Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 29, No. 1, 2011, pág. 55–58

Fibrados vectoriales equivariantes en espacios homogéneos compactos

Fernando Ricardo González Díaz*
Universidad Politécnica del Valle de Toluca, Ciencias Básicas, Almoloya de Juárez, México.

Dedicado a Imelda Díaz Mendoza

Resumen. Se desarrollan los resultados algebraicos concernientes a los fibrados vectoriales equivariantes sobre algunos espacios compactos, usando construcciones y argumentos globales. El enfoque que se le da es un tanto algebraico.
Palabras claves: fibrado vectorial equivariante, representación, A-módulo proyectivo.
MSC2000: 55R25, 53C05, 14M17.

Equivariant vector bundles on compact homogeneous spaces

Abstract. Algebraic results are developed concerning to the equivariant vector bundles on some compact spaces, using global constructions and arguments. In a sense the approach is algebraic.
Keywords: equivariant vector bundle, representation, projective A-module.

1. Introducción

En la geometría no conmutativa (GNC) los espacios topológicos son reemplazados por sus álgebras de coordenadas, y los fibrados vectoriales por sus módulos de secciones. De la misma forma, las extensiones principales de álgebras asumen el papel de fibrados principales cuánticos. Al nivel topológico, una acción principal de grupo quiere decir una acción libre y propia; a nivel algebraico, un fibrado principal se traduce en un funtor monoidal, desde la categoría de las representaciones

* Autor para correspondencia: *E-mail*: `rgonzalez@upvt.edu.mx`
Recibido: 2 de Mayo de 2011, Aceptado: 13 de Junio de 2011.

finitodimensionales de grupos a la categoría de módulos proyectivos finitamente generados sobre álgebras.

El funtor se define al asociar al fibrado principal un fibrado vectorial, mediante una representación de grupo, y al tomar el módulo de secciones globales de dicho fibrado vectorial. Se puede entonces construir un diccionario que lleva la geometría diferencial de las acciones de grupos al mundo de las álgebras y biálgebras, en una forma que permite estudiar fenómenos de simetría cuántica.

El propósito del artículo es dar un enfoque flexible para el caso de los fibrados vectoriales equivariantes sobre espacios compactos conexos. El artículo se puede ver como una exposición extensa, cuya novedad principal está en la presentación de los resultados conocidos y la simplicidad relativa que el enfoque aporta a este tema. Los temas son autocontenidos desde el punto de vista algebraico.

En la sección 2 se introducen los fibrados vectoriales equivariantes sobre un espacio, y los A-módulos proyectivos. En la sección 3 se mencionan las conclusiones.

2. Fibrados vectoriales inducidos

Asumiremos que G es un grupo compacto y que K es un subgrupo cerrado de G. Entonces G actúa sobre el espacio cociente G/K, el cual tiene de forma natural la topología cociente compacta del grupo G. Definimos $A := C(G/K)$ la C^*-álgebra de funciones continuas sobre el cociente G/K, con las operaciones puntuales y la norma *supremo* $\|\cdot\|_\infty$. Consideraremos a A como la subálgebra de $C(G)$, donde $C(G)$ es el álgebra de funciones f que satisfacen la propiedad de que $f(xs) = f(x)$ para $x \in G, s \in K$.

Denotaremos por λ la acción de G sobre A que se obtiene por la acción en el cociente G/K, dada por $(\lambda_y f)(x) = f(y^{-1}x)$ para $f \in A, y, x \in G$.

Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación de dimensión finita de K. Como K es un grupo compacto, podemos equipar el espacio vectorial $\mathcal{H}$ con un producto punto π-invariante; por lo tanto, asumiremos que la representación $(\pi,\mathcal{H})$ es ortogonal o unitaria. Definamos $\Xi_\pi = \{\xi \in C(G,\mathcal{H}) : \xi(xs) = \pi_s^{-1}(\xi(x))\}$ para $x \in G$ y $s \in K$. Aquí $C(G,\mathcal{H})$ denota el espacio vectorial de funciones continuas de G a $\mathcal{H}$. Se puede ver que Ξ_π es un A-módulo derecho por operaciones puntuales. Por consistencia en la escritura, escribimos los escalares a la derecha de los elementos de $\mathcal{H}$, obteniendo $(\xi f)(x) = \xi(x)f(x)$ para $\xi \in \Xi_\pi, f \in A, x \in G$.

La acción izquierda de G en sí mismo induce una acción de G en $C(G,\mathcal{H})$, y es fácil verificar que esta acción manda Ξ_π en sí mismo. Denotamos esta acción otra vez por λ, así que $(\lambda_y\xi)(x) = \xi(y^{-1}x)$. Entonces tenemos la *relación de covarianza*

$\lambda_y(\xi f) = (\lambda_y \xi)(\lambda_y f)$. Con abuso de la terminología podemos hacer la siguiente definición:

Definición 2.1. El A-módulo derecho Ξ_π con su G-acción lo llamamos el **fibrado vectorial equivariante sobre G/K inducido por $(\pi,\mathcal{H})$**.

Observemos que para $\xi \in \Xi_\pi$ y $s \in K$ tenemos $(\lambda_s \xi)(e) = \xi(s^{-1}) = \pi_s(\xi(e))$, donde e es el elemento identidad de G. Por lo tanto, recordando que Ξ_π es un espacio de funciones sobre G, podemos de esta manera recobrar la representación original $(\pi,\mathcal{H})$ a partir de Ξ_π con su G-acción.

El producto punto sobre $\mathcal{H}$ determina un fibrado métrico canónico sobre Ξ_π, esto es, un producto punto A-valuado [2, p. 1], definido por $\langle \xi, \eta \rangle_A(x) = \langle \xi(x), \eta(x) \rangle_{\mathcal{H}}$.

El producto punto sobre $\mathcal{H}$ es lineal en la segunda variable. Se puede ver que el producto punto A-valuado sobre Ξ_π es G-invariante en el sentido de que

$$\lambda_y(\langle \xi, \eta \rangle_A) = \langle \lambda_y \xi, \lambda_y \eta \rangle_A.$$

Sobre Ξ_π se puede definir un producto punto ordinario $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dado por

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{G/K} \langle \xi, \eta \rangle_A.$$

La acción λ de G sobre Ξ_π preserva este producto punto. La completez de Ξ_π para este producto punto es el espacio de Hilbert de la representación inducida de Mackey de G de la representación $(\pi, \mathcal{H})$ de K; con la representación de G solo llega ser la extensión de λ para la completez.

Teorema 2.2. *Para G, K y $(\pi, \mathcal{H})$ como antes, el módulo inducido Ξ_π es un A-módulo proyectivo.*

Demostración. Hay que encontrar una representación unitaria u ortogonal de dimensión finita $(\widetilde{\pi}, \widetilde{\mathcal{H}})$ de G, tal que $\mathcal{H}$ sea un subespacio de $\widetilde{\mathcal{H}}$, y tal que la restricción de $\widetilde{\pi}$ en K actuando sobre $\mathcal{H}$ sea π sea posible. Las representaciones $(\widetilde{\pi}, \widetilde{\mathcal{H}})$ existen, por el teorema de reciprocidad de Frobenius [1, p. 144]. Observemos que $C(G/K, \widetilde{\mathcal{H}})$ es un A-módulo libre cuya base se obtiene de cualquier base de $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Definimos $\Phi : \Xi_\pi \to C(G/K, \widetilde{\mathcal{H}})$ por la regla $(\Phi\xi)(x) = \widetilde{\pi}_x(\xi(x))$ para $x \in G$. Obsérvese que Φ es un homomorfismo de A-módulos inyectivo. Sea $\mathcal{P}$ la proyección ortogonal de $\widetilde{\mathcal{H}}$ a $\mathcal{H}$, y defínase la función p de G a $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}})$, el álgebra de operadores lineales sobre $\widetilde{\mathcal{H}}$, por: $p(x) = \widetilde{\pi}_x \mathcal{P} \widetilde{\pi}_x^*$.

Se puede ver que p es una proyección en el álgebra $C(G/K, \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}}))$. Mas aún, esta álgebra actúa como endomorfismo sobre el A-módulo libre $C(G/K, \widetilde{\mathcal{H}})$, evidentemente de manera puntual, y se puede demostrar que p es la proyección sobre el recorrido de Φ (ver una demostración en [3, p. 25]). Por lo tanto, el recorrido de Φ, y así Ξ_π, es proyectivo. ☑

Hagamos hincapié en que el fibrado vectorial correspondiente a Ξ_π puede ser visto como la asignación de cada punto $\dot{x}$ de G/K al recorrido del subespacio de $p(x)$. Nótese que para una representación $(\pi, \mathcal{H})$ dada, puede haber muchas elecciones para la representación $(\widetilde{\pi}, \widetilde{\mathcal{H}})$, y como consecuencia, muchas elecciones para la proyección p.

En el caso de que G sea un grupo de Lie, se sabe que las representaciones de dimensión finita (como los homomorfismos entre grupos de Lie) son suaves; consecuentemente, la proyección p de la demostración anterior es suave, y esto muestra que el subespacio Ξ_π^∞ de funciones suaves de Ξ_π es un módulo proyectivo sobre $C^\infty(G/K)$ [4, p. 4].

3. Conclusiones

1. Para G, K y (π, H), el módulo inducido Ξ_π es un A-módulo proyectivo.
2. Si E es un K-módulo y V un G-módulo sobre F, existe un isomorfismo canónico $Hom_G(V, i_H^G E) \cong Hom_K(res_K^G V, E)$, donde $i_H^G E$ es el espacio de funciones continuas $f : G \longrightarrow E$, tales que $f(xs) = s^{-1}f(x)$ para $s \in K, x \in G$ y $res_K^G V$ es el conjunto de las restricciones de V a K.
3. Para un grupo de Lie G, el subespacio Ξ_π^∞ es un módulo proyectivo sobre $C^\infty(G/K)$.

Referencias

[1] Bröcker T. and tom Dieck T., *Representations of compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, 98, Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Lance E.C., *Hilbert C^*-modules,* London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 210, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[3] Rieffel M.A., "Vector bundles and Gromov-Hausdorff distance", *J. K-Theory* 5 (2010), no. 1, 39–103.

[4] Rieffel M.A., "A global view of equivariant vector bundles and Dirac operators on some compact homogeneous spaces", *Contemp. Math.*, 449, (2008) 399–415.