Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 31, No. 1, 2013, pág. 53–58

Cota superior para el primer valor propio del problema de Steklov

Óscar Andrés Montaño Carreño*

Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Cali, Colombia.

Resumen. Sea B_r una bola n-dimensional dotada con una métrica rotacionalmente invariante y con curvaturas seccionales radiales no positivas. Si ν es el primer valor propio de Steklov y h es la curvatura media sobre el borde de la bola, nosotros demostramos que $\nu \leq h$ con igualdad si y solo si B_r es la bola con la métrica usual de $\mathbb{R}^n$.
Palabras claves: Curvatura seccional, curvatura media, valor propio de Steklov.
MSC2010: 35P15, 53C20, 53C42, 53C43

Upper bound for the first eigenvalue of the Steklov problem

Abstract. Let B_r be an n-dimensional ball endowed with a rotationally invariant metric and with non-positive radial sectional curvatures. If ν is the first Steklov eigenvalue and h is the mean curvature on the boundary of the ball, we prove that $\nu \leq h$. Equality holds only when B_r is the ball endowed with the standard metric of $\mathbb{R}^n$.
Keywords: Sectional curvature, mean curvature, Steklov eigenvalue.

1. Introducción

Sea (M^n, g) una variedad riemanniana con frontera ∂M. El problema de Steklov consiste en encontrar soluciones de la ecuación

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi = 0 \text{ en } M,\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \nu\varphi \;\text{ sobre }\; \partial M, \end{aligned} \tag{1}$$

donde ν es un número real. Este problema fue introducido por Steklov [5] en 1902, para dominios acotados en el plano. El conjunto de valores propios para el problema de Steklov

* *E-mail*: oscar.montano@correounivalle.edu.co.
Recibido: 16 de febrero de 2013, Aceptado: 21 de junio de 2013.

es el mismo que el conjunto de valores propios para la función Dirichlet-Neumann. Esta función asocia a cada función u definida sobre ∂M, la derivada normal de su extensión armónica $\hat{u}$ sobre M. El conjunto de valores propios del problema de Steklov consiste de una sucesión creciente $0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots \uparrow +\infty$. El primer valor propio no cero es conocido como el primer valor propio del problema de Steklov; este valor propio está caracterizado variacionalmente por

$$\nu = \inf_{\int_{\partial M} u d\sigma = 0} \frac{\int_M |\nabla u|^2 \, dv}{\int_{\partial M} |u|^2 \, d\sigma}, \tag{2}$$

donde $u \in C^\infty(\bar{M})$. Para dominios acotados y simplemente conexos en el plano xy, en 1954 Weinstock [7] demostró que $\nu \leq \frac{2\pi}{L}$, donde L representa el perímetro de la curva frontera. En 1970, para dominios convexos en el plano Payne [4] demostró que $\nu \geq k_o$, donde k_o es el valor mínimo de la curvatura sobre el borde del dominio. En el año 1997, Escobar [1] generalizó el resultado de Payne a variedades Riemannianas 2-dimensionales con curvatura Gaussiana no-negativa y con borde tal que la curvatura geodésica k_g estuviera acotada inferiormente por una constante positiva k_o. Con estas hipótesis, Escobar demuestra que $k_g \geq k_o$. Para dimensiones altas, Escobar considera variedades compactas de curvatura de Ricci no negativa y, otra vez en el espíritu del teorema de Payne, demuestra el siguiente teorema: *Si M es una variedad Riemanniana compacta n-dimensional ($n \geq 3$) con curvatura de Ricci no negativa, frontera no vacía ∂M y cuya segunda forma fundamental π sobre ∂M satisface $\pi \geq kI$ para alguna constante positiva k, entonces*

$$\nu > \frac{k}{2}.$$

Para métricas rotacionalmente invariantes con curvatura de Ricci no-negativa en la bola n-dimensional B_r nosotros [3] demostramos que $\nu \geq h$, donde h es la curvatura media sobre ∂B_r. En este artículo nosotros demostramos la desigualdad contraria si las curvaturas seccionales radiales son no positivas, con igualdad si y solo si B_r es la bola con la métrica usual de $\mathbb{R}^n$.

2. Preliminares

Si $Y(w) = Y(w_1, \ldots, w_{n-1})$ es una parametrización estándar de $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, entonces

$$X(s, w) = sY(w), \; 0 \leq s \leq r \tag{3}$$

es una parametrización estándar de la bola n-dimensional B_r ($r > 0$). En esta parametrización la métrica usual sobre B_r tiene la forma $ds^2 + s^2 dw^2$, donde dw^2 representa la métrica usual sobre S^{n-1}, la esfera $(n-1)$-dimensional. Reemplazando la función s^2 por $f^2(s)$, imponiendo condiciones a f, obtenemos una familia de métricas llamadas métricas rotacionalmente invariantes. Dentro de estas métricas están incluidas las de curvatura seccional constante. Cuando $k < 0$ y $f(s) = \frac{1}{\sqrt{-k}} \operatorname{senh}(\sqrt{-k}s)$, se tiene curvatura seccional constante negativa igual a k. Cuando $k > 0$ y $f(s) = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sen}(\sqrt{k}s)$, se tiene curvatura seccional constante positiva igual a k.

Sea (B_r, g) una bola n-dimensional dotada con una métrica rotacionalmente invariante, $ds^2 + f^2(s)dw^2$, donde dw^2 representa la métrica usual sobre S^{n-1}, la esfera $(n-1)$-dimensional, y f es una función suave con $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f(s) > 0$ para $0 < s \leq r$. Si ∇ es la conexión de Levi-Civita asociada con la métrica g, es fácil verificar que

$$\nabla_{\partial_s}\partial_s = \bar{0}, \tag{4}$$

$$\nabla_{\partial_i}\partial_s = \frac{f'}{f}\partial_i. \tag{5}$$

La curvatura media h sobre ∂B_r y las curvaturas seccionales radiales sobre B_r vienen dadas por

$$h(r) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} g(\partial_i, \partial_i)^{-1} g(\nabla_{\partial_i}\partial_s, \partial_i) = \frac{f'(r)}{f(r)}, \tag{6}$$

$$K(\partial_s, \partial_i) = \frac{1}{g(\partial_i, \partial_i)}\{g(\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_s}\partial_s, \partial_i) - g(\nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_i}\partial_s, \partial_i)\} = \frac{-f''(s)}{f(s)}. \tag{7}$$

El siguiente teorema es conocido como el teorema de comparación del hessiano, y aparece en [6].

Teorema 2.1. *Sean M_1 y M_2 dos variedades riemannianas completas n-dimensionales. Supongamos que $\gamma_i : [0, a] \to M_i$ (i=1,2) son dos geodésicas parametrizadas por longitud de arco , y γ_i no interseca el lugar de corte ("cut locus") de $\gamma_i(0)$. Sea ρ_i la función distancia de $\gamma_i(0)$ sobre M_i, y sea K_i la curvatura seccional de M_i. Supongamos que para $\gamma_i(t)$, $0 \leq t \leq a$, se tiene*

$$K_1(X_1, \frac{\partial}{\partial\gamma_1}) \geq K_2(X_2, \frac{\partial}{\partial\gamma_2}),$$

donde X_i es cualquier vector unitario en $T_{\gamma_i(t)}M_i$ perpendicular a $\frac{\partial}{\partial\gamma_i(t)}$. Entonces

$$H(\rho_1)(X_1, X_1) \leq H(\rho_2)(X_2, X_2).$$

El siguiente teorema de comparación es debido a Escobar [2].

Teorema 2.2. *Sea (B_r, g) una bola n-dimensional $(n = 2, 3)$ dotada con una métrica*

$$ds^2 + f^2(s, w)dw^2.$$

Supongamos que la curvatura radial satisface $K(\partial_s, X) \leq K_o$, donde X es un vector unitario perpendicular a ∂_s. Sea (B_r, g_o) una bola n-dimensional $(n = 2, 3)$ dotada con una métrica

$$ds^2 + f_o^2(s)dw^2,$$

de curvatura seccional constante K_o. Entonces

$$\nu(B_r, g) \leq \nu(B_r, g_o).$$

La igualdad se cumple si y solo si $f(s, w) = f_o(s)$.

Enunciamos y demostramos un lema que será de utilidad al final.

Lema 2.3. *Sea* (B_r, g) *una bola* n*-dimensional dotada con una métrica*

$$ds^2 + f^2(s,w)dw^2.$$

Supongamos que la curvatura radial satisface $K(\partial_s, X) \leq K_o$*, donde* X *es un vector unitario perpendicular a* ∂_s*.*

Sea (B_r, g_o) *una bola* n*-dimensional dotada con una métrica*

$$ds^2 + f_o^2(s)dw^2,$$

de curvatura seccional constante K_o*. Entonces*

$$\frac{f_o'(s)}{f_o(s)} \leq \frac{\frac{\partial f}{\partial s}(s,w)}{f(s,w)}.$$

Demostración. Sean ∂_s y ∂_k, $k = 1, \ldots, n-1$ los campos coordenados correspondientes a la parametrización (3). Sea ∂_i uno de estos campos perpendiculares al campo unitario ∂_s y tal que tal que $g(\partial_i, \partial_i) = f^2(s,w)$. Para este campo coordenado particular tenemos:

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\partial_i}\partial_i, \partial_s) &= -\frac{1}{2}\partial_s g(\partial_i, \partial_i) = -\frac{\partial f}{\partial s}(s,w)f(s,w), \\ g_o(\nabla_{\partial_i}\partial_i, \partial_s) &= -\frac{1}{2}\partial_s g_o(\partial_i, \partial_i) = -f_o'(s)f_o(s). \end{aligned}$$

Puesto que $\nabla_{\partial_s}\partial_s = \bar{0}$, las geodésicas en la dirección ∂_s son rectas que pasan por el origen, y por lo tanto la función distancia viene dada por $\rho(s) = s$; en consecuencia,

$$\begin{aligned} (H_g\rho)(\partial_i, \partial_i) &= \partial_i\partial_i(s) - d(s)(\nabla_{\partial_i}\partial_i) = -d(s)(-\frac{\partial f}{\partial s}(s,w)f(s,w)\partial_s) = \frac{\partial f}{\partial s}(s,w)f(s,w), \\ (H_{g_o}\rho)(\partial_i, \partial_i) &= \partial_i\partial_i(s) - d(s)(\nabla_{\partial_i}\partial_i) = -d(s)(-f_o'(s)f_o(s)\partial_s) = f_o'(s)f_o(s). \end{aligned}$$

De las dos últimas ecuaciones y del teorema de comparación 2.1 se sigue el resultado. ☑

3. Cotas superiores

Teorema 3.1. *Sea* B_r *una bola* n*-dimensional dotada con una métrica rotacionalmente invariante*

$$ds^2 + f^2(s)dw^2,$$

donde dw^2 *representa la métrica usual sobre* S^{n-1}*, la esfera unitaria* $(n-1)$*-dimensional. Supongamos que las curvaturas radiales sasisfacen* $K(\partial_s, X) \leq 0$*, donde* X *es cualquier vector unitario y perpendicular al vector radial* $\frac{\partial}{\partial s}$*. Entonces el primer valor propio del problema de Steklov satisface*

$$\nu \leq h,$$

donde h *es la curvatura media sobre* ∂B_r*. La igualdad se tiene si y solo si* B_r *está dotada con la métrica usual de* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración. Puesto que $K(\partial_s, \partial_i) = -\frac{f''(s)}{f(s)} \leq 0$, entonces $f''(s) \geq 0$. Se deduce que f' es creciente, y por lo tanto,

$$1 = f'(0) \leq f'(s) \leq f'(r).$$

Consideremos ahora la función test $u(s,w) = f(s)e(w)$, donde $e(w)$ satisface la ecuación $\bar{\Delta}e + (n-1)e = 0$ sobre S^{n-1}. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\nu &\leq \frac{\int\limits_{B_r} |\nabla u|^2 \, dv}{\int\limits_{\partial B_r} |u|^2 \, d\sigma} \\
&= \frac{\int\limits_{B_r} \left\{ (f')^2 e^2 + \left|\bar{\nabla} e\right|^2 \right\} f^{n-1} ds dw}{\int\limits_{\partial B_r} f^{n+1}(r) e^2 dw} \\
&= \frac{\int\limits_0^r \left\{ (f')^2 f^{n-1} + (n-1) f^{n-1} \right\} ds}{f^{n+1}(r)} \\
&\leq \frac{\int\limits_0^r \left\{ f'(r) f'(s) f^{n-1} + (n-1) f^{n-1} f'(s) \right\} ds}{f^{n+1}(r)} \\
&= \frac{f'(r) \frac{f^n(r)}{n} + \frac{n-1}{n} f^n(r)}{f^{n+1}(r)} \\
&\leq \frac{f'(r) \frac{f^n(r)}{n} + \frac{n-1}{n} f'(r) f^n(r)}{f^{n+1}(r)} \\
&= \frac{f'(r)}{f(r)} = h.
\end{aligned}$$

Si se da la igualdad, entonces $f'(s) = f'(r)$, y por lo tanto $f'(s) = 1$. En consecuencia B_r está dotada con la métrica usual de $\mathbb{R}^n$. ☑

Teorema 3.2. *Sea B_r una bola n-dimensional ($n = 2, 3$) dotada con una métrica g de la forma*

$$ds^2 + f^2(s,w) dw^2,$$

donde dw^2 representa la métrica usual sobre S^{n-1}, la esfera unitaria $(n-1)$-dimensional. Supongamos que las curvaturas radiales satisfacen $K(\partial_s, X) \leq K_o \leq 0$, donde X es cualquier vector unitario y perpendicular al vector radial $\frac{\partial}{\partial s}$. Entonces el primer valor propio del problema de Steklov satisface

$$\nu \leq h,$$

donde h es la función curvatura media sobre $(\partial B_r, g)$. La igualdad se tiene si y solo si B_r está dotada con la métrica usual de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Del Teorema 2.2 tenemos

$$\nu(B_r, g) \leq \nu(B_r, g_o).$$

Del teorema anterior y el Lema 2.3,

$$\nu(B_r, g_o) \leq \frac{f_o'(r)}{f_o(r)} \leq \frac{\frac{\partial f}{\partial s}(r,w)}{f(r,w)} = h.$$

Es fácil verificar que la igualdad se da si y solo si $f(s,w)=s$. ☑

Agradecimientos. El autor agradece a la Universidad del Valle por el soporte dado para la realización del presente trabajo.

Referencias

[1] Escobar J.F., "The Geometry of the first Non-Zero Stekloff Eigenvalue", *J. Funct. Anal.* 150 (1997), no. 2, 544–556.

[2] Escobar J.F., "A comparison theorem for the first non-zero Steklov Eigenvalue", *J. Funct. Anal.* 178 (2000), no. 1, 143–155.

[3] Montaño O.A., "The First Non-zero Stekloff Eigenvalue for conformal metrics on the ball", *Preprint.*

[4] Payne L.E., "Some isoperimetric inequalities for harmonic functions", *SIAM J. Math. Anal.* 1 (1970), 354–359.

[5] Stekloff M.W., "Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 19 (1902), 445–490.

[6] Schoen R. and Yau S.T., *Lectures on Differential Geometry*, International Press, 1994.

[7] Weinstock R., "Inequalities for a classical eigenvalue problem", *J. Rational Mech. Anal.* 3 (1954), 745–753.