenómeno de la naturaleza, sea biológico, geológico o mecánico, puede ser descrito con la ayuda de las leyes de la física, en términos de ecuaciones que pueden ser algebraicas, diferenciales o integrales, que relacionan varias cantidades de interés. Tales expresiones matemáticas se denominan *modelos matemáticos*. Ejemplos de fenómenos físicos que pueden modelarse matemáticamente son la distribución de sustancias contaminantes en la atmósfera, lagos o ríos; la respuesta de construcciones civiles (puentes, edificios, etc.) a los terremotos; las vibraciones mecánicas de la suspensión de automóviles o las de las alas de los aviones; el comportamiento de poblaciones de animales en un cierto territorio (ecuación logística); la forma cómo los seres humanos aprenden ciertos conocimientos (curvas de aprendizaje); la propagación de un rumor y la trayectoria que sigue un cohete lanzado al espacio, por mencionar unos pocos.

Cuando se estudia un fenómeno de la naturaleza, el científico, ingeniero o profesional se enfrenta a dos grandes retos:

1. La formulación del modelo matemático del proceso físico.
2. Análisis numérico y/o cualitativo del modelo matemático.

La formulación matemática del fenómeno físico requiere de un conocimiento de las leyes que lo gobiernan (i.e. leyes físicas) y de ciertos conocimientos matemáticos. En general, el modelo matemático resultante consiste en una o varias ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales) que relacionan las cantidades de interés para entender y/o diseñar el proceso físico. El desarrollo del modelo matemático de un proceso se alcanza a través de suposiciones acerca de cómo el proceso se manifiesta. En una simulación numérica, un método numérico implementado en un computador es usado para evaluar el desempeño del modelo matemático y estimar las características del proceso.

Una vez la ecuación diferencial que modela el comportamiento del fenómeno físico es obtenida, cuya derivación para fenómenos complejos es difícil, la siguiente tarea es obtener su solución exacta (solución analítica). Sin embargo, existen muchas situaciones de orden práctico en la cuales una solución analítica no está disponible. Lo anterior se presenta, por ejemplo, cuando la región en la cual se debe resolver la ecuación diferencial tiene una frontera que es tan irregular que la hace imposible describir matemáticamente; o se deben resolver problemas que involucran materiales anisotrópicos, que generan ecuaciones diferenciales que contienen términos no lineales. En tales casos se debe recurrir a métodos numéricos para obtener una solución aproximada de la ecuación diferencial bajo estudio.

Sin lugar a dudas, las ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) son un instrumento matemático utilizado por ingenieros y científicos para modelar fenómenos de la naturaleza. Hallar soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales fue la tarea primordial de muchos matemáticos del siglo XVIII y XIX. Los cursos actuales de ecuaciones diferenciales ordinarias siguen esta tradición, dando a entender a los estudiantes de ingeniería, que el objetivo principal del estudio de las ecuaciones diferenciales consiste en *hallar artificios de cálculo que les permitan resolverlas*. Existen tratados como el de Murphy (1960) sobre ecuaciones diferenciales donde se analizan las técnicas conocidas para su solución. De otra parte, un programa de cómputo simbólico como *Matlab puede dar cuenta de la mayoría* de las ecuaciones diferenciales ordinarias que se estudian en un curso normal de tal asignatura.

Existen otros métodos mediante los cuales es posible estudiar las ecuaciones diferenciales: métodos cualitativos (Campos, 2002) y numéricos y de aproximación (Chapra,1999). Lo anterior no significa que es necesario desechar los métodos para hallar soluciones cerradas de ecuaciones diferenciales, lo que se quiere expresar es que se debe mermar el énfasis en tales métodos y centrarse, por ejemplo, en *aspectos más teóricos, de métodos cualitativos, de modelación, de introducción a los sistemas dinámicos y al caos*. Al fin al cabo, los ingenieros usan las ecuaciones diferenciales para modelar fenómenos del mundo real, y una vez obtenido el modelo, lo que ellos necesitan son simulaciones numéricas y/o gráficas por computadora para estudiar el sistema bajo variadas condiciones, y esto es lo que permite finalmente utilizar los datos obtenidos para el diseño en ingeniería. Los comentarios precedentes dicen que los procesos de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales deben ser cambiados radicalmente, y que para tal cambio la introducción de las nuevas tecnologías de la información es de gran ayuda, como se muestra en los ejemplos que se presentan posteriormente.

Experiencias didácticas

Los sistemas cognitivos artificiales pueden emplearse para la enseñanza de diversos temas de la matemática. En algunas ocasiones su incorporación se hace imprescindible, como es el caso de la generación del campo de direcciones de una ecuación diferencial de primer orden, el cual permite realizar un análisis cualitativo de las soluciones sin resolver la ecuación diferencial. En otros casos es necesario emplear ayudas computacionales para lograr una mejor comprensión de un fenómeno físico

ISSN 0123–1294 | **Educ.Educ. Vol. 15. No. 2** | Mayo-agosto de 2012 | pp. 167-183.
Universidad de La Sabana | Facultad de Educación

en particular. Un ejemplo de ello es el problema de encontrar la distribución de temperaturas en una lámina plana delgada cuando es sometida a ciertas condiciones de frontera. La solución que se obtiene finalmente está en términos de una serie infinita. Si bien podría pensarse que la obtención de esta solución por parte del estudiante es un indicio suficiente de la interiorización del método, no puede decirse lo mismo de su capacidad para hacer uso de dicha solución de tal forma que le permita proponer hipótesis, argumentar sobre el fenómeno e inferir comportamientos, entre otros. La representación gráfica de esta solución facilita el desarrollo de las habilidades anteriores, y es en este punto donde se hace indispensable el empleo de ayudas computacionales.

Es notable cómo algunos conceptos matemáticos de uso frecuente para el estudiante en sus primeros años de pregrado en ingeniería o ciencias aplicadas no logran ser asimilados de forma correcta, generando toda clase de conflictos que impiden la formalización científica en otras áreas fundamentales de su formación profesional. Este es el caso del concepto de *derivada* o el de la *integral*. Nuevamente los sistemas cognitivos artificiales pueden ser usados de forma intencionada para mejorar la asimilación en temas problemáticos como los que se plantean, y esto puede lograrse gracias a la diversidad de representaciones que pueden conjugarse en este proceso con ayuda del computador.

Los siguientes ejemplos muestran las situaciones mencionadas y una propuesta en cada caso empleando el computador con miras a lograr una mejor apropiación de los diferentes conceptos.

Ejemplo 1. Es posible obtener el comportamiento cualitativo de la solución de una ecuación diferencial sin resolver. La ecuación diferencial de primer orden *y'=f(t,y)* en realidad dice que la pendiente de cualquier solución de tal ecuación en el punto *(t,y)* es *f(t,y)*, y por lo tanto, para cada punto *(t, y)* dado se puede calcular *y'*. Si se calcula *y'* para un gran número de puntos en el dominio de *f(t,y)* se obtiene un *campo de pendientes* o *campo de direcciones,* que representa el comportamiento de las soluciones en el conjunto de puntos seleccionado. El procedimiento manual para graficar el campo de pendientes es obtener *y'*, trazar un pequeño segmento de recta de pendiente *y'* y repetir el proceso para todos los puntos *(t,y)*. Tal forma de proceder es tediosa y consume demasiado tiempo. Usando una ayuda computacional, por ejemplo el software Matlab, el campo de direcciones se puede trazar con facilidad y en poco tiempo. Los comandos que se utilizan para obtener el campo de pendiente son *meshgrid* y *quiver.*

Como ejemplo se construye el campo de direcciones para la ecuación diferencial, que se muestra en la figura 2, con los siguientes comandos en Matlab:

f=inline('9.8-y/5','t','y'); % Se define f(t, y)

h=5;t0=0;tf=50;inter=t0:h:tf; % Se define un intervalo para t.

[t,y]=meshgrid(inter, inter); % Se obtiene la malla de puntos (t, y).

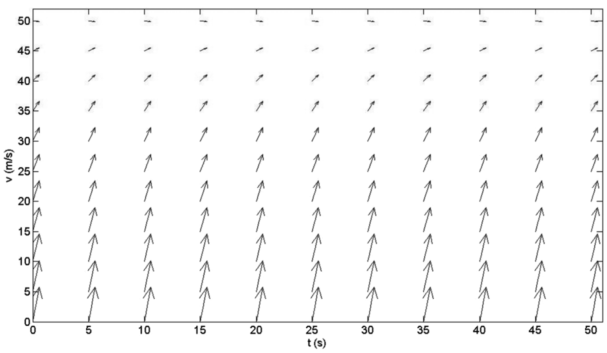
[n,m]=size(t);

dt=ones(n,m);

u=f(t,y);dy=u;

quiver(t,y,dt,dy)

Figura 2. Campo de direcciones para la EDO *y' = 9.8 – y/5*



Ejemplo 2. A un objeto de masa *m* se aplica una velocidad inicial v_o hacia abajo y se le permite caer bajo la influencia de la gravedad. Suponiendo que la fuerza gravitacional es constante y que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, determinar la ecuación de su movimiento.

Para hallar la solución, primero se elige un sistema de coordenadas. Dado que el objeto se mueve hacia abajo, se elige como sistema de coordenadas un eje vertical, cuya dirección positiva concuerde con el movimiento del objeto. En segundo lugar se debe obtener un modelo de la velocidad *v*(*t*) que tendrá el objeto al cabo del tiempo *t*. A tal efecto se aplica la segunda ley de Newton del movimiento en una dimensión para un objeto de masa constante: la fuerza neta *F* que actúa sobre un objeto de masa *m* es igual a la masa *m* multiplicada por la aceleración a(*t*) del objeto en el tiempo *t*, es decir, *F=mat*. Pero dado que *a(t)=dv(t)/dt*, se puede escribir *F=m dv(t)/dt*. La fuerza *F* se obtiene como sigue: la fuerza ejercida por la gravedad es $F_1=mg$, donde *g* es la constante gravitacional cerca de la tierra; la fuerza debida a la resistencia del aire es $F_2=-kv(t)$, siendo k>0 una constante y el signo menos se tiene en cuenta ya que en este caso la fuerza de rozamiento actúa en sentido contrario al movimiento del objeto. Por lo tanto, la fuerza neta es $F=F_1+F_2=mg-kv(t)$, y la ecuación diferencial que gobierna el movimiento del objeto es:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

Dado que se conoce la velocidad en el tiempo *t*=0 , *v*0= v_o, se debe resolver el problema de valor inicial (PVI):

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t), \;\; v(0) = v_0$$

El siguiente código en Matlab, que usa la función *dsolve*, resuelve el anterior PVI.

```
v = dsolve ('Dv=g-(k/m)*v','v(0)=v0','t')

v =  (g*m - (g*m - k*v0)/exp((k*t)/m))/k
```

Por lo tanto, la expresión para *v(t)* puede escribirse:

$$v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$$

Dado que *vt=dx(t)/dt*, y *x0=0*, la ecuación del movimiento del objeto se calcula como

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \left(\frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}\right)dt$$

La siguiente sintaxis en Matlab calcula la anterior integral.

```
>> syms  m g k vo t

x=int(m*g/k,t,0,t)+(vo-m*g/k)*int(exp(-k*t/m),t,0,t)

 x = (g*m*t)/k - (m*(1/exp((k*t)/m) - 1)*(vo - (g*m)/k))/k
```

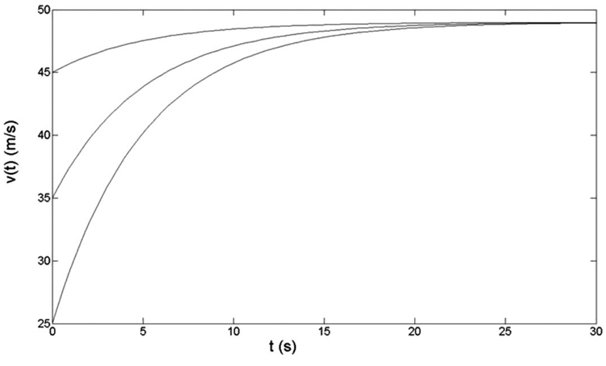
Luego,

$$x(t) = \frac{mg}{k}\,t + \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$$

Por supuesto, todos los cálculos anteriores pueden realizarse con *lápiz y papel, y el estudiante debe ser capaz de ello.* Sin embargo, se supone que él ya está entrenado en la solución de algunas ecuaciones diferenciales básicas.

Con las expresiones para *v(t)* y *x(t)*, éstas se pueden graficar para varios valores de la relación *m/k* (que se fija) y v_o (que varía). La figura 3 muestra gráficas de velocidad para v_o=25, 35, 45 (m/s) y *v*o=25,35,45 (*m/s*) y *m/k*=5 *s*.

Figura 3. Gráfica de velocidad vs tiempo para el ejemplo 2.



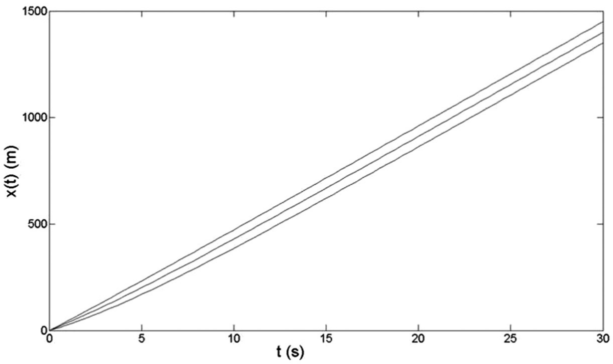
Las gráficas de la figura 3 fueron obtenidas de la sintaxis en Matlab

```
>> t=linspace(0,30);
>> v0=[25 35 45];
>> for i=1:3
        v=5*9.81+(v0(i)-5*9.81)*exp(-.5*t);
        plot(t,v)
        hold on
    end
>> ylabel('v(t) (m/s)'); xlabel('t (s)')
```

Estas curvas presentan el comportamiento ya determinado en el campo de direcciones tal y como se muestra en la Figura 1.

La figura 4 muestra la gráfica de *x(t)* para los mismos valores de v_o de la figura 3 e igual intervalo de tiempo.

Figura 4. Gráfica de distancia vs tiempo para el ejemplo 2.



La sintaxis en Matlab es:

```
>> t= linspace(0,30);
>> for i=1:3
        x=49*t+5*(v0(i)-49)*(1-exp(-.2*t));
        plot(t,v)
      hold on
    end
    ylabel('x(t) (m)')
    xlabel('t (s)')
```

Ejemplo 3. Un problema clásico estudiado en los cursos de matemáticas avanzadas es el de encontrar la distribución de temperaturas estacionaria en una placa delgada con determinadas condiciones de frontera, por ejemplo, la placa puede estar a una temperatura de cero grados en tres de sus bordes y a una función de temperatura *f(x)* en el otro. Este problema se modela mediante la ecuación de Laplace bidimensional así:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$
$$u(x,0)=f(x) \quad u(0,y)=0$$
$$u(x,a)=0 \qquad u(b,y)=0$$

La solución de este problema de Dirichlet se obtiene por el método de separación de variables (Penney 2009), el cual genera una solución expresada como el producto de una función en x y otra en y. La solución obtenida siguiendo este procedimiento está dada en términos de la serie infinita,

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\tfrac{n\pi x}{a}\, senh\frac{\tfrac{n\pi(b-y)}{}}{a},$$

donde los coeficientes c_n se obtiene de la condición no homogénea:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n senh\tfrac{n\pi b}{a}\right) sen\tfrac{n\pi x}{a}=f(x),$$

los cuales corresponden a los coeficientes de la serie de Fourier en senos de *f(x)*, es decir:

$$b_n=\tfrac{2}{T}\int_0^T f(x) sen\tfrac{n\pi x}{T}\,dx,$$

de donde,

$$c_n senh\tfrac{n\pi b}{a}=\tfrac{2}{a}\int_0^a f(x) sen\tfrac{n\pi x}{a}\,dx,$$

por tanto:

$$c_n=\frac{2}{a senh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x) sen\tfrac{n\pi x}{a}\,dx.$$

Para una función específica *f(x)* el problema se convierte en un caso particular, por ejemplo si se somete la placa a una temperatura constante T_o entonces *f(x)*= T_o. Los coeficientes c_n para esta función, que se obtienen al calcular la integral anterior, están dados por:

$c_n = \frac{4To}{\pi n}$ para n impar y cero para n par.

Por tanto, la temperatura estacionaria de la placa rectangular con su base mantenida a temperatura T_o, y tres de sus esquinas a temperatura cero es:

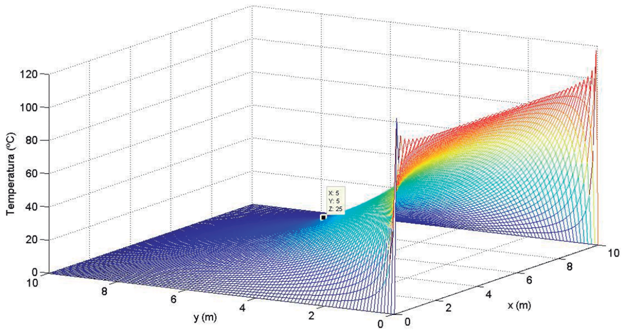
$$u(x,y) = \frac{4To}{\pi n} \sum_{n\ impar} \frac{sen(n\pi x/a)senh(n\pi(b-y)/a)}{nsenh(n\pi b/a)}$$

Si bien esta es la solución del problema inicialmente planteado, no puede pensarse que los estudiantes tengan claro lo que ella significa, es necesario entonces, en este punto, proponerles algunas preguntas que los lleve a hacer uso de la misma y les permita argumentar sobre el fenómeno y comprender el comportamiento de la temperatura en diferentes puntos de la placa. Algunas preguntas podrían ser: ¿Cuál es la temperatura en el centro de la placa?, ¿Qué sucede en puntos cercanos a los bordes de la placa?

La representación gráfica de esta solución, facilita, sin duda, encontrar respuestas a los interrogantes planteados y para ello se hace necesario emplear ayudas computacionales. Si tomamos un caso particular por ejemplo a=b=10 cm y T_o= 100°C, la distribución de temperatura puede representarse gráficamente como se muestra en la Figura 5, mediante los siguientes comandos en Matlab:

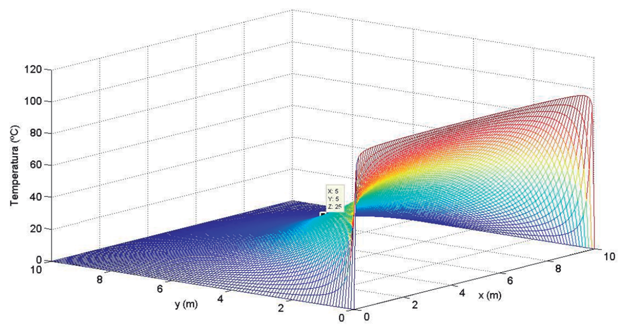
```
>> To=100;
a=10;
b=10;
N=50;
y=0:10/100:10;
x=0:10/100:10;
S=0;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
for n=1:2:2*N+1;
    S=S+(1/n)*sin(n*pi*X/a).*sinh(n*pi*(b-Y)/a)/
sinh(n*pi*b/a);
end
u=4*To/pi*S;
mesh(X,Y,u)
ylabel('y (m)')
xlabel('x (m)')
```

Figura 5. Distribución de temperaturas en una placa plana para N=50 del ejemplo 3.



Entre más grande sea el N que se tome mejor es la aproximación. En la figura 6 se muestra la distribución de temperaturas empleando N=100.

Figura 6. Distribución de temperaturas en una placa plana para N=100 del ejemplo 3.



El valor de la temperatura en un punto específico, por ejemplo en el centro de la placa, puede obtenerse de la gráfica misma al posicionar el cursor sobre el punto de interés como se observa en las figuras 5 y 6, ó mediante los siguientes comandos en Matlab:

```
>>To=100;
a=10;
b=10;
N=50;
S=0;
y=5;
x=5;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
for n=1:2:2*N+1;
S=S+(1/n)*sin(n*pi*X/a).*sinh(n*pi*(b-Y)/a)/sinh(n*pi*b/a);
end
u=4*To/pi*S
u =   25.0000
```

Cambiando los valores de x y y en los comandos anteriores, puede encontrarse el valor de la temperatura en el punto que desee.

Si la función f(x) es una expresión un poco más compleja, por ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} 200*x/a, & o<x<\dfrac{a}{2} \\ 200-200*x/a, & \dfrac{a}{2}<x<a \end{cases}$$

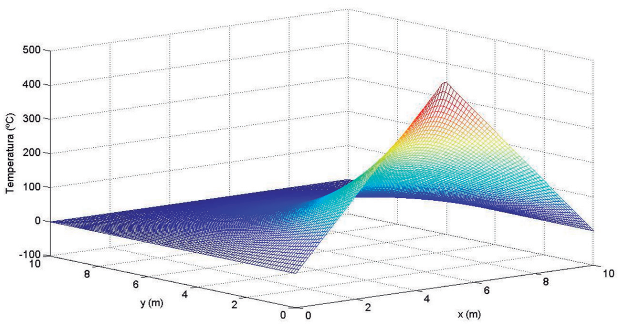
Los coeficientes de la serie de dicha función pueden obtenerse con ayuda computacional, ya que los cálculos son por demás extensos y algo tediosos. En Matlab puede procederse así:

```
>>syms x n a

I=int(200*x/a*sin(n*pi*x/a),x,0,a/2)+int((200-200*x/a)*sin(n*pi*x/a),x,a/2,a)

I  =-100*a*(-2*sin(1/2*n*pi)+n*pi*cos(1/2*n*pi))/n^2/pi^2+100*a*(n*pi*cos(1/2*n*pi)+2*sin(1/2*n*pi)-2*sin(n*pi))/n^2/pi^2
```

Y para obtener la grafica para la distribución de temperaturas que se muestra en la figura 7, se procede así:

```
>>a=10;
b=10;
N=50;
y=0:10/100:10;
x=0:10/100:10;
S=0;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
for n=1:1:N;
I=-100*a*(-2*sin(1/2*n*pi)+n*pi*cos(1/2*n*pi))/n^2/pi^2+100*a*(n*pi*cos(1/2*n*pi)+2*sin(1/2*n*pi)-2*sin(n*pi))/n^2/pi^2;

S=S+(I)*sin(n*pi*X/a).*sinh(n*pi*(b-Y)/a)/sinh(n*pi*b/a);
end
u=S;
mesh(X,Y,u)
ylabel('y (m)')
xlabel('x (m)')
```

Figura 7. Distribución de temperaturas en la una placa plana para el ejemplo 3.



Obsérvese que pueden hacerse variaciones como ubicar el punto no en a/2 si no en otro que se desee.

Los ejemplos expuestos muestran de manera clara que resulta ineficiente invertir tiempo y esfuerzo en muchos de los procesos y rutinas matemáticas abordados en los cursos regulares de pregrado, dado que un computador puede llevarlas a cabo en menos tiempo y con menor posibilidad de error. Esta premisa cobra cada día mayor fuerza tanto para estudiantes como para docentes, si se tiene en cuenta el acceso cada vez más generalizado a los equipos de cómputo y software especializado en matemática. Si bien el argumento anterior es fuerte, debe tenerse en cuenta que la matemática como ciencia incluye más que algoritmos repetitivos cuya ejecución debe memorizarse. Es mucho más importante una adecuada *comprensión de los conceptos matemáticos y aplicación de éstos a la solución de problemas concretos*, que memorizar algoritmos. Mediante el aprendizaje de las matemáticas, el estudiante adquiere una forma de pensamiento ordenada, lógica y argumentativa que le permite enfrentar de una manera más eficiente desafíos en su vida académica, profesional y personal. Además el modelamiento matemático exige formas de pensamiento complejo que permiten representar en el mundo matemático objetos y fenómenos ajenos a éste, e inferir propiedades y comportamientos de los mismos. Es en este tipo de problemas donde el pensamiento matemático que ha desarrollado el estudiante debe establecer diferencias con el poder computacional de la máquina. Identificar variables, plantear estrategias de solución, decidir qué conceptos matemáticos son aplicables y en qué situación, validar hipótesis, analizar soluciones y proponer nuevos problemas son sólo algunas de las actividades donde la mente humana aún es irremplazable.

Conclusiones

1. Los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática pueden y deben ser mediados utilizando sistemas cognitivos artificiales (SCA). Estas tecnologías ofrecen múltiples posibilidades para el logro de una correcta interiorización y aplicación de los conceptos matemáticos, en especial de aquellos que por su naturaleza involucran variadas formas de representación. El MCRMAT, que emerge de la matemática y de la educación matemática como ciencias y de la ciencia cognitiva, sirve como soporte teórico en la implementación y justificación de metodologías que hacen uso de los SCA para la enseñanza de esta disciplina.

2. Los aspectos computacionales repetitivos a los que se les da mayor importancia hoy día en la enseñanza de las matemáticas pueden implementarse a través de los sistemas cognitivos artificiales cuyo valor agregado, desde el punto de vista cognitivo, es la reorganización de conceptos matemáticos, y que desde el perspectiva simbólica, numérica y gráfica hacen posible diferentes representaciones de un mismo concepto matemático. Esto hace evidente que el MCRMAT y el uso de las nuevas tecnologías pueden usarse con éxito en la implementación de nuevas metodologías para la enseñanza de la matemática donde se privilegie la comprensión de conceptos y su aplicación a la solución de problemas.

3. Surge como un imperativo, una propuesta del estado para la educación en general y de la matemática en particular que sea coherente con el advenimiento de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación. Lo anterior incluye inversión en formación docente a todos los niveles y apoyo financiero para una inmersión temprana de los estudiantes en el uso de estas ayudas en sus procesos de aprendizaje, así como un rediseño de los planes curriculares y micro-curriculares de los diferentes programas de formación, en concordancia con el presente científico y tecnológico del que se dispone.

Referencias bibliográficas

Campos, D.R. & Isaza, José F.D. (2002). *Prolegómenos a los sistemas dinámicos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Chapra, Steven C. & Raymond P. Canale. (1999). *Métodos numéricos para ingenieros*. s.c.: McGraw-Hill.

Cleve, M. (2004). *Numerical Computing with Matlab*. Filadelfia: MathWorks, Inc.

DeLoache, J. (2005, July 25). Mindful of Symbols. *Scientific American Magazine*, 17, 30-35.

Edwards, C. Henry, Penny, David E. (2009). Ecuaciones diferenciales y problemas con calores en la frontera. En Cómputo y Modelado (4 Ed.). México: Prentice Hall.

Font, Vincent. (2001). *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en la didáctica de las matemáticas*. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, 1-35.

Friedenberg, J. & Gordon, S. (2005). *Cognitive Science: An Introduction to Study of Mind*. Thousand Oaks: Sage.

Goldin, G. & Stheingold, X. (2001). System of Representations and the Development of Mathematical Concepts. En A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.). The roles of representations in school mathematics (pp. 1- 23). Reston, VA: NCTM.

Gutiérrez, Á. R. (Ed.). (1999). *Didáctica de la Matemática*. Madrid: Editorial Síntesis.

Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics education. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Marchand, P. & Holland, T. (2003). *Graphics and GUIs with Matlab*. (3rd. Ed). Boca Ratón: Chapman & Hall/CRC.

Moreno, L. (2001). Cognición, mediación y tecnología. *Avances y Perspectivas*, 20, 65-68.

Murphy, G. (1960). *Ordinary Differential Equations and their Solutions*. New York: D. Van Nostrand Company.

Pérez, C. (2002). *Matlab y sus aplicaciones en las ciencias y la Ingeniería*. México: Prentice Hall.

Rico, L., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra M., Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: ICE/Horsori.

Shampine, L. F., Gladwell, I., Thompson, S. (2003). *Solving ODEs with Matlab*. Cambridge: Cambridge University Press.

Thagard, P. (2006). *La Mente. Introducción a las ciencias cognitvas*. Buenos Aires: Katz Editores.

The MathWorks. (1996). *Partial differential Toolbox for Use with Matlab*, User's Guide.

Toro, Luis Alberto C. (2007). *Matemática, Ingeniería y Computadora. Revista Educación en Ingeniería*. 2, 3, 55-65.

Toro, Luis Alberto C. (2010). *El modelo computacional-representacional de la matemática.* Revista Ánfora, 28, 151-158.

Villanueva, Y. A. (2004). *Tendencias actuales en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas y la utilización de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en la educación.* La Habana: Universidad de las Ciencias Informáticas.