Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 30, No. 2, 2012, pág. 121–128

El problema de Steklov sobre el cono

Óscar Andrés Montaño Carreño*

Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Cali, Colombia.

Resumen. Sea (M^n, g) un cono de altura $0 \leq x_{n+1} \leq 1$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, dotado con una métrica rotacionalmente invariante $2ds^2 + f^2(s)dw^2$, donde dw^2 representa la métrica estándar sobre S^{n-1}, la esfera unitaria $(n-1)$-dimensional. Supongamos que $Ric(g) \geq 0$. En este artículo demostramos que si $h > 0$ es la curvatura media sobre ∂M y ν_1 es el primer valor propio del problema de Steklov, entonces $\nu_1 \geq h$.
Palabras claves: Problema de Steklov, cono, curvatura media.
MSC2010: 35P15, 53C20, 53C42, 53C43

The Steklov problem on the cone

Abstract. Let (M^n, g) be a cone of height $0 \leq x_{n+1} \leq 1$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, endowed with a rotationally invariant metric $2ds^2 + f^2(s)dw^2$, where dw^2 represents the standard metric on S^{n-1}, the $(n-1)$-dimensional unit sphere. Assume $Ric(g) \geq 0$. In this paper we prove that if $h > 0$ is the mean curvature on ∂M and ν_1 is the first eigenvalue of the Steklov problem, then $\nu_1 \geq h$.
Keywords: Steklov problem, cone, mean curvature.

1. Introducción

Sea (M^n, g) una variedad riemanniana compacta n-dimensional con borde ∂M y laplaciano Δ_g. Dada una función $u \in C^\infty(\partial M)$, sea $\hat{u}$ la extensión armónica de u:

$$\begin{cases} \Delta_g \hat{u} &= 0 \ \text{ en } M, \\ \quad \hat{u} &= u \ \text{ sobre } \partial M. \end{cases}$$

Sea η la conormal unitaria exterior a lo largo de ∂M. La función Dirichlet-a-Neumann es la función

$$L : C^\infty(\partial M) \to C^\infty(\partial M)$$

dada por

$$Lu = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta}.$$

* *E-mail*: oscar.montano@correounivalle.edu.co
Recibido: 13 de junio de 2012, Aceptado: 10 de septiembre de 2012.

L es un operador autoadjunto no negativo con espectro discreto $\nu_0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3 \leq ...$ tendiendo a infinito. Los valores propios para este problema fueron discutidos en 1902 por Steklov [11], y son a menudo llamados valores propios de Steklov. Puesto que las funciones constantes están en el núcleo de L, el menor valor propio de L es $\nu_0 = 0$. El primer valor propio no cero ν_1 de L es conocido como el primer valor propio de Steklov y está caracterizado variacionalmente por

$$\nu_1 = \min_{\varphi \in C} \frac{\int_M |\nabla \varphi|^2 \, dv}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma}, \tag{1}$$

donde $C = \left\{\varphi \in C^\infty(\bar{M}) : \int_{\partial M} \varphi d\sigma = 0\right\}$. Para la bola unitaria $B^n \subset \mathbb{R}^n$, los valores propios de la función Dirichlet-a-Neumann son $\nu_k = k$, $k = 0, 1, 2, ...$, y las funciones propias están dadas por el espacio de polinomios armónicos homogéneos de grado k restringidos a la esfera ∂B^n. En 1954 Weinstock [12] demostró que para un dominio plano simplemente conexo M la cantidad $\nu_1 \cdot P(\partial M)$, donde $P(\partial M)$ es el perímetro del dominio, es maximizada únicamente por un disco. En 1970 Payne [10] demostró, también para un dominio plano y simplemente conexo M, que si $k_0 > 0$ es una cota inferior para la curvatura k del borde ∂M, entonces $\nu_1 \geq k_0$. Posteriormente, en el año 1997, Escobar [4] generalizó el resultado de Payne a variedades 2-dimensionales con curvatura de Gauss no negativa, reemplazando k por la curvatura geodésica k_g sobre el borde. En dimensiones altas para variedades con curvatura Ricci no negativa, en el mismo artículo Escobar demuestra que $\nu_1 > \frac{k_0}{2}$, donde $k_0 > 0$, y la segunda forma fundamental sobre el borde ∂M satisface que $\pi \geq k_0 I$. El mismo Escobar [5] conjetura lo siguiente:

Conjetura 1.1. Sea (M^n, g) una variedad riemanniana compacta con borde y dimensión $n \geq 3$. Supongamos que $Ric(g) \geq 0$, y que la segunda forma fundamental π satisface $\pi \geq k_0 I$ sobre ∂M, $k_0 > 0$. Entonces

$$\nu_1 \geq k_0.$$

La igualdad se tiene solamente para la bola euclidiana de radio k_0^{-1}.

Una forma práctica de enunciar el problema de Steklov es la siguiente: Encontrar una solución de la ecuación

$$\begin{cases} \Delta_g \varphi & = 0 \ \text{ en } M, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} & = \nu \varphi \ \text{ sobre } \partial M, \end{cases} \tag{2}$$

donde (M^n, g) es una variedad riemanniana compacta con borde ∂M y ν es un número real.

El problema tiene orígenes físicos. La función φ representa un estado estacionario de la temperatura sobre M, donde el flujo sobre el borde es proporcional a la temperatura. El problema de Steklov fue estudiado por Calderón [1] en conductividad y análisis armónico.

En [8], cuando g es una métrica rotacionalmente invariante y M es una bola n-dimensional, nosotros demostramos la Conjetura 1.1. En este artículo demostramos la Conjetura 1.1 cuando M es el cono n-dimensional, dado por

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0, \ 0 \leq x_{n+1} \leq 1\right\},$$

y g es una métrica rotacionalmente invariante de la forma

$$2ds^2 + f^2(s)dw^2.$$

2. Preliminares

Sea M el cono n-dimensional en $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0,\ 0 \leq x_{n+1} \leq 1\right\}, \tag{3}$$

con borde

$$\partial M = \{x \in M \mid x_{n+1} = 1\}. \tag{4}$$

Sea S^{n-1} la esfera unitaria encajada en $\mathbb{R}^{n+1}$ y parametrizada por

$$\begin{aligned} Y(w) &= Y(w_1, ..., w_{n-1}) \\ &= (\operatorname{sen} w_{n-1} \operatorname{sen} w_{n-2} \cdots \operatorname{sen} w_1, ..., \operatorname{sen} w_{n-1} \cos w_{n-2}, \cos w_{n-1}, 0). \end{aligned}$$

Sea X la parametrización usual del cono dada por

$$X(s, w) = s\left(Y(w) + e_{n+1}\right),\ 0 \leq s \leq 1, \tag{5}$$

donde

$$e_{n+1} = (0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Los campos coordenados son

$$\begin{aligned} X_0 &= X_s = Y(w) + e_{n+1}, \\ X_i &= \frac{\partial X}{\partial w_i} = sY_i,\ i = 1, \cdots, n-1. \end{aligned} \tag{6}$$

Definición 2.1. Diremos que g es una métrica rotacionalmente invariante sobre M si tiene la forma

$$2ds^2 + f^2(s)dw^2,$$

donde dw^2 representa la métrica usual sobre S^{n-1} y f es una función suave con $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f(s) > 0$ para $0 < s \leq 1$.

Observación 2.2. Cuando $f(s) = s$ obtenemos la métrica usual sobre M inducida por la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Si $\bar{g}$ es la métrica usual de $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, es fácil verificar las siguientes relaciones:

$$g_{ss} = g(X_s, X_s) = 2; \tag{7}$$

$$g_{is} = g(X_i, X_s) = 0, \quad i = 1, \cdots, n-1; \tag{8}$$

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g(X_i, X_j) = g(sY_i, sY_j) = f^2(s)\bar{g}(Y_i, Y_j) \\ &= f^2(s)\bar{g}_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n-1; \end{aligned} \tag{9}$$

$$g_{n-1\ n-1} = g(X_{n-1}, X_{n-1}) = f^2(s). \tag{10}$$

El determinante de g, $|g|$, viene dado por

$$|g| = 2(f^2)^{n-1}\,|\bar{g}|. \tag{11}$$

2.1. Gradiente

Si $\varphi : M \to \mathbb{R}$ es una función de la forma $\varphi(s,w) = \psi(s)\phi(w)$, entonces,

$$\begin{aligned} \nabla\varphi(s,w) &= \sum_{i,j=0}^{n-1} g^{ij} X_i(\varphi) X_j \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial s} X_s + \sum_{i,j=1}^{n-1} g^{ij} X_i(\varphi) X_j \\ &= \frac{1}{2}\psi'\phi X_s + \frac{\psi}{f^2}\sum_{i,j=1}^{n-1} \bar{g}^{ij}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w_i}\right) X_j \end{aligned} \tag{12}$$

2.2. Laplaciano

Si $\varphi : M \to \mathbb{R}$ es una función de la forma $\varphi(s,w) = \psi(s)\phi(w)$, entonces

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(s,w) &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right\} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial w_i}\left\{\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial w_j}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} + \frac{(n-1)}{2}\frac{f'}{f}\frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{1}{f^2}\bar{\Delta}\varphi \\ &= \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} + \frac{(n-1)}{2}\frac{f'}{f}\frac{\partial\psi}{\partial s}\right\}\phi + \frac{\psi}{f^2}\bar{\Delta}\phi, \end{aligned} \tag{13}$$

donde $\bar{\Delta}$ es el Laplaciano sobre S^{n-1}.

2.3. Derivada normal sobre el borde

Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función de la forma $\varphi(s,w) = \psi(s)\phi(w)$. Puesto que $\eta = \frac{X_s}{\sqrt{2}}$ es un campo normal unitario exterior a ∂M, entonces

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = g(\nabla\varphi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} g\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial s}X_s, X_s\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi'(s)\phi(w). \tag{14}$$

2.4. Conexión y curvatura media

Sea D la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica g. Para los campos coordenados D satisface la ecuación

$$g(D_{X_i}X_j, X_k) = \frac{1}{2}X_j g(X_i, X_k) + \frac{1}{2}X_i g(X_j, X_k) - \frac{1}{2}X_k g(X_i, X_j). \tag{15}$$

La ecuación anterior implica que

$$g(D_{X_i}X_s, X_s) = 0$$

y

$$\begin{aligned} g(D_{X_i}X_s, X_j) &= \frac{1}{2}X_s g(X_i, X_j) + \frac{1}{2}X_i g(X_s, X_j) - \frac{1}{2}X_j g(X_i, X_s) \\ &= \frac{1}{2}X_s \left\{ f^2(s)\bar{g}(Y_i, Y_i)\delta_i^j \right\} \\ &= ff'\bar{g}(Y_i, Y_i)\delta_i^j, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$D_{X_i}X_s = \frac{f'}{f}X_i.$$

En consecuencia, siendo π la segunda forma fundamental, se tiene:

$$\begin{aligned} \pi(X_i, X_i) = g(D_{X_i}\eta, X_i) &= g(D_{X_i}(\frac{X_s}{\sqrt{2}}), X_i) \qquad (16) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}g(D_{X_i}X_s, X_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}g(\frac{f'}{f}X_i, X_i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{f'}{f})g(X_i, X_i). \end{aligned}$$

Así que la curvatura media h sobre ∂M está dada por

$$h \quad = \quad \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} g(X_i, X_i)^{-1}g(D_{X_i}\eta, X_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f'(1)}{f(1)}. \qquad (17)$$

3. Resultados básicos

Proposición 3.1. *El primer valor propio para el operador Laplaciano ($\bar{\Delta}_g$) sobre ∂M es $\lambda_1(M) = \dfrac{n-1}{f^2(1)}$.*

Observación 3.2. Cuando la métrica es la inducida por la métrica euclidiana, el primer valor propio es $\lambda_1 = n - 1$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \min_{\int_{\partial M}\phi d\sigma_g = 0} \frac{\int_{\partial M} \left|\bar{\nabla}_g \phi\right|_g^2 d\sigma_g}{\int_{\partial M}\phi^2 d\sigma_g} \\ &= \min_{\int_{\partial M}\phi d\sigma_g = 0} \frac{1}{f^2(1)} \frac{\int_{\partial M} \left|\bar{\nabla}_{\bar{g}} \phi\right|^2 d\sigma_g}{\int_{\partial M}\phi^2 d\sigma_g} \\ &= \min_{\int_{\partial M}\phi d\sigma_g = 0} \frac{1}{f^2(1)} \frac{\int_{\partial M} \left|\bar{\nabla}_{\bar{g}} \phi\right|^2 f^{n-1}(1) d\sigma_{\bar{g}}}{\int_{\partial M}\phi^2 f^{n-1}(1) d\sigma_{\bar{g}}} \\ &= \min_{\int_{\partial M}\phi d\sigma_{\bar{g}} = 0} \frac{1}{f^2(1)} \frac{\int_{\partial M} \left|\bar{\nabla}_{\bar{g}} \phi\right|^2 d\sigma_{\bar{g}}}{\int_{\partial M}\phi^2 d\sigma_{\bar{g}}} \\ &= \frac{n-1}{f^2(1)}. \end{aligned}$$

☑

El siguiente resultado sobre el cono es análogo al obtenido por Escobar en [6] para la bola n-dimensional.

Proposición 3.3. *La primera función propia no constante para el problema de Steklov sobre M tiene la forma*

$$\varphi(s,w) = \psi(s)e(w), \tag{18}$$

donde $e(w)$ satisface la ecuación $\Delta e + (n-1)e = 0$ sobre S^{n-1} y la función ψ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2}\psi'' + \frac{(n-1)}{2}\frac{f'}{f}\psi' - (n-1)\frac{\psi}{f^2} = 0 \text{ en } (0,1), \tag{19}$$

$$\psi'(1) = \sqrt{2}\nu_1\psi(1), \quad \psi(0) = 0. \tag{20}$$

Demostración. La ecuación (19) se obtiene fácilmente de la ecuación (13) y de la Proposición 3.1. La condición $\psi'(1) = \sqrt{2}\nu_1\psi(1)$ se obtiene de la ecuación (14). El resto de la prueba es análoga a la del Lema 3 en [6]. ☑

Proposición 3.4. *Si $Ric(g) \geq 0$ y $h > 0$, entonces $1 \geq \dfrac{(f'(1))^2}{2}$.*

Demostración. Xia en [14] demostró que $\lambda_1 \geq (n-1)h^2$. De la Proposición 3.1 y la ecuación (17) se obtiene

$$\lambda_1 \geq (n-1)h^2, \qquad \frac{n-1}{f^2} \geq (n-1)\frac{(f')^2}{2f^2}, \qquad 1 \geq \frac{(f')^2}{2}.$$ ☑

4. Teorema principal

Teorema 4.1. *Supongamos que M tiene curvatura de Ricci no negativa y curvatura media $h > 0$ sobre ∂M. Entonces el primer valor propio no cero del problema de Steklov ν_1 satisface $\nu_1 \geq h$.*

Demostración. Las funciones coordenadas son funciones propias del Laplaciano sobre S^{n-1}. De la ecuación (18) se sigue que en particular $\varphi(s,w) = \psi(s)\cos w_{n-1}$ es una función propia asociada al primer valor propio del problema de Steklov ν_1. Consideremos la función $F = \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2$. Puesto que φ es una función armónica y $Ric(\nabla\varphi,\nabla\varphi) \geq 0$, la fórmula de Weizenböck [7],

$$\Delta F = |Hess(\varphi)|^2 + g(\nabla\varphi, \nabla(\Delta\varphi)) + Ric(\nabla\varphi,\nabla\varphi),$$

implica que $\Delta F \geq 0$, y por tanto F es una función subarmónica. Como consecuencia, el máximo de F es alcanzado en algún punto $P(1,\theta) \in \partial M$. El principio del máximo implica que $\frac{\partial F}{\partial s}(1,\theta) > 0$ ó F es constante. Puesto que

$$F(s,w) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 + f^{-2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w_{n-1}}\right)^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\psi')^2\cos^2 w_{n-1} + \left(\frac{\psi}{f}\right)^2 \operatorname{sen}^2 w_{n-1}\right\}$$

y F no es una función constante, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial s}(1,\theta) = \frac{1}{2}\psi'\psi'' \cos^2\theta_{n-1} + \frac{\psi}{f}\left(\frac{\psi}{f}\right)' \operatorname{sen}^2\theta_{n-1} > 0. \tag{21}$$

Evaluando $\dfrac{\partial F}{\partial w_{n-1}}(s,w)$ en el punto P encontramos que

$$\frac{\partial F}{\partial w_{n-1}}(1,\theta) = \left(\left(\frac{\psi}{f}\right)^2 - \frac{1}{2}(\psi')^2\right) \operatorname{sen}\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1} = 0. \tag{22}$$

La ecuación (22) implica que

1. $\left(\dfrac{\psi(1)}{f(1)}\right)^2 - \frac{1}{2}(\psi'(1))^2 = 0$, ó
2. $\operatorname{sen}\theta_{n-1} = 0$ y $\cos^2\theta_{n-1} = 1$, ó
3. $\operatorname{sen}^2\theta_{n-1} = 1$ y $\cos\theta_{n-1} = 0$.

Observación 4.2. $\psi(1) = 0$ implica $\varphi = 0$ sobre ∂M, y entonces φ sería constante sobre M, lo cual es una contradicción. Así que $\psi(1) \neq 0$.

A continuación analizamos caso por caso.
Primer caso. Si

$$\left(\frac{\psi(1)}{f(1)}\right)^2 - \frac{1}{2}(\psi'(1))^2 = 0,$$

entonces de las ecuaciones (17) y (20) y de la Proposición 3.4 se tiene

$$(\nu_1)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\psi'(1)}{\psi(1)}\right)^2 = \left(\frac{1}{f(1)}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{f'(1)}{f(1)}\right)^2 = (h)^2.$$

Segundo caso. Si $\operatorname{sen}\theta_{n-1} = 0$ y $\cos^2\theta_{n-1} = 1$, entonces

$$F(1,\theta_1,...,\theta_{n-2},\theta_{n-1}) - F\left(1,\theta_1,...,\theta_{n-2},\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\psi')^2 - (\frac{\psi}{f})^2\right\} \geq 0$$

y

$$(\nu_1)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\psi'(1)}{\psi(1)}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{f(1)}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{f'(1)}{f(1)}\right)^2 = (h)^2.$$

Tercer caso. Si $\operatorname{sen}^2\theta_{n-1} = 1$ y $\cos\theta_{n-1} = 0$, puesto que $\dfrac{\partial F}{\partial s}(P) > 0$, se tiene $\dfrac{\psi}{f}\left(\dfrac{\psi}{f}\right)' > 0$, y por lo tanto

$$\left(\frac{\psi}{f}\right)\left(\frac{f\nu_1\sqrt{2}\psi - f'\psi}{f^2}\right) = \left(\frac{\psi}{f}\right)^2 \sqrt{2}(\nu_1 - h) > 0.$$

En cualquier caso concluimos que

$$\nu_1 \geq h.$$

☑

Referencias

[1] Calderón A.P., "On an Inverse Boundary Value Problem", *Comput. Appl. Math.* 25 (2006), no. 2-3, 133–138.

[2] Escobar J.F., "Conformal Deformation of a Riemannian Metric to a Scalar Flat Metric with Constant Mean Curvature on the Boundary", *Ann. of Math.* 136 (1992), no. 2, 1–50.

[3] Escobar J.F., "The Yamabe problem on manifolds with Boundary", *J. Differential Geom.* 35 (1992) no. 1, 21–84.

[4] Escobar J.F., "The Geometry of the first Non-Zero Stekloff Eigenvalue", *J. Funct. Anal.* 150 (1997), no. 2, 544–556.

[5] Escobar J.F., "An isoperimetric inequality and the first Steklov Eigenvalue", *J. Funct. Anal.* 165 (1999), no. 1, 101–116.

[6] Escobar J.F., "A comparison theorem for the first non-zero Steklov Eigenvalue", *J. Funct. Anal.* 178 (2000), no. 1, 143–155.

[7] Escobar J.F., "Topics in PDE's and Differential Geometry", XII Escola de Geometria Diferencial. [XII School of Differential Geometry] Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2002. viii+88 pp.

[8] Montaño O.A., "The first non-zero Stekloff eigenvalue for conformal metrics on the ball", preprint.

[9] Reilly R.C., "Aplications of the Hessian operator in a Riemannian manifold", *Indiana Univ. Math. J.* 26 (1977), no. 3, 459–472.

[10] Payne L.E., "Some isoperimetric inequalities for harmonic functions", *SIAM J. Math. Anal.* 1 (1970), 354–359.

[11] Steklov W., "Sur les problemes fondamentaux de la physique mathématique", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 19 (1902), no.3, 455–490.

[12] Weinstock R., "Inequalities for a classical eigenvalue problem", *J. Rational Mech. Anal.* 3 (1954), 745–753.

[13] Wang Q., Xia C., "Sharp bounds for the first non-zero Stekloff eigenvalues", *J. Funct. Anal.* 257 (2009), no. 8, 2635–2644.

[14] Xia C., "Rigidity of compact manifolds with boundary and nonnegative Ricci curvature", *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (1997), no. 6, 1801–1806.