Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 19, No 2, p. 57–67, julio-diciembre de 2001

Soluciones de las ecuaciones de Einstein mediante el procedimiento de Papapetrou

Guillermo A. González*

Resumen

Se presenta un procedimiento, debido a Papapetrou, mediante el cual se pueden generar soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío para espacio-tiempos estacionarios axialmente simétricos partiendo de soluciones de Weyl correspondientes a espacio-tiempos estáticos axialmente simétricos. Con el fin de ilustrar el procedimiento, se presentan tres ejemplos específicos, obtenidos tomando soluciones simples de Weyl conocidas en la literatura como las soluciones de Chazy-Curzon, Zipoy-Voorhees y Bonnor-Sackfield; sin embargo, las soluciones obtenidas no son asintóticamente planas, lo cual hace que su interpretación física en términos de campos gravitacionales producidos por distribuciones finitas de materia no sea muy clara.

1 Introducción

Un problema de gran importancia en la teoría general de la relatividad es el de la obtención de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, las cuales describen el comportamiento del campo gravitacional en concordancia con el principio de la relatividad; ahora bien, debido a la naturaleza de dichas ecuaciones, un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales parciales, la obtención de soluciones exactas es un problema sorprendentemente complicado, que sólo ha sido resuelto en casos simples altamente simétricos.

*Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia; Email: guillego@uis.edu.co

Un ejemplo de la situación anterior se presenta cuando se consideran espacio-tiempos estáticos con simetría axial, de modo que la métrica está caracterizada por dos funciones que dependen únicamente de dos variables, y así las ecuaciones de Einstein se reducen a un sistema relativamente simple de resolver, el cual fue estudiado originalmente por Weyl [2, 3]. Las soluciones obtenidas en este caso se denominan soluciones de Weyl, y existe en la literatura gran cantidad de trabajos dedicados a encontrar soluciones particulares de este sistema de ecuaciones (ver, por ejemplo, la referencia [1] para una revisión de la literatura correspondiente). Para este sistema también es posible encontrar soluciones generales en diferentes sistemas de coordenadas, como es el caso considerado en las referencias [4] y [5].

Una situación mas complicada se presenta al considerar espacio-tiempos axialmente simétricos pero estacionarios, en lugar de estáticos. En este caso, la métrica está caracterizada por tres funciones dependientes de dos variables, y así el sistema a resolver presenta una mayor complejidad que en el caso anterior. Existen numerosos trabajos en la literatura dedicados a estudiar este sistema de ecuaciones y obtener soluciones particulares. De nuevo, la referencia [1] presenta una adecuada revisión de la literatura correspondiente.

El propósito del presente trabajo es presentar un procedimiento, originalmente desarrollado por Papapetrou [6], mediante el cual se pueden generar soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío para espacio-tiempos estacionarios axialmente simétricos partiendo de soluciones de Weyl. El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 presentamos el sistema de ecuaciones de Einstein correspondiente a la situación considerada; luego, en la siguiente sección presentamos el procedimiento de generación de soluciones estacionarias a partir de soluciones estáticas; con el fin de ilustrar el procedimiento, se presentan en la sección 4 tres ejemplos específicos de soluciones, obtenidas tomando soluciones de Weyl simples conocidas en la literatura. Finalmente, en la sección 5, resumimos los resultados obtenidos.

2 El sistema de ecuaciones de Einstein

Consideremos un espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico, cuyo elemento de línea puede escribirse en la forma de Weyl-Lewis-Papapetrou [1]

$$ds^2 = -f(dt + \omega d\varphi)^2 + f^{-1}[\rho^2 d\varphi^2 + e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2)], \qquad (2.1)$$

donde $x^a = (t, \varphi, \rho, z)$ son coordenadas cuasi-cilíndricas y las funciones f, ω y γ dependen sólo de las coordenadas ρ y z. La naturaleza cuasi-cilíndrica [7] de las coordenadas significa que $\rho = 0$ sobre el eje de simetría y, para z fijo, ρ crece monótonamente al infinito, mientras que z, para ρ fijo, crece monótonamente en el intervalo $(-\infty, \infty)$. La coordenada φ varía en el intervalo usual $[0, 2\pi)$.

Las ecuaciones de Einstein en el vacío son equivalentes al sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\nabla \cdot [\rho^{-2} f^2 \nabla \omega] = 0, \tag{2.2a}$$

$$f\nabla^2 f - \nabla f \cdot \nabla f + \rho^{-2} f^4 \nabla\omega \cdot \nabla\omega = 0, \tag{2.2b}$$

$$4\gamma_{,\rho} \;=\; \rho f^{-2}({f_{,\rho}}^2 - {f_{,z}}^2) - \rho^{-1} f^2({\omega_{,\rho}}^2 - {\omega_{,z}}^2), \tag{2.3a}$$

$$2\gamma_{,\rho} \;=\; \rho f^{-2} f_{,\rho} f_{,z} - \rho^{-1} f^2 \omega_{,\rho}\omega_{,z}, \tag{2.3b}$$

donde

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

es el operador diferencial tridimensional usual en coordenadas cilíndricas y $\{\hat{\mathbf{e}}_\rho, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_z\}$ son los vectores unitarios coordenados.

Ahora bien, si ψ es cualquier función razonable independiente de φ, se satisface la identidad

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \times \nabla\psi) = 0 \; ; \tag{2.4}$$

así entonces, la ecuación (2.2a) puede considerarse como la condición de integrabilidad para la existencia de la función ψ definida por [8]

$$\rho^{-1} f^2 \nabla\omega = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \times \nabla\psi \; . \tag{2.5}$$

Puesto que esta relación es equivalente a

$$f^{-2}\nabla\psi = -\rho^{-1}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \times \nabla\omega \; , \tag{2.6}$$

la identidad (2.4) implica la ecuación de campo

$$\nabla \cdot (f^{-2}\nabla\psi) = 0 \tag{2.7}$$

para el nuevo potencial ψ.

Reescribiendo entonces el sistema de ecuaciones (2.2a)-(2.3b) en términos del nuevo potencial ψ, tenemos:

$$f\nabla^2\psi - 2\nabla f \cdot \nabla\psi = 0, \tag{2.8a}$$

$$f\nabla^2 f - \nabla f \cdot \nabla f + \nabla\psi \cdot \nabla\psi = 0, \tag{2.8b}$$

$$\omega_{,\rho} = \rho f^{-2} \psi_{,z} \; , \tag{2.9a}$$

$$\omega_{,z} = -\rho f^{-2} \psi_{,\rho} \; , \tag{2.9b}$$

$$4\gamma_{,\rho} = \rho f^{-2} [\; (f_{,\rho}{}^2 - f_{,z}{}^2) + (\psi_{,\rho}{}^2 - \psi_{,z}{}^2) \;] \; , \tag{2.10a}$$

$$2\gamma_{,\rho} = \rho f^{-2} [\; f_{,\rho} f_{,z} + \psi_{,\rho} \psi_{,z} \;] \; . \tag{2.10b}$$

Como se puede verificar fácilmente, la condición de integrabilidad del sistema sobredeterminado de ecuaciones diferenciales (2.9a)-(2.9b) es equivalente a la ecuación (2.8a), mientras que la condición de integrabilidad del sistema sobredeterminado de ecuaciones diferenciales (2.10a)-(2.10b) es equivalente a la ecuación (2.8b); así entonces, la existencia de soluciones del sistema completo de ecuaciones diferenciales (2.8a)-(2.10b) está garantizada siempre y cuando existan soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (2.8a)-(2.8b).

3 El procedimiento de Papapetrou

Un caso particular del sistema de ecuaciones diferenciales anterior ocurre cuando $\omega = 0$, el cual corresponde al caso de un espacio-tiempo estático axialmente simétrico [1]. Introduciendo una nueva función $U(\rho, z)$ a través de la relación $f = e^{2U}$, las ecuaciones de Einstein toman la forma simple

$$\nabla^2 U = 0 \; , \tag{3.1a}$$

$$\gamma_{,\rho} = \rho (U_{,\rho}{}^2 - U_{,z}{}^2) \; , \tag{3.1b}$$

$$\gamma_{,z} = 2\rho U_{,\rho} U_{,z}, \tag{3.1c}$$

conocidas como Ecuaciones de Weyl [2, 3], cuya solución general en coordenadas esferoidales generalizadas fue estudiada en [5]. Es fácil ver que la condición de integrabilidad del sistema sobredeterminado de ecuaciones diferenciales (3.1b)-(3.1c) es equivalente a la ecuación (3.1a), que es la ecuación de Laplace tridimensional en coordenadas cilíndricas, cuyas soluciones son ampliamente conocidas, lo cual garantiza la existencia de soluciones para el sistema de ecuaciones de Weyl.

Vamos ahora a presentar un procedimiento debido a Papapetrou [6] mediante el cual, dada una solución del sistema de ecuaciones de Weyl (3.1a)-(3.1c), puede obtenerse una solución del sistema de ecuaciones (2.8a)-(2.10b) para la métrica (2.1). Con el fin de simplificar el sistema de ecuaciones a resolver, supongamos una relación funcional de la forma $f = f(\psi)$, de tal manera que el sistema de ecuaciones (2.8a)-(2.8b) implica que $f = f(\psi)$ debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria no lineal

$$ff'' + (f')^2 + 1 = 0, \tag{3.2}$$

donde $f' = df/d\psi$, cuya solución puede escribirse en la forma

$$f^2(\psi) = k^2 - \psi^2 \ , \tag{3.3}$$

con k una constante positiva arbitraria.
Introduciendo ahora una nueva función $U_w = U_w(\psi)$ tal que

$$\nabla^2 U_w = 0, \tag{3.4}$$

puede resolverse fácilmente el sistema (2.8a)-(2.8b), obteniendose finalmente las expresiones

$$f \ = \ k \ \text{sech} \ kU_w \ , \tag{3.5a}$$

$$\psi \ = \ k \ \tanh \ kU_w \ , \tag{3.5b}$$

que permiten obtener f y ψ en términos de la función U_w.
Utilizando estas expresiones en los sistemas de ecuaciones (2.9a)-(2.9b) y (2.10a)-(2.10b), obtenemos

$$\omega_{,\rho} \ = \ \rho \ U_{w,z} \ , \tag{3.6a}$$

$$\omega_{,z} \ = \ - \ \rho \ U_{w,\rho} \ , \tag{3.6b}$$

$$4\gamma_{,\rho} \ = \ k^2\rho \ ({U_{w,\rho}}^2 - {U_{w,z}}^2) \ , \tag{3.7a}$$

$$2\gamma_{,\rho} \ = \ k^2\rho \ U_{w,\rho} \ U_{w,z} \ , \tag{3.7b}$$

completando así la determinación de la métrica (2.1) en términos de la función U_w.
Si definimos ahora la función γ_w mediante la relación

$$\gamma_w = \frac{4\gamma}{k^2} \ , \tag{3.8}$$

es fácil ver que γ_w satisface el sistema de ecuaciones (3.1b)-(3.1c), lo cual prueba el siguiente resultado:

Teorema 3.1 *Dada una solución $\{U_w, \gamma_w\}$ del sistema de ecuaciones de Weyl (3.1a)-(3.1c), existe una solución $\{f, \gamma, \omega\}$ del sistema de ecuaciones de Einstein (2.2a)-(2.3b) definida mediante las relaciones*

$$f = k \text{ sech } kU_w \ , \qquad \gamma = \frac{k^2\gamma_w}{4},$$

donde k es una constante positiva arbitraria y ω es solución del sistema de ecuaciones (3.6a)-(3.6b).

4 Algunas soluciones simples

Con el fin de obtener soluciones del sistema de ecuaciones de Weyl es útil ver que (3.1a) es la ecuación de Laplace en un espacio plano tridimensional, así que U_w puede considerarse como el potencial gravitacional Newtoniano para una fuente apropiada con simetría axial. Ahora bien, habiendo obtenido una solución U_w de (3.1a), γ_w puede obtenerse fácilmente resolviendo el sistema de ecuaciones (3.1b)-(3.1c).

Vamos entonces a usar expresiones para el potencial gravitacional newtoniano correspondiente a distribuciones simples de materia para obtener tres soluciones de Weyl y, a partir de estas, usar el procedimiento de Papapetrou para generar tres soluciones para espacio-tiempos estacionarios axialmente simétricos de la forma (2.1). Como veremos con los ejemplos considerados, las soluciones obtenidas no son asintóticamente planas, lo cual hace que su interpretación física en términos de campos gravitacionales producidos por distribuciones finitas de materia no sea muy clara.

4.1 Solución tipo Chazy-Curzon

El potencial newtoniano más simple que podemos considerar es el debido a una masa puntual m localizada en el origen, el cual en coordenadas cilíndricas puede escribirse como:

$$U_w = -\frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \ , \tag{4.1}$$

de modo que la solución correspondiente para la función γ_w está dada por

$$\gamma_w = -\frac{m^2\rho^2}{2(\rho^2 + z^2)^2}. \tag{4.2}$$

La solución de Weyl correspondiente a este par de funciones $\{U_w, \gamma_w\}$ fue obtenida independientemente por Chazy y Curzon en 1924 [9, 10].

La solución anterior es asintóticamente plana [1], como se puede ver fácilmente si se escribe en términos de las variables (R, θ) definidas por

$$\rho = R\ \cos\theta\ , \qquad\qquad z = R\ \mathrm{sen}\theta\ ,$$

y se toma el límite cuando $R \to \infty$, obteniendo la expresión

$$ds_\infty^2 = -dt^2 + \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 + dz^2\ , \tag{4.3}$$

la cual es la métrica de Minkowski en coordenadas cilíndricas; sin embargo,

$$\lim_{R\to 0} U_w = \lim_{R\to 0} \gamma_w = -\ \infty\ ,$$

así que la solución presenta una singularidad puntual en el origen.

Mediante el teorema de la sección anterior, obtenemos una solución del sistema de ecuaciones de Einstein (2.2a)-(2.3b) definida como

$$f \;=\; k\ \mathrm{sech}\left\{\frac{km}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right\}\ , \tag{4.4a}$$

$$\gamma \;=\; -\frac{k^2 m^2 \rho^2}{8(\rho^2+z^2)^2}\ , \tag{4.4b}$$

$$\omega \;=\; b - \frac{mz}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\ , \tag{4.4c}$$

donde b es una constante de integración arbitraria. La solución no es asintóticamente plana, puesto que cuando $R \to \infty$ tenemos

$$ds_\infty^2 = -k(dt+\omega d\varphi)^2 + k^{-1}(\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 + dz^2)\ ,$$

y presenta también la misma singularidad puntual de la solución de Chazy-Curzon original.

4.2 Solución tipo Zipoy-Voorhees

Una segunda solución de Weyl puede obtenerse considerando el potencial gravitacional de una barra delgada de longitud $2a$ situada en el eje z con extremos en $z = a$ y $z = -a$, y puede escribirse como

$$U_w \;=\; \frac{\mu}{2}\ \ln\left[\frac{x-1}{x+1}\right]\ , \tag{4.5a}$$

$$\gamma_w \;=\; \frac{\mu^2}{2}\ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right]\ , \tag{4.5b}$$

donde μ es una constante positiva y (x, y) son las coordenadas esferoidales prolatas, relacionadas con las coordenadas cilíndricas mediante la relación

$$\rho^2 = a^2(x^2 - 1)(1 - y^2) \ , \qquad z = axy \ ,$$

con $x \geq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$.

Esta solución, obtenida por Zipoy [11] y Voorhees [12] y conocida también como la solución μ de Weyl [2, 3], es asintóticamente plana, como se puede ver fácilmente si se toma el límite cuando $x \to \infty$, obteniendo de nuevo la métrica de Minkowski (4.3). Igualmente,

$$\lim_{x \to 1} U_w = \lim_{x \to 1} \gamma_w \to \ -\infty \ ,$$

así que la solución presenta una singularidad en el eje z, con extremos en $z = a$ y $z = -a$.

La correspondiente solución de Papapetrou, obtenida mediante el teorema de la sección anterior, está dada por

$$f = \frac{2k(x^2 - 1)^{k\mu/2}}{(x - 1)^{k\mu} + (x + 1)^{k\mu}}, \tag{4.6a}$$

$$\gamma = \frac{k^2\mu^2}{8} \ln \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right] \ , \tag{4.6b}$$

$$\omega = a\mu y + b \ , \tag{4.6c}$$

donde b es una constante de integración arbitraria. Como en el caso anterior, la solución no es asintóticamente plana, puesto que cuando $x \to \infty$ se obtiene de nuevo la expresión asintótica

$$ds_\infty^2 = -k(dt + \omega d\varphi)^2 + k^{-1}(\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 + dz^2) \ .$$

Igualmente la solución presenta la misma singularidad sobre el eje z de la solución de Zipoy-Voorhees, como puede verse tomando el límite cuando $x \to 1$.

4.3 Solución tipo Bonnor-Sackfield

Finalmente, otra solución de Weyl simple puede obtenerse considerando el potencial gravitacional de un disco delgado de radio a situado en el plano

$z = 0$, y puede escribirse como

$$U_w = -\frac{i\mu}{2} \ln\left[\frac{\bar{x} - i}{\bar{x} + i}\right] , \tag{4.7a}$$

$$\gamma_w = -\frac{\mu^2}{2} \ln\left[\frac{\bar{x}^2 - 1}{\bar{x}^2 - y^2}\right] , \tag{4.7b}$$

donde μ es una constante positiva y $(\bar{x}, y)$ son las coordenadas esferoidales oblatas, relacionadas con las coordenadas cilíndricas mediante la relación

$$\rho^2 = a^2(\bar{x}^2 + 1)(1 - y^2) , \qquad z = a\bar{x}y .$$

con $\bar{x} \geq 0$ y $-1 \leq y \leq 1$.

Esta solución fue también obtenida por Zipoy [11] y Voorhees [12], e interpretada por Bonnor y Sackfield [13] como el campo gravitacional de un disco relativista. Esta solución también es asintóticamente plana, como se puede ver fácilmente si se toma el límite cuando $\bar{x} \to \infty$, obteniendo de nuevo la métrica de Minkowski (4.3); por otro lado, la solución es regular cuando $\bar{x} = 0$, o sea sobre el disco de radio a situado en el plano $z = 0$.

La correspondiente solución de Papapetrou está dada por

$$f = k \operatorname{sech}\left\{-k\mu\cot^{-1}\bar{x}\right\} , \tag{4.8a}$$

$$\gamma = -\frac{k^2\mu^2}{8} \ln\left[\frac{\bar{x}^2 - 1}{\bar{x}^2 - y^2}\right] , \tag{4.8b}$$

$$\omega = a\mu y + b , \tag{4.8c}$$

donde de nuevo b es una constante de integración arbitraria. Esta solución tampoco es asintóticamente plana, pues cuando $\bar{x} \to \infty$ nuevamente se obtiene la forma asintótica

$$ds^2_\infty = -k(dt + \omega d\varphi)^2 + k^{-1}(\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 + dz^2) ,$$

y, como la solución de Bonnor-Sackfield original, es regular sobre el disco de radio a situado en el plano $z = 0$.

5 Conclusiones

Se presentó en este trabajo un procedimiento, originalmente desarrollado por Papapetrou [6], mediante el cual se pueden generar soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío para espacio-tiempos estacionarios axialmente simétricos partiendo de soluciones de Weyl.

Con el fin de ilustrar el procedimiento, se presentaron tres ejemplos específicos de soluciones, obtenidas tomando algunas soluciones simples de Weyl conocidas en la literatura como las soluciones de Chazy-Curzon, Zipoy-Voorhees y Bonnor-Sackfield; sin embargo, las soluciones obtenidas no son asintóticamente planas, lo cual hace que su interpretación física en términos de campos gravitacionales producidos por distribuciones finitas de materia no sea muy clara.

Como se puede ver de los ejemplos considerados, el procedimiento presentado es de gran utilidad para generar, de manera relativamente simple, soluciones estacionarias axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein en el vacío, dada la gran cantidad de soluciones de Weyl disponibles en la literatura.

Ahora bien, un problema igualmente complicado de resolver es el de encontrar una adecuada interpretación física de las soluciones obtenidas. Este es un problema de gran importancia y al cual se dedican gran cantidad de trabajos en la actualidad. (Ver por ejemplo la referencia [14] para una revisión actualizada de la literatura correspondiente).

Una posible interpretación de las soluciones obtenidas en este trabajo dentro del contexto de los modelos relativistas de discos, con los cuales se han obtenido en los últimos años interpretaciones físicas razonables de algunas soluciones estáticas y estacionarias conocidas [15 - 22], está actualmente en consideración.

Referencias

[1] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, and M. McCallum. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge University Press, 1980.*

[2] H. Weyl. "Zur Gravitationstheorie". *Ann. Physik* **54**, 117 (1917).

[3] H. Weyl. "Bemerkung Uber die Axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen". *Ann. Physik* **59**, 185 (1919).

[4] H. Quevedo. "General static axisymetric solution of Einstein's vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates". *Phys. Rev. D* **39**, 2904 (1989).

[5] J. F. Ramos. *Solución general estática axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacio en coordenadas esferoidales generalizadas.* Trabajo de Grado en Física, Universidad Industrial de Santander (2000).

[6] A. Papapetrou. "Eine Rotationssymmetrische Lösung in der Allgemeinen Relativitätstheorie". *Ann. Physik* **12**, 309 (1953).

[7] T. Morgan, and L. Morgan. "The Gravitational Field of a Disk". *Phys. Rev.* **183**, 1097 (1969).

[8] F. J. Ernst. "New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem". *Phys. Rev.* **167**, 1175 (1968).

[9] J. Chazy. “Sur le Champ de Gravitation de Deux Masses Fixes dans la Théorie de la Relativité”. *Bull. Soc. Math. France.* **52**, 17 (1924).

[10] H. E. J. Curzon. “Cylindrical Solutions of Einstein’s Gravitation Equations”. *Proc. London Math. Soc.* **23**, 477 (1924).

[11] D. M. Zipoy. “Topology of Some Spheroidal Metrics”. *J. Math. Phys.* **7**, 1137 (1966).

[12] B. H. Voorhees. “Static Axially Symmetric Gravitational Fields”. *Phys. Rev. D* **2**, 2119 (1970).

[13] W. B. Bonnor, and A. Sackfield. “The Interpretation of Some Spheroidal Metrics”. *Comm. Math. Phys.* **8**, 338 (1968).

[14] J. Bičák. “Selected solutions of Einstein’s field equations: their role in general relativity and astrophysics”, in *Einstein’s Field Equations and Their Physical Implications*, ed. B. G. Schmidt, Lecture Notes in Physics, Vol. 540 (Springer Verlag, 2000).

[15] J. Bičák, D. Lynden-Bell, and J. Katz. “Relativistic Disks as Sources of Static Vacuum Spacetimes”. *Phys. Rev. D* **47**, 4334 (1993).

[16] J. Bičák, D. Lynden-Bell, and C. Pichon. “Relativistic Disks and Flat Galaxy Models”. *Mont. Not. R. Astron. Soc.* **265**, 126 (1993).

[17] J. Bičák and T. Ledvinka. “Relativistic Disks as Sources of the Kerr Metric”. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1669 (1993)

[18] C. Pichon and D. Lynden-Bell. “New Sources of Kerr and other Metrics: Rotating Relativistic Disks with pressure Support”. *Mont. Not. R. Astron. Soc.* **280**, 1007 (1996).

[19] G. A. González and P. S. Letelier. “Relativistic Static Thin Disks with Radial Stress Support”. *Class. Quantum. Grav.* **16**, 479 (1999).

[20] T. Ledvinka, M. Zofka, and J. Bičák. “Relativistic Disks as Sources of Kerr-Newman Fields”, in *Proceedings of the 8th Marcel Grossman Meeting in General Relativity*, ed. T. Piran (World Scientific, Singapore, 1999), pp.339-341.

[21] J. Katz, J. Bičák, and D. Lynden-Bell. “Disk Sources for Conformastationary Metrics”. *Class. Quantum Grav.* **16**, 4023 (1999)

[22] G. A. González and P. S. Letelier. “Rotating Relativistic Thin Disks”. *Phys. Rev. D* 62, 064025 (2000).