

Lobatchevski et la diffusion des Geometries non-Euclidiennes

RENÉ TATON

Centre Alexandre Koyré, Paris

La fondation des géométries non euclidiennes est de toute évidence l'un des apports majeurs de la recherche géométrique du XIXe siècle. Préparée par les efforts de nombreux précurseurs dont ceux de Girolamo Saccheri (1733) et de Jean-Henri Lambert (1766, publication en 1786), cette création se situe à une époque où les cadres de la géométrie se renouvellent de toute part, préluant à la grande synthèse de Felix Klein (1872) et à des remises en cause encore plus profondes.

Annoncées par des tentatives quelque peu incertaines, telles que celles de F. K. Schweikart (1807) et de F. A. Taurinus (1825-1826), la création de la géométrie non euclidienne dite aujourd'hui hyperbolique ou labotchevskienne a été réalisée presque au même moment, et sous des formes voisines, par le grand mathématicien allemand de Göttingen, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), par un professeur de l'université russe de Kazan, Nikolai Lobatchevski (1792-1856), et par un officier de l'armée austro-hongroise en garnison en Translyvanie, János Bolyai (1802-1860). Si les premières interventions de Gauss dans ce domaine sont manifestement antérieures à celles de ses deux rivaux, en revanche elles n'apparaissent que dans quelques passages de sa correspondance et, ne s'étant concrétisées par aucune publication, n'eurent qu'une influence limitée. Quant à Lobatchevski et à Bolyai, leurs premières réflexions sur le postulat des parallèles semblent être intervenues de façon quasi simultanée, vers 1823. Mais, après une tentative infructueuse en 1826, les premiers articles consacrés par Lobatchevski à la géométrie non euclidienne parurent en 1829 dans une revue de Kazan à faible diffusion, tandis que J. Bolyai ne présenta ses idées que trois ans plus tard, en 1832, dans un «Appendix» au premier volume d'un traité de mathématiques en latin publié à Maros-

vásárhely par son père F. Bolyai. Certains auteurs ont pensé que cette quasi-simultanéité dans la découverte d'une branche nouvelle de la géométrie résultait d'une influence exercée par Gauss sur ses deux rivaux, mais il semble qu'il y eut indépendance totale de ces trois créateurs dans la genèse de la géométrie non euclidienne.

Pour approfondir les motivations des acteurs de cette révolution dans les principes de la géométrie, et les raisons de l'incompréhension qu'ils rencontrèrent, il importe de réunir une documentation aussi complète que possible, qu'il s'agisse de publications, de manuscrits, de correspondances ou de témoignages divers. C'est à une telle tâche concernant Lobatchevski que se sont attachés depuis plus d'un siècle de nombreux historiens russes ou soviétiques, faisant ainsi oublier la tenace hostilité que le grand géomètre rencontra dans son pays de son vivant. Si la plupart de leurs travaux sont en langue russe, un nouvel ouvrage récemment publié en traduction française permet enfin d'avoir indirectement accès aux travaux des historiens soviétiques, apportant ainsi d'importants compléments à notre connaissance de la vie, de la personnalité et de l'oeuvre de Lobatchevski (1).

Il s'agit en effet d'une traduction de l'importante étude consacrée à la vie et à l'oeuvre de l'illustre géomètre par Véniamin Kagan (1944; 2e éd. 1948), dont la mise à jour réalisée par le Pr Boris Laptiev, directeur du Centre de recherches de mathématiques et de mécanique de l'université de Kazan, tient compte aussi bien de différents éléments nouveaux que de l'évolution récente de la géométrie non euclidienne. Ce livre surclasse les autres biographies de Lobatchevski par la qualité et la richesse de sa documentation, par l'importance accordée à la peinture de l'époque, par l'analyse attentive des diverses activités du grand géomètre, par l'exposé, à la fois accessible et précis, qui est fait de la préhistoire, de la naissance et du développement de la géométrie non euclidienne et par l'importance de sa partie bibliographique (2). Le corps de l'ouvrage est précédé d'une

(1) V. KAGAN, *Lobatchevski*, Moscou, Editions Mir, 1974, 13 × 20 cm., 411 p.

(2) Une première bibliographie concernant les fondements de la géométrie, la vie et l'oeuvre de L... a été établie par G. B. Halsted (en 1878-1879); une bibliographie analogue, beaucoup plus complète, a été publiée à Moscou en 1952 par V. Guérassimova et complétée en 1956 par Y. M. Gayduk. Quant à la géométrie non euclidienne elle-même, sa bibliographie a été établie par D. M. Y. Sommerville (London, 1911; 2e éd., New York, 1970) et complétée en 1942 par H. S. M. Coxeter (Toronto, 1942; 3e éd., 1957). Ces ouvrages sont cités au début de la partie bibliographique de l'ouvrage de Kagan (p. 393), cependant qu'une cinquantaine d'études importantes concernant la biographie et l'époque de Lobatchevski le sont aux p. 397-400 de cet ouvrage, précédant les références concernant les *Eléments* d'Euclide (p. 400-401), la préhistoire de la géométrie non euclidienne (p. 401-404), un choix d'exposés de cette géométrie (p. 404-406) et une bibliographie sélective d'études ultérieures concernant l'évolution de la géométrie lobatchevskienne, les fondements de la géométrie et les applications de la géométrie non euclidienne à la mécanique, à la physique et à la cosmologie (p. 406-411).

brève chronologie de la vie et de la carrière de Lobatchevski et d'une introduction situant les progrès successifs de la recherche documentaire concernant sa biographie. L'ouvrage lui-même se subdivise en six grandes parties: 1. Années d'enfance et d'études; 2. Avant la géométrie non euclidienne; 3. Création de la géométrie non euclidienne; 4. L... dans la fleur de l'âge; 5. Son activité administrative et publique; 6. L... au déclin de sa vie; 6. La géométrie non euclidienne avant et après L...

La lecture de cet ouvrage révèle à quel point la vie de L... est intimement liée aux cinquante premières années de l'université de Kazan et montre comment l'âpre et pénible effort qu'il mena pendant trente années, de 1826 à sa mort en 1856, pour tenter de faire reconnaître la validité et l'importance de son oeuvre géométrique n'est que l'un des multiples aspects de son activité de mathématicien, de professeur, d'administrateur et de citoyen.

Né dans une famille modeste de Nijni-Novgorod (l'actuelle Gorki) le 20 novembre (1er décembre) 1792, Nikolai Ivanovitch L... entra au Gymnasium de Kazan en 1802 et fut admis en 1807 à la nouvelle université créée en 1804 dans cette ville, alors principale métropole de Russie orientale. Reçu à la maîtrise des sciences physiques et mathématiques en août 1811, il poursuivit sa formation sous la direction du Mathématicien M. Bartels et de l'astronome I. Littrow. Nommé professeur adjoint en 1814, puis professeur suppléant en 1816 et professeur titulaire en 1822, L... fit ainsi toute sa carrière à l'université de Kazan, où, jusqu'en 1846, il eut successivement à enseigner les branches les plus diverses des mathématiques pures et appliquées, du calcul infinitésimal et de la géométrie à l'hydrodynamique et à l'astronomie (3). Parallèlement, il exerça d'importantes responsabilités administratives dans le cadre de l'Université. Déchargé de ses cours en 1846, il fut nommé adjoint au recteur de l'Académie de Kazan, poste qu'il abandonna pour raison de santé deux mois avant sa mort. En dehors de deux articles généraux consacrés à des problèmes d'éducation, son oeuvre comporte 13 publications scientifiques diverses d'algèbre, analyse mathématique, calcul des probabilités, mécanique ou astronomie (dont un manuel d'algèbre), 6 mémoires concernant la géométrie non euclidienne ainsi qu'un manuel de géométrie rédigé en 1823 et resté inédit jusqu'en 1909 et un premier mémoire de géométrie non euclidienne dont le texte est perdu.

Rappelons que les *Œuvres* de L... ont été l'objet de deux éditions, l'une en deux volumes, consacrée aux seuls travaux géométriques (Kazan, 1883-1886) et l'autre, beaucoup plus complète, en cinq volumes (*Polnoe*

(3) Dans sa partie biographique, l'ouvrage de V. Kagan évoque l'évolution, au cours de cette période, du climat politique à l'université de Kazan et dans l'administration universitaire russe. Pour le climat du début de la carrière de L..., on trouvera d'utiles compléments dans un ouvrage récemment réédité d'Alexandre Koyré, *La philosophie et le problème national en Russie au début du XIXe siècle*, Paris, Gallimard, 1976 («Idées»).

sobranie sochinenii, Moscou 1946-1951) (4), sans compter plusieurs éditions partielles consacrées pour l'essentiel à ses travaux géométriques, deux en traduction allemande de F. Engel (Leipzig, 1898) et de H. Liebmann (Leipzig, 1904), les deux autres en russe (Moscou, 1956) (5).

Chronologiquement, les écrits géométriques de L... qui nous sont parvenus ou ceux dont l'existence est attestés s'échelonnent entre les années 1823 et 1855.

1. En 1823, L... soumet aux autorités universitaires le manuscrit d'un manuel en langue russe intitulé *Géométrie*, dont la structure manifeste une nette prise de conscience de l'importance et du caractère particulier du postulat des parallèles. Cette orientation explique en partie le rapport très défavorable dont il fut l'objet, rapport qui empêcha sa publication à l'époque. Edité à Kazan en 1909, il a été réédité en 1951, puis en 1956. Cet ouvrage dont aucune traduction ne semble exister révèle en particulier la grande influence exercée sur L... par les géomètres français, de d'Alembert à Legendre et Lacroix.

2. Le 11 (23) février 1826, L... présente devant la Faculté physico-mathématique un mémoire en langue française intitulé *Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles (sic)*, qui contient un premier exposé des principes d'une géométrie non euclidienne. Ce mémoire, resté inédit, est actuellement perdu, mais, d'après L... lui-même, l'essentiel de son contenu se retrouve dans le mémoire suivant.

3. En 1829-1830, L... publia dans une série de fascicules d'une revue culturelle de Kazan un exposé en langue russe de sa théorie (Des principes de la géométrie, *Messenger de Kazan*, février, mars, avril, novembre, décembre 1829; mars, avril, juillet et août 1830). Ce premier exposé publié des principes de la géométrie non euclidienne a été traduit en allemand par F. Engel ((Leipzig, 1898). Il fut l'objet de violentes attaques de la part de différents critiques dont M. Ostrogradski, le plus célèbre des mathématiciens russes de l'époque.

4. En 1835, L... publia dans les *Mémoires de l'Université de Kazan* récemment créés un nouvel exposé en langue russe de la géométrie non

(4) Le vol. 1 de l'édition de Kazan réunit les œuvres géométriques publiées par L..., en langue russe, le vol. 2 ses travaux en allemand et en français. L'édition de Moscou regroupe les travaux géométriques de L... dans ses vol. 1-3, ses œuvres algébriques dans son vol. 4 et ses travaux en analyse, calcul des probabilités, mécanique et astronomie dans son vol. 5.

(5) La bibliographie de l'ouvrage analysé donne les références précises de ces éditions (p. 393-295), ainsi que celles des publications originales de Lobatchevski et de leurs traductions éventuelles: travaux de géométrie (7 références, p. 395-396), travaux d'algèbre, d'analyse mathématique, de calcul des probabilités et d'astronomie (13 références, p. 396-397), travaux divers (2 références, p. 396).

euclidienne. Il en rédigea une version française qui fut publiée dans le *Journal de Crelle*, sous le titre de «Géométrie imaginaire».

5. En 1836, L... publia pour cette même revue un mémoire complémentaire en langue ruse d'«Application de la géométrie imaginaire à certaines intégrales» qui fut traduit en allemand par A. Liebermann (Leipzig, 1909).

6. De 1835 à 1838, pour essayer de surmonter l'incompréhension et l'hostilité rencontrées par ses premières publications, L... entreprit la publication dans les *Mémoires de l'Université de Kazan* d'un nouvel exposé plus développé de ses idées. Cette étude a été l'objet d'une traduction française de F. Mallieux (Liège 1900).

7. En 1840, L... tenta de faire connaître ses idées à l'étranger en éditant à Berlin une brochure en langue allemande intitulée *Geometrische Untersuchungen zur Theorie des Parallellinien*. La publication en 1866 d'une traduction française de ce texte par J. Houël (Etudes géométriques sur la théorie des parallèles par N.-I. Lobatchevsky, suivies d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher, *Mém. Soc. sci. phys. et nat. Bordeaux*, t. IV, 1866, p. 83-128) marquera les débuts d'une véritable diffusion de la théorie de L..., entraînant en particulier la publication en 1868 d'une traduction russe par A. Letnikov dans le t. III du *Recueil mathématique* de l'université de Moscou et la décision du Conseil de l'université de Kazan de rééditer toute l'œuvre géométrique de L... Considéré par V. Kagan comme l'exposé le plus accessible de la théorie de L..., ce texte est de sa part l'objet d'une analyse particulièrement détaillée.

8. Enfin, en 1855, à l'occasion du cinquantenaire de l'université de Kazan, L... publia un nouvel exposé en langue russe de sa théorie (*Bull. Univ. Kazan*, 1855, fasc. 1, p. 1-76) dont il donna en 1856 une version française: «Pangéométrie ou précis de géométrie fondé sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles», réédité à Paris en 1895.

Il apparaît ainsi que, de ces huit travaux géométriques de L..., l'un est perdu (n.° 2) et les sept autres réédités dans ses *Œuvres*. De ces derniers, quatre existent en version ou en traduction française (n.° 4, 6, 7 et 8), deux autres en version allemande (n.° 3 et 5). Seule la *Géométrie* de 1823 n'a été l'objet d'aucune traduction. L'étude de l'œuvre du grand géomètre apparaît donc accessible pour l'essentiel sans impliquer en principe la nécessité préalable de connaître la langue russe. Cependant l'interprétation précise des écrits de L..., en dehors peut-être de ses *Recherches* de 1840 (notre n.° 7), demande des efforts considérables d'analyse et de compréhension qui, dans beaucoup de cas, n'ont été menés à bonne fin que par ses éditeurs et commentateurs de langue russe. Les historiens des mathématiques qui, faute de pratiquer cette langue, ne peuvent utiliser directement l'édition moderne des *Œuvres complètes de L...* qui ras-

semble et coordonne ces commentaires tireront donc le plus grand profit de la consultation de l'édition française récente de la monographie de V. Kagan. Cet ouvrage analyse en effet les différentes publications du grand géomètre en les situant à la fois dans l'ensemble de son oeuvre et dans l'évolution générale de la pensée géométrique et en signalant et éclairant les difficultés principales de lecture et d'interprétation. La double compétence historique et mathématique, de son auteur, lui permet de tirer parti de tous les éléments documentaires intéressant aussi bien L... et son époque que les divers aspects concernés de l'histoire de la géométrie et de présenter d'une façon à la fois simple et rigoureuse les lignes directrices de la genèse, du développement et des applications de la géométrie non euclidienne. Si l'accent est mis bien évidemment sur les contributions personnelles de L..., l'apport de ses précurseurs n'est nullement sous-estimé. De même, l'effort parallèle des deux autres créateurs de la géométrie non euclidienne, Gauss et Bolyai, et celui, complémentaire, de Bernhard Riemann, se trouvent situés para rapport à celui du géomètre russe. Concernant la diffusion tardive des géométries non euclidiennes qui ne se réalisa qu'à partir de 1866, soit plusieurs années après la mort de ses trois protagonistes, l'ouvrage de Kagan souligne en particulier le rôle joué par la publication, en 1863, du volume 5 de la correspondance de Gauss avec l'astronome danois J. C. Schumacher, volume contenant plusieurs jugements très favorables de Gauss à l'égard de l'oeuvre de L... Il montre également comment la publication en 1866 de la traduction française des *Recherches* de 1840 (n.º 7) par un professeur de mathématiques de l'université de Bordeaux, Guillaume Jules Houël (1823-1886), a efficacement contribué à faire reconnaître la validité de la géométrie non euclidienne et l'importance de l'oeuvre de L... (6). V. Kagan évoque également l'enchaînement des travaux ultérieurs qui permirent l'approfondissement des géométries non euclidiennes — la géométrie hyperbolique de Gauss-Lobatchevski-Bolyai et la géométrie elliptique fondée dans un mémoire posthume de B. Riemann datant de 1854 mais publié seulement en 1867 par R. Dedekind (7)—, leur interprétation, leur insertion dans l'édifice de la mathématique moderne et leurs applications très variées à la théorie des fonctions, à la mécanique, à la phy-

(6) A partir de 1866, Houël se consacra avec passion à la diffusion des principes des géométries non euclidiennes et à la publication de traductions des travaux les plus importants de J. Bolyai, B. Riemann, H. von Helmholtz, F. Beltrami, etc. Les Archives de l'Académie des sciences de Paris conservent une précieuse correspondance qu'il échangea à partir de 1863 avec les principaux spécialistes de géométrie non euclidienne.

(7) B. RIEMAN, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde Liegen, *Göttinger Abhandlungen*, vol XIII, 1968; Id., in *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig, 1876 p. 272-287. Trad. fr. par J. HOUËL, Sur les Hypothèses qui servent de fondement à la géométrie, *Annali di matematica...*, 2e s.; t. 4, 1870, p. 303-326. Autre traduction in B. RIEMAN, *Oeuvres mathématiques*, trad. L. LAUREL, Paris, 1898, p. 280-299.

sique théorique et à la cosmologie. Cette présentation permet ainsi de replacer l'oeuvre de L... dans la perspective générale de la refonte des fondements et de l'architecture des mathématiques amorcée dans les années 1870.

Cependant, la diffusion tardive mais rapide des idées de L... entre 1866 et 1872 n'est qu'un aspect particulier d'une phase décisive de l'histoire des mathématiques. Celle-ci, qui na pas encore fait l'objet de l'étude d'ensemble approfondie qu'elle mériterait, est marquée par la brusque convergence au cours de cette brève période d'une floraison d'idées d'origines diverses conduisant à une rénovation d'ensemble de l'édifice mathématique. Si certaines de celles-ci étaient issues de travaux récents, d'autres, comme le principe des géométries non euclidiennes ou la théorie des groupes, remontaient à plus d'un tiers de siècle; restées jusqu'alors à l'écart du développement d'ensemble des mathématiques, elles commencent alors à trouver leur place véritable, leur signification et leur importance dans cette rencontre et cette interpénétration. Ainsi les écrits de Gauss, Lobatchevski, Bolyai, Riemann et Helmholtz relatifs à la géométrie non euclidienne se trouvent-ils alors éclairés non seulement par leur confrontation avec diverses conceptions nouvelles d'ordre géométrique issues des travaux de Poncelet, von Staudt, Minding, Grassmann, Riemann, etc., mais aussi par l'intervention de la théorie des groupes et de la théorie des invariants suscitée par les recherches de Galois, Jordan, Klein, Lie, Cayley, etc.

C'est cette convergence qui permet à Felix Klein d'intégrer tout naturellement les géométries non euclidiennes dans la nouvelle architecture géométrique qu'il élabore en 1872 dans son célèbre *Programme d'Erlangen* (8). Dès lors, bien que certaines difficultés ne soient pas encore définitivement résolues, ces géométries entrent de plain-pied dans l'édifice mathématique et quelques années plus tard seulement, entre 1881 et 1884, un jeune mathématicien, Henri Poincaré, en démontrera la fécondité en les utilisant au cours de la création de la théorie des fonctions automorphes ou fuchsienes.

Depuis lors, ces géométries ont joué un rôle fécond dans la fondation de la Relativité restreinte et de la Relativité générale et intervinrent dans diverses théories physiques contemporaines et dans certaines études

(8) F. KLEIN, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlanger Programm, 1872; Id. in *Math. Ann.*, t. 43, 1893. Trad. fr.: Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 1893, p. 87-102 et 172-210. Cette traduction a été récemment rééditée: F. KLEIN, *Le programme d'Erlangen*, Paris, Gauthier-Villars, 1973. (coll. «Discours de la méthode») avec une préface de J. DIEUDONNÉ et une étude de F. RUSSO sur *Groupes et géométries. La genèse du programme d'Erlangen de Felix Klein*.

cosmologiques. Aussi, bien que la diffusion soudaine des géométries non euclidiennes au cours de la période 1866-1872 ne soit que l'un des facteurs de la profonde révolution qui s'ébauche alors dans l'ensemble des mathématiques, cependant il est incontestable qu'elle a amorcé une profonde évolution de la géométrie et que ces idées nouvelles ont favorisé le renouvellement des fondements de plusieurs branches des mathématiques et joué «un rôle de premier plan dans les sciences de la nature les plus importantes».