Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 31, No. 1, 2013, pág. 59–67

Una relación entre la distribución de Hofmann y distribución de Panjer

José Alfredo Jiménez Moscoso*
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Bogotá, Colombia

Resumen. Uno de los objetivos principales de la teoría del riesgo actuarial es modelar el número de reclamaciones por una distribución de probabilidad clásica; pero debido al mal ajuste estadístico obtenido a veces, en la literatura actuarial se propone utilizar la familia de distribuciones de Panjer, ya que para valores específicos de sus parámetros se pueden generar algunas distribuciones discretas. Este artículo muestra que la distribución de Panjer es un caso particular de la distribución de Hofmann.
Palabras claves: Distribución de Panjer, distribución de Hofmann, distribución Poisson-Pascal, símbolo de Pochhammer.
MSC2010: 62P05, 62E17, 62E15

A relation between the Hofmann's distribution and Panjer's distribution

Abstract. One of the main objectives of actuarial risk theory is to model the number of claims by a classical probability distribution, but due to poor statistical fit obtained sometimes, in actuarial literature it is proposed to use the Panjer's family of distributions, since for specific values of its parameters can generate some discrete distributions. This paper shows that the Panjer's distribution is a particular case of the Hofmann's distribution.
Keywords: Panjer's distribution, Hofmann's distribution, Poisson-Pascal distribution, Pochhammer's symbol.

1. Introducción

El algoritmo dado en [8], empleado en la teoría de riesgo actuarial, es una fórmula recursiva para determinar la función de probabilidad asociada al número de reclamos. Esta familia de distribuciones permite generar otras distribuciones conocidas, como la de

* *E-mail*: josajimenezm@unal.edu.co.
Recibido: 11 de abril de 2013, Aceptado: 18 de junio de 2013.

Poisson, la Binomial y la Binomial Negativa con parámetros apropiados. Por otra parte, la familia de distribuciones de Hofmann, empleada también para modelar número de reclamos, permite generar la distribución de Poisson, la de Poisson Inversa Gaussianna, la Binomial Negativa y la de Polya-Aeppli (ver [15]).

En este artículo se muestra que la familia de distribuciones de Panjer es un caso particular de la familia de distribuciones de Hofmann.

2. Familia de distribuciones de Panjer

[7] presenta una distribución de probabilidad que satisface la siguiente propiedad:

$$P[X = x+1] = \frac{a+bx}{x+1} P[X = x], \qquad \forall\, x \geq 0, \tag{1}$$

donde $a \geq 0$, $b < 1$. Se dice que una variable aleatoria X que satisface (1) pertenece a la familia de distribuciones de Katz, y se denota por "$X \sim K(a,b)$". Usando la reparametrización

$$a = \alpha + \beta \qquad \text{y} \qquad b = \alpha,$$

y sustituyendo en (1) se llega a

$$P[X = x+1] = \left(\alpha + \frac{\beta}{x+1}\right) P[X = x], \qquad \forall\, x \geq 0. \tag{2}$$

Esta distribución coincide con la distribución dada en [8]. Las propiedades básicas de esta distribución han sido estudiadas en [11, 12, 13, 14].

Al reescribir la fórmula de recurrencia dada en (2), como

$$P[X = x] = \frac{\alpha}{x}\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right) P[X = x-1], \qquad \forall\, x \geq 1,$$

y emplearla de manera sucesiva, se tiene que

$$P[X = x] = \begin{cases} \dbinom{\frac{\beta}{\alpha} + x}{x} \alpha^x P[X = 0], & \text{si} \quad \alpha + \beta \neq 0, \\ \dfrac{\alpha^{x-1}}{x} P[X = 1], & \text{si} \quad \alpha + \beta = 0, \end{cases} \tag{3}$$

donde,

$$P[X = 0] = (1-\alpha)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}, \qquad \alpha < 1, \tag{4}$$

y

$$P[X = 1] = -\frac{\alpha}{\ln(1-\alpha)}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{5}$$

En la Tabla 1 se muestran los valores de α y β que aproximan un conjunto seleccionado de distribuciones bien conocidas.

Nombre de la Distribución	$P[X=x]$	**Valores Fijos**	
		α	β
Poisson	$\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$	0	λ
Binomial Negativa	$\binom{r+x-1}{x}p^r q^x$	$1-p$	$(r-1)q$
Geométrica	pq^x y $0<p<1$	$1-p$	0
Binomial	$\binom{m}{x}p^x q^{m-x},\ 0<p<1$	$-\frac{p}{q}$	$(m+1)\frac{p}{q}$
Logarítmica	$\dfrac{q^x}{x\,\ln(1-q)^{-1}}$ y $0<q<1$	q	$-q$

Tabla 1. Valores de α y β para algunas distribuciones.

3. Familia de distribuciones de Hofmann

En [4], el autor argumenta que la distribución dada en [5] no tiene relevancia práctica; sin embargo, Walhin [14], en el capítulo 5, muestra lo contrario.

En esta sección se supone que $N(t)$ es el número de reclamos que ocurren en el intervalo de tiempo $[0,t)$ con $t\geq 0$ y $N(0)=0$. Luego la probabilidad de que ocurran exactamente n reclamos viene dada por

$$P_n(t)=P\left[N(t)=n\right], \qquad n=0,1,2,\dots\ .$$

Definición 3.1. Se dice que una distribución de probabilidad para $N(t)$ proviene de una "Familia de Hofmann $\mathcal{H}\left(a,\,\mu,\,c\right)$", si puede ser expresada como

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \exp\left\{-\theta(t)\right\} & \theta(t) &= \int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau, \\ P_n\left(t\right) &= \frac{(-1)^n}{n!}\,t^n\,P_0^{(n)}\left(t\right), & n &= 1,2,3,\dots, \end{aligned} \tag{6}$$

donde $P_0^{(n)}\left(t\right)=\dfrac{d^n}{dt^n}P_0\left(t\right)$, $\lambda(\tau)$ es una función de 3 parámetros: $a\geq 0$, $\mu>0$ y $c\neq 0$ $\left(c>-\frac{1}{\tau},\,\tau>0\right)$, es derivable infinitamente y es dada por

$$\lambda\left(\tau\right)=\frac{\mu}{\left(1+c\,\tau\right)^{a}}, \qquad \forall\,\tau>0. \tag{7}$$

Teorema 3.2 (Método de recurrencia). *Si la distribución de probabilidad del número $N(t)$ de reclamos cumple la expresión (6), su función de probabilidad satisface la relación*[1]

$$P_{n+1}\left(t\right)=\frac{t\,\lambda(t)}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{a+k-1}{k}\left(\frac{c\,t}{1+c\,t}\right)^{k}P_{n-k}\left(t\right), \tag{8}$$

[1] Este resultado coincide con el obtenido en [14].

siendo a, μ y c constantes escogidas convenientemente para pertenecer a la familia de Hofmann $\mathcal{H}\,(a,\,\mu,\,c)$.

Demostración. Las derivadas de orden superior de la función $\lambda(t)$ satisfacen

$$\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{d^n}{dt^n}\,\lambda(t) = \binom{a+n-1}{n}\left(\frac{c}{1+ct}\right)^n \lambda(t), \qquad a \neq 0. \tag{9}$$

Al emplear la *regla de Leibniz para la derivada de un producto* dada en [1], se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\,P_0\,(t) &= \frac{d^n}{dt^n}\,[-\lambda(t)\,P_0\,(t)] \\
&= -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{d^k}{dt^k}\,\lambda(t)\right)\left(\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\,P_0\,(t)\right) \\
&= \lambda(t)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}\left(\frac{c}{1+ct}\right)^k \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}P_0\,(t)\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Esta expresión permite calcular las probabilidades de manera recursiva como sigue:

$$\begin{aligned}
P_{n+1}\,(t) =& \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\,t^{n+1}\,\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}P_0\,(t) \\
=& t\,\lambda(t)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n+k}}{(n+1)!}\,k!\binom{a+k-1}{k}\left(\frac{ct}{1+ct}\right)^k t^{n-k}\,\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}P_0\,(t) \\
=& t\,\lambda(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n+1)!}\binom{a+k-1}{k}\left(\frac{ct}{1+ct}\right)^k \frac{(-1)^{n-k}\;t^{n-k}}{(n-k)!}\,\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}P_0\,(t) \\
=& \frac{1}{n+1}\,\frac{\mu\,t}{(1+c\,t)^a}\sum_{k=0}^{n}\binom{a+k-1}{k}\left(\frac{c\,t}{1+c\,t}\right)^k P_{n-k}\,(t)\,.
\end{aligned}$$

☑

Proposición 3.3. *Si se supone que los parámetros de la distribución de Hofmann son $a=1$,*

$$ct = \frac{\alpha}{1-\alpha} \qquad y \qquad \mu t = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha}, \tag{11}$$

con $\alpha < 1$, se obtiene la distribución de Panjer.

Demostración. La expresión (8) se puede reescribir como

$$P_{n+1}\,(t) = \frac{t\,\lambda(t)}{n+1}\left[P_n\,(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{a+j}{j+1}\left(\frac{c\,t}{1+c\,t}\right)^{j+1} P_{n-1-j}\,(t)\right]. \tag{12}$$

Tomando $a=1$ y reemplazando en la expresión (7) se obtiene

$$\lambda(\tau) = \frac{\mu}{1+c\tau}, \qquad \forall\,\tau > 0.$$

Luego la expresión (12) queda

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) =& \frac{1}{n+1}\frac{\mu\, t}{1+c\, t}\left[P_n(t) + \frac{c\, t}{1+c\, t}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{c\, t}{1+c\, t}\right)^j P_{n-1-j}(t)\right] \\ =& \frac{1}{n+1}\frac{\mu\, t}{1+c\, t}\left[1+n\frac{c}{\mu}\right] P_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{c\, t}{1+c\, t}\left[\frac{\mu}{c}+n\right] P_n(t) \\ =& \frac{c\, t}{1+c\, t}\left[1+\frac{1}{n+1}\frac{\mu\, t - c\, t}{c\, t}\right] P_n(t); \end{aligned} \tag{13}$$

nótese que esta distribución coincide con la fórmula de recurrencia dada en (2) con parámetros

$$\alpha = \frac{c\, t}{1+c\, t}, \qquad \beta = \frac{\mu\, t - c\, t}{1+c\, t}.$$ ☑

Proposición 3.4. *Si $a=1$ y $c \neq 0$, entonces la función de probabilidad de $N(t)$ satisface la igualdad*

$$P_n(t) = \frac{\Gamma(\mu/c+n)}{n!\,\Gamma(\mu/c)}\left(\frac{c\, t}{1+c\, t}\right)^n P_0(t), \qquad n \geq 1, \tag{14}$$

donde $\Gamma(\cdot)$ denota la función Gamma.

Demostración. La fórmula (13) puede reescribirse como

$$P_n(t) = \frac{c\, t}{1+c\, t}\frac{1}{n}\left[(n-1)+\frac{\mu}{c}\right] P_{n-1}(t), \qquad n \geq 1;$$

al emplearla de manera sucesiva, se tiene que

$$\begin{aligned} P_1(t) =& \frac{c\, t}{1+c\, t}\left(\frac{\mu}{c}\right) P_0(t) \\ P_2(t) =& \frac{c\, t}{1+c\, t}\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{c}+1\right) P_1(t) = \left(\frac{c\, t}{1+c\, t}\right)^2 \frac{1}{2!}\left(\frac{\mu}{c}\right)\left(\frac{\mu}{c}+1\right) P_0(t) \\ &\vdots \\ P_n(t) =& \left(\frac{c\, t}{1+c\, t}\right)^n \frac{1}{n!}\prod_{m=0}^{n-1}\left(\frac{\mu}{c}+m\right) P_0(t) \qquad n = 1, 2, \ldots\ . \end{aligned}$$

Usando el *símbolo de Pochhammer* dado en [1], se tiene que

$$\begin{aligned} P_n(t) =& \frac{(\mu/c)_n}{n!}\left(\frac{c\, t}{1+c\, t}\right)^n P_0(t) = \frac{\Gamma(\mu/c+n)}{n!\,\Gamma(\mu/c)}\left(\frac{c\, t}{1+c\, t}\right)^n P_0(t) \\ =& \binom{\frac{\mu}{c}+n-1}{n}\left(\frac{c\, t}{1+c\, t}\right)^n P_0(t), \end{aligned}$$

la cual coincide con la expresión dada en (3). ☑

3.1. Casos especiales

Si $a = 1$, al reemplazar en la expresión (7) se obtiene

$$\lambda(\tau) = \frac{\mu}{1 + c\tau}, \qquad \forall\, \tau > 0. \tag{15}$$

Por lo tanto $P_0\,(t) = (1 + ct)^{-\frac{\mu}{c}}$, luego:

1. Si $c \to 0$, se tiene que

   $$P_0\,(t) = \lim_{c\to 0}\,(1 + ct)^{-\frac{\mu}{c}} = \lim_{c\to 0}\left[(1 + ct)^{\frac{1}{ct}}\right]^{-\mu\,t} = e^{-\mu\,t};$$

   al reemplazar en la expresión (6), se obtiene

   $$P_n\,(t) = \frac{(\mu\,t)^n}{n!}\, e^{-\mu\,t}, \tag{16}$$

   la cual también corresponde a la distribución de Poisson con media $\mu\,t$.

2. Cuando $c \neq 0$ y $-\frac{\mu}{c} = m \in \mathbb{Z}$, se obtiene que

   $$\frac{d^n}{dt^n}P_0\,(t) = \frac{m!}{(m-n)!}\, c^n\,\left(1 + ct\right)^{m-n}, \qquad m \geq n;$$

   al reemplazar en la expresión (6), se llega a

   $$P_n\,(t) = \binom{m}{n}\,(-c\,t)^n\,\left(1 + c\,t\right)^{m-n}, \tag{17}$$

   la cual coincide con la distribución Binomial con parámetros

   $$m = -\,\frac{\mu}{c} \qquad \text{y} \qquad q = 1 + c\,t.$$

3. Cuando $c \neq 0$ y $\frac{\mu}{c} > 0$, se tiene que

   $$\frac{d^n}{dt^n}P_0\,(t) = (-1)^n\,\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{c} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{c}\right)}\left(\frac{c}{1 + ct}\right)^n\,(1 + ct)^{-\frac{\mu}{c}};$$

   al reemplazar en la expresión (6), se obtiene

   $$P_n\,(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{c} + n\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{\mu}{c}\right)}\left(\frac{c\,t}{1 + c\,t}\right)^n\,(1 + c\,t)^{-\frac{\mu}{c}}, \tag{18}$$

   la cual coincide con la distribución Binomial Negativa con parámetros

   $$r = \frac{\mu}{c} \qquad \text{y} \qquad p = \frac{1}{1 + c\,t}.$$

4. Función generadora de probabilidad

En esta sección se determina la función generatriz de probabilidad de la distribución de Hofmann.

Teorema 4.1. *Si la distribución de probabilidad del número $N(t)$ de reclamos satisface la expresión* (6)*, su función generatriz de probabilidad es*

$$G(r;t) = P_0\left[(1-r)\,t\right], \tag{19}$$

siendo a, μ y c constantes escogidas convenientemente para pertenecer a la familia de Hofmann $\mathcal{H}(a,\,\mu,\,c)$.

Demostración. Al calcular la función generatriz de probabilidad de $N(t)$, se tiene

$$\begin{aligned} G(r;t) =& \sum_{j=0}^{\infty} r^j\, P_j(t) = P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} r^j\, P_j(t) \\ =& P_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1}\, P_{n+1}(t)\,; \end{aligned}$$

si se deriva esta expresión respecto a r y se usa (8), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} G(r;t) =& \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{\mu t}{(1+ct)^a} \sum_{k=0}^{n} \binom{a+k-1}{k} \left(\frac{ct}{1+ct}\right)^k P_{n-k}(t) \\ =& \frac{\mu t}{(1+ct)^a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{a+k-1}{k} \left(\frac{ct}{1+ct}\right)^k r^n\, P_{n-k}(t) \\ =& \frac{\mu t}{(1+ct)^a} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a+k-1}{k} \left(\frac{r\,ct}{1+ct}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty} r^m\, P_m(t) \\ =& \frac{\mu t}{(1+ct)^a} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a+k-1}{k} \left(\frac{r\,ct}{1+ct}\right)^k G(r;t)\,; \end{aligned}$$

usando la siguiente expresión, dada en [3],

$$(\alpha-\beta)^{-r} = \alpha^{-r}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-r} = \alpha^{-r}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{k}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k, \tag{20}$$

se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial r} G(r;t) = \mu\, t\, \left(1+ct-r\,ct\right)^{-a} G(r;t)\,;$$

si se resuelve esta ecuación diferencial sujeta a $G(0;t) = P_0(t)$, se llega a

$$G(r;t) = \exp\left\{-\int_t^{(1-r)t} \frac{\mu}{(1+c\nu)^a}\, d\nu\right\} P_0(t)\,.$$

Se satisface que $G(1;t) = 1$. ☑

4.2. Caso especial

Si $a > 1$, al sustituir en la expresión (7) se tiene que

$$\lambda(\tau) = \frac{\mu}{(1+c\tau)^a}, \qquad \forall\, \tau > 0;$$

luego

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{\mu}{(1+c\tau)^a} d\tau = \frac{\mu}{c(a-1)}\left[1 - \frac{1}{(1+ct)^{a-1}}\right].$$

Por lo tanto,

$$G\,(r;t) = P_0\,[(1-r)\;t] = \exp\left\{\frac{\mu}{c(a-1)}\left[\frac{1}{(1-ct(r-1))^{a-1}} - 1\right]\right\}, \tag{21}$$

la cual coincide con la función generatriz de probabilidad de la distribución de Poisson-Pascal (véase [6, 9, 14]).

5. Conclusiones

La familia de distribuciones de Hofmann permite identificar de manera sencilla la distribución de probabilidad asociada a un conjunto de datos empíricos. Cuando el parámetro $a = 1$ se obtiene la familia de distribuciones de Panjer, y no solamente la binomial negativa.

Los desarrollos teóricos obtenidos en este artículo permiten hacer uso de la familia de distribuciones de Hofmann en un amplio campo de acción, por ejemplo, en el cálculo de probabilidades.

6. Agradecimientos

El autor agradece las observaciones realizadas por los árbitros confidenciales de la ***Revista Integración*** a la versión preliminar de este trabajo, los cuales ayudaron a clarificar la versión actual.

Referencias

[1] Abramowitz M. and Stegun I., *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York, 1965.

[2] Evans D.A., "Experimental evidence concerning contagious distributions in ecology", *Biometrika* 40 (1953), 186–211.

[3] Fisher R.A., "The negative binomial distribution", *Ann. Eugenics* 11 (1941), 182–187.

[4] Grandell J., *Mixed Poisson Processes*, CRC Monographs on Statistics & Applied Probability, Chapman and Hall, 1997.

[5] Hofmann M., "Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung", *Mitt. Verein. Schweiz. Versich.-Math.* 55 (1955), 499–575.

[6] Katti S.K. and Gurland J., "The poisson pascal distribution", *Biometrics* 17 (1961), no. 4, 527–538.

[7] Katz L., "Unified treatment of a broad class of discrete probability distributions", in *Classical and Contagious Discrete Distributions Vol. I*, (ed. Patil, G.) Stat. Publishing Soc., (1965) 175–182.

[8] Panjer H.H., "Recursive evaluation of a family of compound distributions", *Astin Bull.* 12 (1981), no. 1, 22–26.

[9] Panjer H.H., "Models of claim frequency", *Actuar. Sci.* 39 (1986), 115–125.

[10] Schmidt K.D. and Zocher M., "Loss reserving and Hofmann distributions", *Schweiz. Aktuarver. Mitt.* 2 (2005), no. 2, 127–162.

[11] Sundt B., "On some extensions of Panjer's class of counting distributions', *Astin Bull.* 22 (1992), 61–80.

[12] Sundt B., "On multivariate Panjer's recursions", *Astin Bull.* 29 (1999), 29–46.

[13] Sundt B. and Jewell W.S., "Further results on recursive evaluation of compound distributions", *Astin Bull.* 12 (1981), no. 1, 27–39.

[14] Walhin J.F., "Recursions for actuaries and applications in the field of reinsurance and bonus-malus systems", Thesis (Ph.D.), Université catholique de Louvain, Institut de statistique, Louvain-la-Neuve, 2000.

[15] Walhin J.F. and Paris J., "Processus de Poisson melange et formules unifiees pour systemes bonus-malus", *Bull. français d'actuariat* 3 (1999), no. 6, 35–43.