CONICÓGRAFOS DEL SIGLO XVII
PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA DEL SIGLO XXI

17th century's conicographs for 21st century's Mathematical Education

FRANCISCO JAVIER MANZANO MOZO[1]

(IES DELICIAS, VALLADOLID, ESPAÑA)

Resumen

Tras la publicación de la Geometría de Descartes (1637), se produjo un gran interés en la creación de instrumentos que dibujasen cónicas mediante movimientos mecánicos. Tomando como base histórica este tipo de mecanismos, se propone una secuencia didáctica para Secundaria y Bachillerato mediante el uso de las TIC.

Palabras clave: Mecanismos articulados, Cónicas, Geometría dinámica, Aprendizaje Basado en Problemas, Didáctica

Abstract

Following the publication of Geometry by Descartes (1637), there was a great interest in creating tools able to draw conic sections through mechanical movements. Bearing in mind this type of mechanisms on such historical basis, as follows is shown a didactic sequence for K12 students by using ICT tools.

Keywords: Linkages, conic, Dinamic Geometry, PBL, Didactic.

Educación matemática para el siglo XXI

Tomando las palabras de Conrad Wolfram en la charla TED "Stop teaching calculating, start teaching Math" [15]:

> "Hoy en día tenemos un problema con la formación en Matemáticas, especialmente en las escuelas. Básicamente, nadie está muy contento. Los que la aprenden creen que son algo aislado, difícil y sin interés. Los que tratan de aplicarla, creen que no saben lo suficiente. Los gobiernos se dan cuenta que es algo bueno para la Economía pero no saben cómo

[1] I.E.S. Delicias. Pº Juan Carlos I, 20, 47013 Valladolid. E-mail: jmanzanomozo@gmail.com

adecuarla. Y los profesores también están frustrados. Sin embargo, las Matemáticas son ahora aún más importantes para el mundo que en cualquier otro momento de la historia".

Por otro lado, la metodología tradicional de trabajo en el aula basada en un método expositivo por parte del docente y pasivo por parte del discente, ha demostrado que ya no funciona en la escuela del siglo XXI. Ante una generación de nativos digitales con acceso inmediato a una ingente cantidad de información gracias a sus teléfonos móviles con conexión a Internet, el enfoque metodológico que se debe dar en el aula, debe propiciar la participación del alumnado en su propio proceso de aprendizaje creando escenarios de aprendizaje enriquecedores y estableciendo dinámicas y flujos de conexión entre los aprendices capaces de promover el intercambio de información y el trabajo cooperativo. Además, estos escenarios de aprendizaje deben estar caracterizados por su flexibilidad, es decir, por la capacidad de poderse adaptar a las necesidades específicas de cada alumno, a la tan famosa atención a la diversidad.

Como metodología de trabajo con el alumnado, el Aprendizaje por Proyectos (PBL de sus siglas en inglés Project Based Learning) o el proceso de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en particular, van a ser la base metodológica de aplicación al aula. En ambos casos, constituyen un método de trabajo en el que los alumnos participan activamente en la adquisición de su conocimiento. El método se orienta a la resolución de tareas o problemas que son seleccionados de la realidad o bien diseñados para lograr el aprendizaje de ciertos objetivos de conocimiento.

El origen de esta forma de trabajo surge en los años 60 en la Universidad de McMaster (Canadá) cuando un grupo de educadores médicos se replanteó la forma de enseñar Medicina tratando de conseguir una mejor preparación de sus profesionales planteando que, además de adquirir conocimientos, tenían que adquirir también una serie de competencias y habilidades básicas para su trabajo [14]. De este modo, la Facultad de Ciencias de la Salud de la Universidad de McMaster estableció una propuesta metodológica que fue implementada a lo largo de los tres años de su plan de estudios y que es conocida actualmente como Aprendizaje Basado en Problemas. Esta mentalidad, dada su validez académica, comienza a expandirse muy pronto a otros campos profesionales tales como la ingeniería, la gestión empresarial o las ciencias jurídicas. A Europa llega a través de la Universidad de Maastricht (Holanda) que se crea en 1974 y organiza todos sus estudios con esta metodología [11]. Por último, la Universidad de Aalborg (Dinamarca) crea una variante, el Aprendizaje Basado en Proyectos, con la cual organizan una gran parte de sus enseñanzas.

En pleno siglo XXI, no podemos obviar la importancia del uso racional de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) en el aula. En el caso que nos ocupa, se propone la utilización de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD en adelante), es decir, un programa informático que permite la creación y manipulación de construcciones geométricas [3].

Una característica muy importante de este tipo de programas es que son capaces de construir modelos geométricos a partir de objetos tales como puntos, rectas, círculos, ... así como de las dependencias que pueden relacionar unos objetos con otros. El usuario puede manipular el modelo geométrico moviendo algunos elementos y el SGD automáticamente realizará los cómputos para mover los elementos dependientes manteniendo la construcción. Esto es lo que se conoce como Geometría Dinámica. A diferencia de otros programas de creación de imágenes, un dibujo en un SGD es una visualización de un modelo geométrico y viene provisto de una interfaz visual para su manipulación.

El SGD propuesto para la realización de las actividades es Cinderella.2. Dos características principales le diferencian de otros SGD y nos han llevado a su elección para el desarrollo del presente trabajo. El primero es que las construcciones en Cinderella.2 están realizadas en un espacio proyectivo de números complejos lo que garantiza la consistencia de las construcciones incluso en posiciones degeneradas. La segunda es que Cinderella.2 desarrolla un movimiento continuo de los puntos evitando saltos en las construcciones [13].

Introducción histórica

Durante el siglo XVII se produjo un cambio de rumbo desde la orientación geométrica clásica griega vigente en el Renacimiento hacia una visión filosófica mucho más pragmática. En esta época, una clase de Geometría trataría sobre fortificaciones, máquinas de asedio, canales, sistemas de riego o mecanismos elevadores. A principios de este siglo era posible representar una gran variedad de conceptos aritméticos y relaciones gracias al recién nacido lenguaje algebraico. Cuestiones acerca de formas apropiadas de representación dominaron la actividad intelectual de este siglo, no solo en Ciencia y Matemáticas sino también en religión, política, leyes y discusiones filosóficas.

Al respecto, una figura prevalece sobre las demás: René Descartes (1596 - 1650). *La Géométrie* fue originalmente publicado como uno de los tres apéndices a su obra filosófica *Le Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences* (El discurso del método para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias). Los otros dos apéndices eran *La Dioptrique* y *Les météores*.

Hoy en día, geometría cartesiana es sinónimo de geometría analítica pero la finalidad principal que perseguía Descartes estaba muy lejos de la que persiguen los libros de texto modernos [5]. La primera frase de la Geometría así lo indica:

> Cualquier problema de Geometría puede reducirse fácilmente a términos tales que el conocimiento de las longitudes de determinados segmentos es suficiente para su construcción [8].

Así, a pesar de que Descartes es señalado como el padre de la geometría analítica, no hay en la *Geometría* gráfica de ecuación alguna. Las curvas eran construidas por acciones geométricas la mayor parte de las cuales eran representadas mediante instrumentos mecánicos. Una vez dibujadas las curvas, Descartes introducía el sistema de coordenadas para analizar el proceso de construcción de la curva y obtener una ecuación que representara dicha curva. Así, las ecuaciones no creaban las curvas: éstas generaban ecuaciones [9].

La *Geometría* no habla de construcciones estáticas ni de pruebas axiomáticas sino de movimientos mecánicos y su posible representación mediante ecuaciones algebraicas. Se citan muchos problemas clásicos transformados en problemas de *locus* (trayectorias producidas por movimientos continuos) gracias al uso de una gran variedad de movimientos y mecanismos que iban más allá de las construcciones clásicas con regla y compás.

Descartes, tras leer a Pappus, aprendió que los antiguos geómetras griegos consideraron tres clases de problemas en función de la construcción usada para su resolución: las construcciones con regla y compás se llamaron *planas* mientras que las que incluían secciones cónicas o construcción de dos medias proporcionales se llamaron *sólidas*. Las construcciones incluidas en estas dos clases fueron consideradas puramentes geométricas mientras que las de la tercera, que incluía curvas que sólo se podían construir con algún ingenio mecánico, fueron excluidas de la Geometría. Descartes pensó en construir una Geometría que incluyera todas esas curvas construidas mediante mecanismos articulados, es decir, instrumentos hechos con barras articuladas [8]. Estas barras se articulan unas con otras mediante pivotes que pueden ser fijos o deslizantes. Incluso, Descartes supuso que esta clase de curvas constituía la de las curvas algebraicas pero no lo demostró.

Así, llegamos a lo que, al contrario de los geómetras griegos, nos interesa en este artículo: los mecanismos articulados capaces de trazar curvas. En la Geometría, Descartes presenta dos mecanismos: el mesolabio y un hiperbolófrafo.

El mesolabio (figura 1, izquierda) consta de dos barras YZ e YX que se articulan en Y. El punto B está fijo pero todos los demás son móviles manteniéndose únicamente la perpendicularidad de las barras transversales bien a YZ bien a YX. Este mecanismo permite calcular raíces cúbicas por lo que se puede usar para resolver los problemas clásicos de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo [1]. Además, dibuja curvas algebraicas de distinto grado: el punto B traza una circunferencia, el punto D una cuártica, el punto F traza una curva de grado 8 y el punto H una curva de grado 12 [7].

El segundo de los mecanismos que aparece en la Geometria es un hiperbolófrafo (figura 1, derecha) descrito por el propio Descartes:

> "Sea la curva EC descrita por la intersección de la barra GL con la figura rectilínea NKL cuyo lado KN es generado indefinidamente en dirección a C y que, movido en el mismo plano de manera que su diámetro KL coincide siempre con parte de la línea AB, proporciona a la barra GL un movimiento giratorio alrededor de G (la barra está unida a la figura NKL en L). Si quiero encontrar a que clase pertenece esta curva, elijo una línea recta, como AB, y en ella elijo un punto A por el que empezar la investigación. Digo 'escojo esto y esto' porque somos libres de elegir los que queramos para hacer la ecuación los más corta y simple posible y no importa qué recta escoja en vez de la AB ya que la curva será siempre de la misma clase como es fácilmente demostrable".

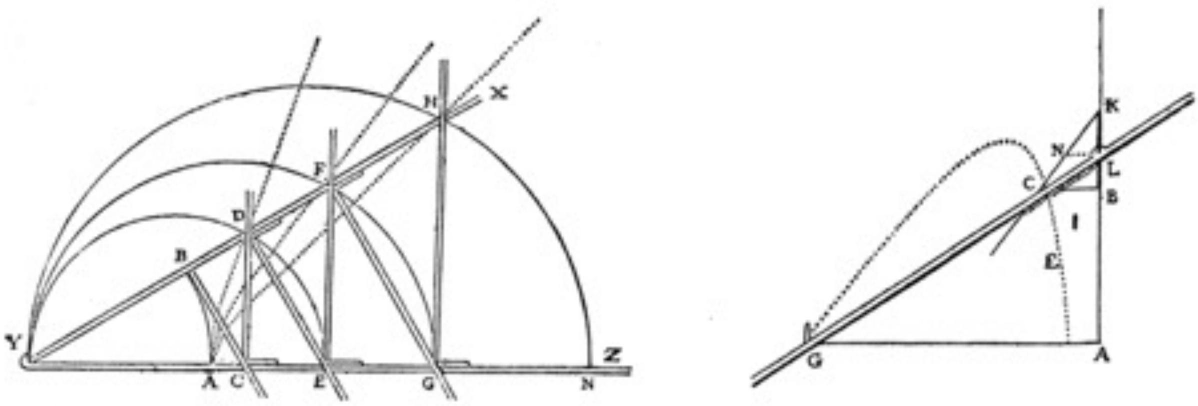

Figura 1. Mesolabio e hiperbolófrafo de Descartes

Así, Descartes asegura que el grado de la ecuación que describe la curva es independiente del sistema de coordenadas elegido concluyendo que era una hipérbola: *comme en effect elle n’est autre qu’une Hyperbole*.

Vemos entonces que la curvas se generan a partir de las trayectorias (*loci*) de mecanismos articulados mediante movimientos mecánicos continuos. Este método es conocido como generación orgánica de curvas [10].

Conicógrafos del siglo XVII

Destaca en este aspecto la figura del holandés Franz van Schooten el joven (1615 - 1668) el cual en su tratado *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus* publicado en 1675, presenta seis mecanismos articulados (figura 2) para dibujar cónicas, es decir, *conicógrafos*: mecanismos con unos ajustes apropiados capaz de trazar secciones cónicas [2]. Cabe destacar que Van Schooten tradujo al latín y comentó la *Geometría* de Descartes (publicada inicialmente en francés) dándola a conocer a toda la comunidad matemática.

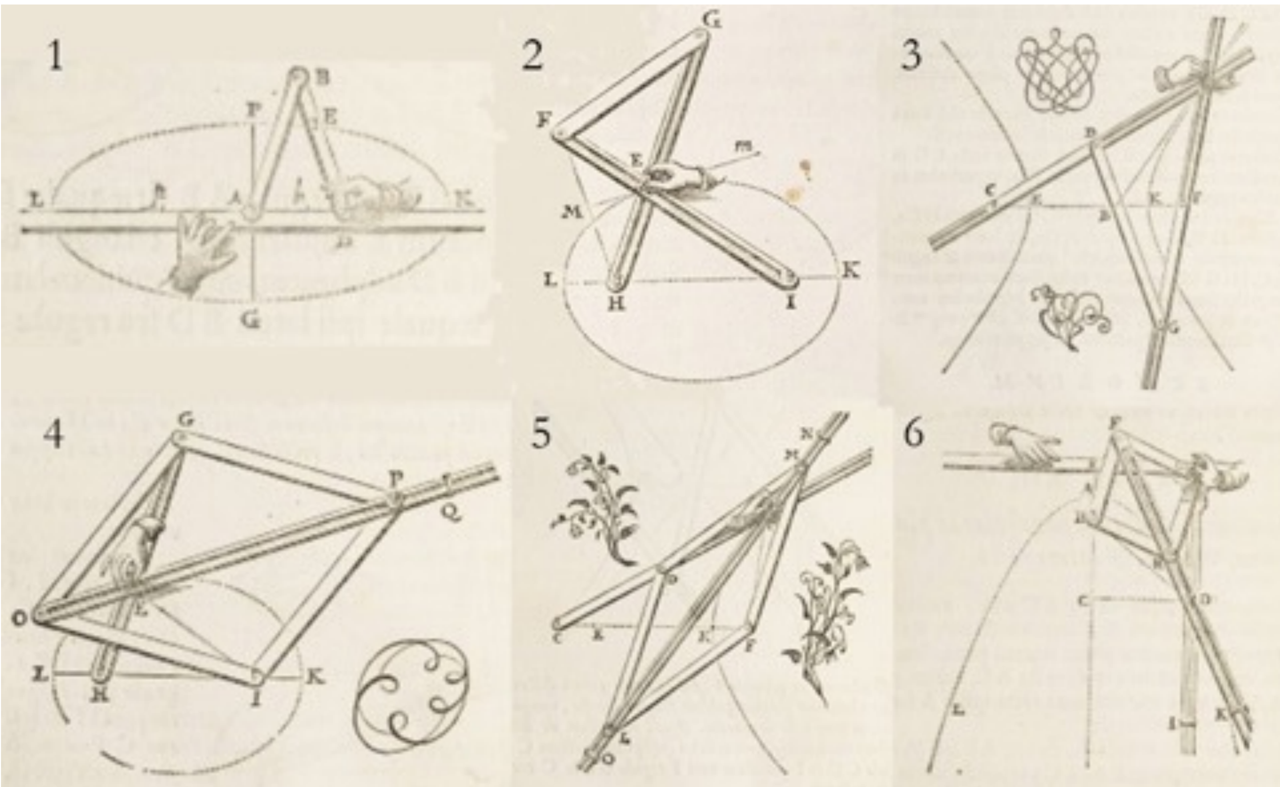

Figura 2. Conicógrafos de Franz van Schooten

El primer mecanismo (figura 2, 1) es un elipsógrafo. Si tomamos dos barras de la misma longitud AB y BD articuladas en B y sujetas por A a una barra fija por la que se desliza D, cualquier punto E de la barra BD, diferente de sus extremos, describe una elipse.

El segundo mecanismo (figura 2, 2) es otro elipsógrafo compuesto por un contraparalelogramo articulado formado por tres barras HG, IF y FG cumpliéndose que las barras HG y IF son de igual longitud y la distancia entre los vértices H e I es igual a la medida de la barra F G. Los vértices H e I son fijos. Así, el punto de intersección E de las barras HG e IF traza una elipse de focos H e I cuando la barra HG gira con centro H.

El tercer mecanismo (figura 2, 3) es un hiperbológrafo basado en la definición habitual de hipérbola como lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos C y F son fijos. La distancia CF coincide con DG y CD = FG. Si X es el punto de intersección de las barras CD y GF, tenemos que XP = XB por lo que XA · XB = XA· XP = CD y el punto X traza una hipérbola.

Los otros tres mecanismos que trazan cónicas descritos por Van Schooten son un elipsógrafo, un hiperbológrafo y un parabológrafo (figura 2: 4, 5 y 6 respectivamente). A simple vista, se observa que los tres mecanismos constan de un elemento común, un rombo articulado. Esto es debido a que el funcionamiento de los tres mecanismos se basa en el siguiente resultado teórico [12] (ver figura 3):

> Si un vértice B de un rombo articulado se mueve en una circunferencia de centro F' mientras que el vértice opuesto está fijo, la trayectoria del punto de intersección entre la diagonal de los otros dos vértices D e I del rombo y la recta F'B es una cónica.

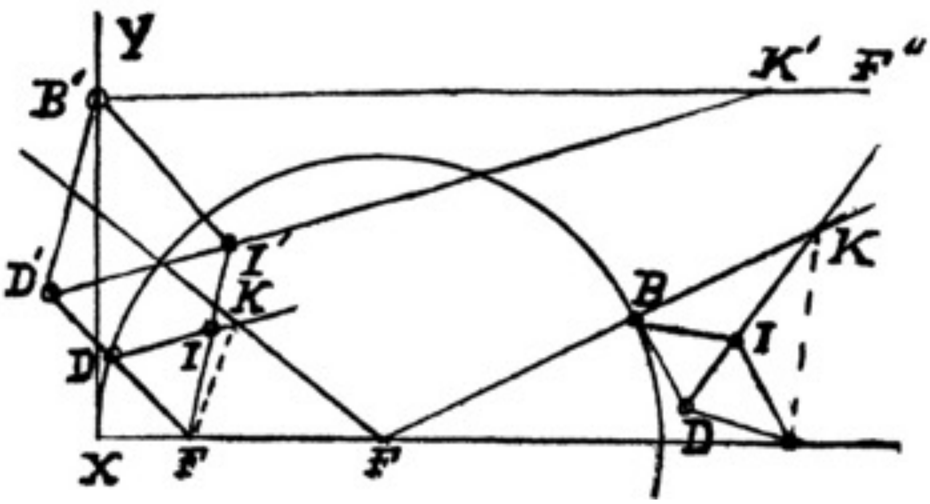

Figura 3. Rombo articulado para trazar secciones cónicas mediante un movimiento continuo

Basándose en este resultado, Van Schooten dispone las posiciones y longitudes de las barras de forma que cada mecanismo traza una de las tres secciones cónicas.

Secuencia didáctica

La presente secuencia didáctica está dirigida a alumnado de Secundaria o Bachillerato de cara al estudio de las cónicas con los siguientes objetivos:

- Conocer las cónicas y los elementos de las cónicas
- Consultar documentación original del siglo XVII e interpretar la información contenida en ella
- Construir digitalmente los conicógrafos de Van Schooten
- Conocer las ecuaciones algebraicas de las cónicas
- Relacionar estas ecuaciones con los conicógrafos que las generan

Actividad 1: las cónicas

Cinderella.2 tiene cuatro herramientas (Figura 4) mediante las cuales es posible generar cónicas dados algunos de sus elementos: traza la cónica que pasa por cinco puntos, traza una elipse dados sus focos y un punto, traza una hipérbola dados sus focos y un punto y, por último, traza una parábola dado el foco y la directriz.

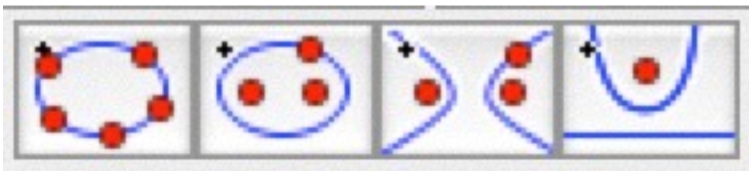

Figura 4. Herramientas de Cinderella.2 para trazar cónicas.

La actividad va a consistir en utilizar esas herramientas para:

- Trazar una elipse dados sus focos y un punto. Después, generar los ejes de la elipse. Con la herramienta medir distancia, hallar las distancias del punto de la elipse a los focos. Definir otro punto en la elipse, hallar las distancias de este punto a los focos y comprobar que la suma de distancias de un punto de la elipse a los focos es constante.
- Trazar una hipérbola dados sus focos y un punto. Después, generar los ejes de la hipérbola y las asíntotas. Con la herramienta medir distancia, hallar las distancias

del punto de la hipérbola a los focos. Definir otro punto en la hipérbola, hallar las distancias de este punto a los focos y comprobar que la diferencia de distancias de un punto de la hipérbola a los focos es constante.

- Traza una parábola dado el foco y la directriz. Después, generar el eje de la parábola. Definir un punto en la parábola y con la herramienta medir distancia, comprobar que coinciden las distancias al foco y a la directriz.

Actividad 2: generación digital de conicógrafos

En la documentación de la web de Cinderella.2, se muestra cómo construir un mecanismo articulado de tres barras y el locus generado por la trayectoria de un punto: http://doc.cinderella.de/tiki-index.php?page=Three-Bar+Linkage.

Se propone a los alumnos que, siguiendo esas instrucciones y tomando como base el libro original de Franz von Schooten *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus* –disponible en formato digital en Google libros o en http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=/mpiwg/online/permanent/library/EWN480XH– construyan en Cinderella.2 los seis conicógrafos de Van Schooten. En la figura 5 se puede ver el hiperbológrafo 3 de la Figura 2 generado en Cinderella.2 en el que se ha modificado el color y grosor de los segmentos que son azules por defecto. Además, se ha añadido un botón de animación a partir del movimiento circular del punto D con centro C y trazado el locus o trayectoria del punto X que es el que traza la hipérbola.

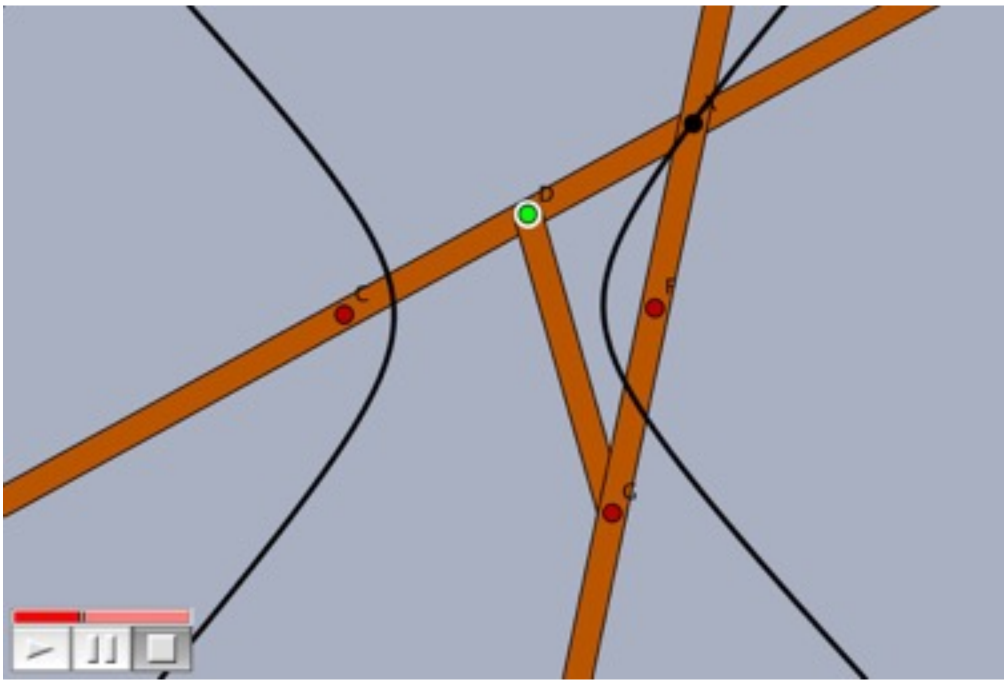

Figura 5. Hiperbológrafo de Van Schooten generado en Cinderella.2

Actividad 3: relacionando curvas y ecuaciones

Para relacionar las curvas generadas mediante los mecanismos articulados con sus ecuaciones algebraicas, el desarrollo de esta actividad será el siguiente:

- Con una calculadora gráfica como Desmos (desmos.com), al alumno debe generar mediante expresiones algebraicas dos elipses, dos parábolas y dos hipérbolas y representar sus elementos: focos y, en su caso, directriz. De cada una de estas seis cónicas, se debe generar una imagen. En la figura 6 se puede ver un ejemplo.

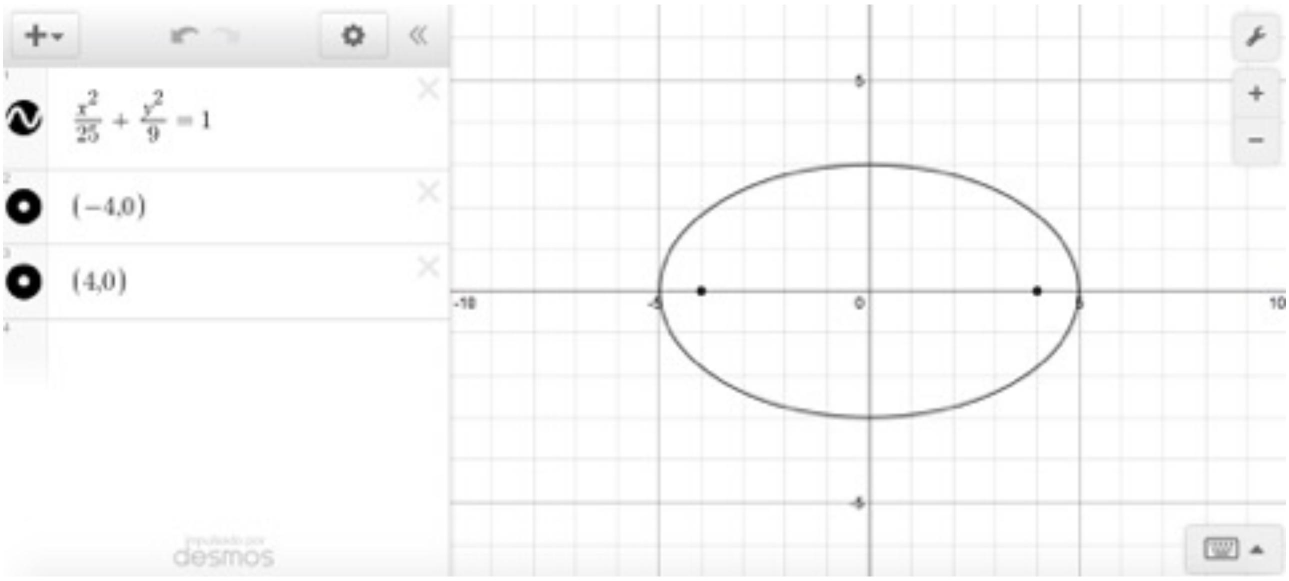

Figura 6. Elipse con sus focos generada algebraicamente con Desmos

- Con Cinderella.2, los alumnos deben generar los conicógrafos con barras basados en rombos articulados como en la actividad anterior pero esta vez de forma que se pueda cambiar la medida de los elementos. En la figura 7 puede verse el hiperbológrafo de Van Schooten en el que la hipérbola se genera con el trazo del punto O al mover cuando el punto D gira con centro C. En esta construcción, se pueden mover los puntos C y F. Se pueden ver unos segmentos AB, GE y HK a la izquierda. La medida del segmento Ab coincide con la del segmento CF. La del segmento GE coincide con la del segmento CD y la medida de HK coincide con las medidas de los segmentos MF, MD, LF y LD. Así variando estas medidas y la posición de los puntos C y F, se puede trazar cualquier hipérbola.
- Ahora, en Cinderella.2 se puede seleccionar una imagen como fondo de la construcción. De este modo, para la construcción del elipsógrafo, el alumno debe añadir

la imagen de una de las dos elipses generada en Desmos. Por último, se debe ajustar la disposición y medidas del elipsógrafo para que la curva que genere coincida con la gráfica relacionando los elementos del mecanismo con los elementos de la cónica.

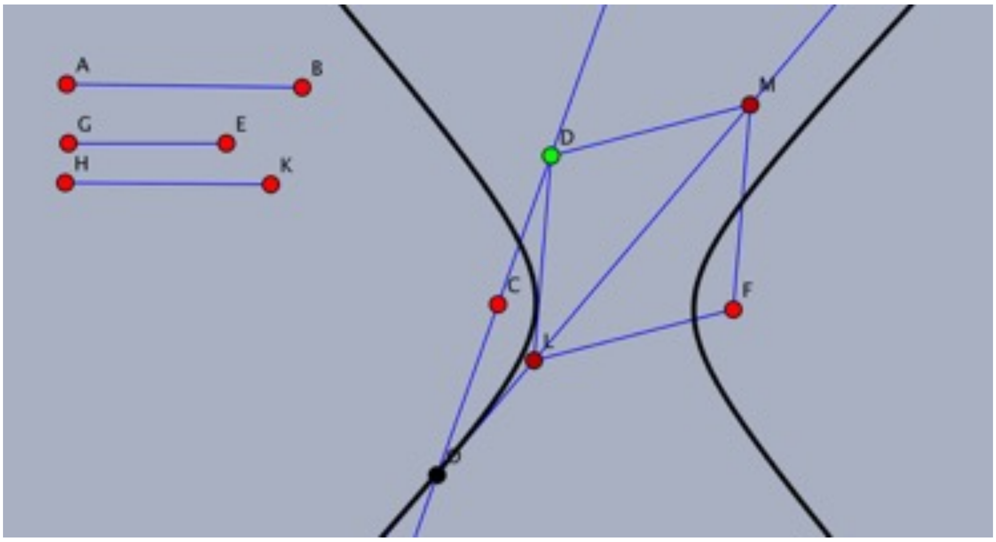

Figura 7. Hiperbolígrafo de Van Schooten generado con Cinderella. Al cambiar las medidas de los segmentos AB, GE y HK, varían las medidas de las barras del hiperbológrafo.

- En la figura 8 puede verse el elipsógrafo con la imagen de una elipse y en la figura 9 el mismo mecanismo ya ajustado a la elipse.

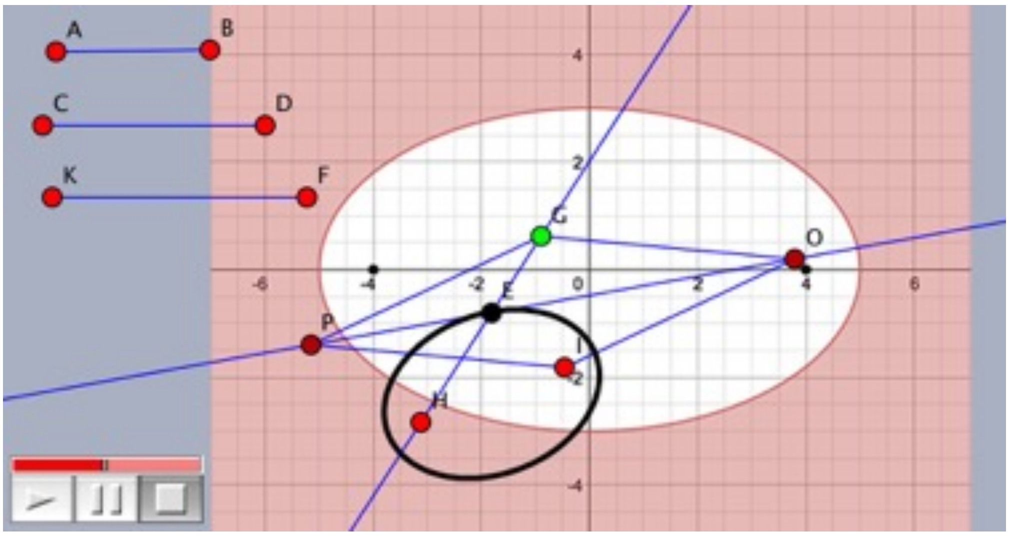

Figura 8. Elipsógrafo de Van Schooten basado en un rombo articulado en el que se pueden cambiar las medidas y posición y gráfica de una elipse generada algebraicamente.

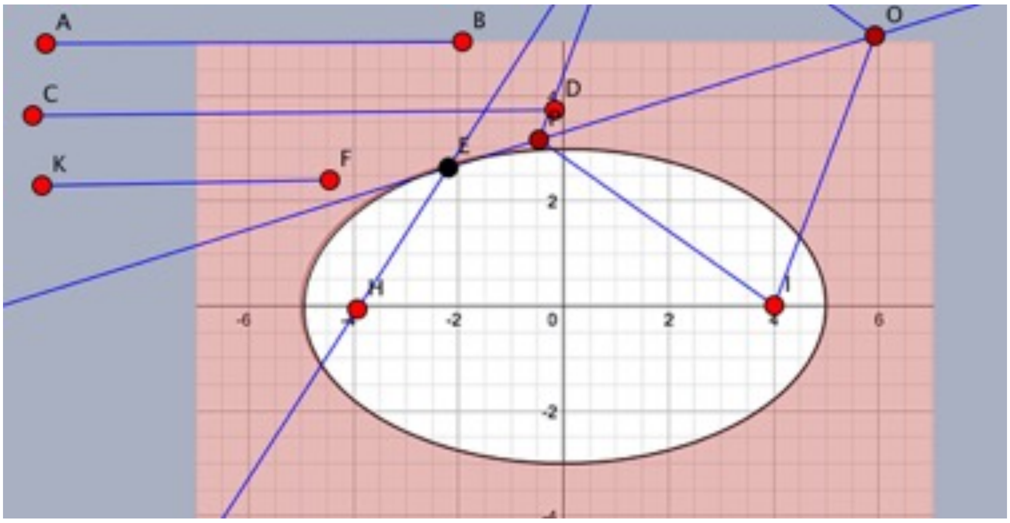

Figura 9. Elipsógrafo de Van Schooten ajustado para trazar una elipse de ecuación determinada.

Conclusiones

Los conicógrafos como mecanismos articulados pueden ser un elemento muy efectivo a la hora de implementar escenarios para la experimentación activa en el aula de Matemáticas con alumnos de Secundaria y Bachillerato. Mediante la investigación con actividades y materiales como los aquí presentados y con la guía del profesor, los alumnos pueden generar nuevos conocimientos matemáticos siendo protagonistas en la obtención de resultados y en la construcción de pruebas además de poder asimilar distintas estrategias para la resolución de tareas propuestas fomentando la creatividad en la búsqueda de soluciones o demostraciones.

Gracias a los ordenadores y a los Sistemas de Geometría Dinámica, se pueden realizar de una forma muy sencilla y económica construcciones interactivas de distintos sistemas articulados así como de las curvas generadas además de estudiar variaciones a una misma construcción con un coste mínimo, algo impensable no mucho tiempo atrás.

Entender el funcionamiento de este tipo de mecanismos con la ayuda de la Geometría Dinámica en un entorno de aprendizaje por descubrimiento, supone una motivación para el alumnado con el objetivo de llegar a demostraciones matemáticas rigurosas a la vez que muestra las relaciones entre el Álgebra y la Geometría.

Incidiendo en este sentido, me permito citar de la introducción del libro *Matemáquinas. La matemática que hay en la tecnologí*a, de Brian Bolt [4], la frase siguiente:

> "La LOGSE, en España, que aspira a introducir en los curricula enfoques más inspirados y a establecer criterios de evaluación menos rutinarios, propicia la ocasión de revisar nues-

tros cursos y establecer más amplias conexiones interdisciplinares, y en particular, para tender puentes entre las matemáticas y la tecnología".

Aportamos esto como opinión autorizada sobre la necesidad de introducir enfoques interdisciplinares, como el que nos ocupa en el presente artículo.

Resulta, asimismo, ilustrador del punto de vista manifestado anteriormente las siguientes frases extraídas del libro *How round is your circle? Where Engineering and Mathematics Meet* [6]:

"The research mathematician, concerned with purely abstract realms, and the mechanical engineer, who grapples with the practical difficulties of the physical world, are unlikely companions […] We encourage them [mathematicians] to leave their confortable world of fictitious thin lines, perfect circles and exact numbers, at least occasionally. […] Furthermore, in order to even perform apparently `trivial´ tasks, the engineer owes a lot to mathematics".

Las propuestas aquí presentadas están orientadas en este sentido.

Y, para terminar, unas palabras de Ivan Ivanovich Artobolevski, (1905-1977), ingeniero mecánico y científico ruso y primer presidente de la Federación Internacional de Teoría de Máquinas y Mecanismos, relacionadas con la Educación:

"*Most important in the education of scientific youth is the development of independence and creative idea. To learn and learn creativity it is possible. Most important for a creative person is his skill to observe a natural phenomenon, to know the mechanism of processes, occurring in it and to transfer this knowledge to the world of techniques*".

Referencias

[1] Aroca, J. M. *Sistemas articulados: teorema de Kempe*. Revista del Seminario Iberoamericano de Matemáticas, 4 Fascículo II, 2013.

[2] Artobolevskii, I.I. *Mechanisms for the generation of plane curves*. Pergamon. 1964.

[3] Bantchev, B. *A brief tour to dynamic geometry software*. 2010.

[4] Bolt, B. *Mathematics meets Technology*. Cambridge University Press. 1991. Edición en castellano de título "Matemáquinas. La matemática que hay en la tecnología", de Ed. Labor. 1992. Pág. VIII.

[5] Boyer, C.B. y Pérez, M.M. *Historia de la matemática.* Alianza Editorial. 1999.

[6] Bryant, J. y Sangwin, C. *"How round is your circle? Where Engineering and Mathematics Meet"*. Princeton University Press. 2008. Pág. Xiii.

[7] Dennis, D. *Historical perspectives for the reform of Mathematics curriculum: geometric curve drawing devices and their role in the transition to an algebraic description of functions*. Cornell University, May, 1995.

[8] Descartes, R. *Geometry*. Dover Publications, 1954.

[9] Lenoir, *T.. Descartes and the geometrization of thought: The methodological background of Descartes "Géométrie"*. Historia Mathematica, 6(4):355 – 379, 1979.

[10] Maclaurin, C. *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis*. 1720.

[11] Moust, J. The Problem-Based Education Approach at the Maastricht Law School. The Law Teacher. The International Journal of Legal Education, 1998: 32 (1), 5-37.

[12] Quinn, J. J. *A linkage for describing the conic sections by continuous motion*. The American Mathematical Monthly: Devoted to the Interests of Collegiate Mathematics, 11-12, 1904.

[13] Richter-Gebert J. y Kortenkamp, U.H. *The Cinderella.2 Manual: Working with The Interactive Geometry Software. Springer*, 2012.

[14] Spaulding. W. B. *Revitalizing medical education. McMaster Medical School. The early years 1965-1974*. Hamilton: B. C. Decker Inc. 1991: 1-235.

[15] Wolfram, C. *Stop teaching calculating, start teaching math*. http://www.computerbasedmath.org/resources/ reforming-math-curriculum-with-computers.html, 2010.