EL PARADIGMA HILBERTIANO EN ESPAÑA

Mariano HORMIGON
Seminario de Historia de la Ciencia
y de la Técnica de Aragón
Zaragoza

1. EL PARADIGMA HILBERTIANO

La síntesis que la comunidad matemática internacional realizó en los años finales del siglo XIX y primeros del XX —que en este trabajo se llama Paradigma Hilbertiano— es el resultado de un largo proceso de rupturas sucesivas del modelo clásico establecido. Dicho proceso, sinuoso, dilatado y difícil por las tremendas controversias que llevó emparejadas entre los matemáticos románticos y positivistas se zanjó por medio de una salida hacia delante, expresada en la importante comunicación de Hilbert al II Congreso de Matemáticos reunido en París en 1900[1].

En el II Congreso más que en ninguno de los celebrados en los años anteriores a la Primera Guerra Mundial se sentaron las bases de unos acuerdos mayoritariamente admitidos como de buen y riguroso sentido de producir Matemáticas.

Y aunque con una cierta aprensión de moverse en un terreno movedizo se aceptaron las nuevas bases que separaban de derecho las Matemáticas de cualesquiera otras esferas de pensamiento, por más que constantemente se acudiese a ellas para probar la consistencia del pensamiento matemático.

El caballo de Troya de la tensión entre ambos modelos matemáticos fue el concepto de espacio, que sufrió las oleadas sucesivas de los geómetras no euclidianos que fueron desmontando los perogullescos razonamientos de los beocios como los llamara Gauss. El hecho de que ese espacio físico único y verdadero donde todo era y tenía sentido se ampliase de una forma rigurosa y verdadera, pero difícilmente representable e imaginable, planteó de hecho a los matemáticos profesionales primero —y a todos los científicos después— que la Naturaleza podía ser —y era de hecho— muy diferente de las formas aparentes que el burgués sentido común aconsejaba. Significaba casi el límite de la locura[2]. Esa ruptura conceptual tan importante en todos los órdenes de la vida intelectual intentó ser neutralizada por la vía de la ridiculización, pero, necesariamente, había de triunfar.

No obstante, la batalla debía darse todavía en el terreno interno de las Matemáticas. El mismo Engels reconocía en uno de sus muy interesantes párrafos del Anti-Dühring que "sin duda, es exacto que las Matemáticas puras tienen un valor independiente de la experiencia particular de los individuos"[3], aunque naturalmente, adujese casi a continuación que no es exacto, ni aún en las Matemáticas puras, que el entendimiento se ocupe exclusivamente de lo que él mismo ha creado e imaginado.

La cuestión del espacio junto a otras cuestiones claves, como la de la resolución por radicales de la ecuación de quinto grado, la teoría de funciones y la de conjuntos o el concepto mismo del número real, por citar solamente algunos de los temas más destacados, señalaron la necesidad de redefinir las claves del conjunto de aspectos definitorios del Paradigma Matemático.

En el momento de la síntesis, las Matemáticas han pasado un claro rubicón en el que ya no se presume el conocimiento de los objetos —que para los griegos tenían que estar rigurosamente definidos— sino que se exige ese rigor a las relaciones que puedan establecerse entre los entes matemáticos. Otro aspecto de singular importancia en el desarrollo de las Matemáticas fue el de la nueva versión del punto de partida axiomático. Aquellas ideas "evidentes" que no necesitaban demostración y que llevaron a los matemáticos griegos incluso a cometer errores[4] se relativizaban al máximo dejando la cuestión de su veracidad al libre albedrío del autor. Pues, aunque como dijera Picard en 1920[5], las Matemáticas no podían dejar de ser una pieza básica del edificio de la filosofía natural, quedaba abierta la posibilidad de construir matemáticas con un determinado sistema de axiomas o sus contrarios. Semejante dosis de relativismo supuso una extensión enorme del campo de actuación de los matemáticos, aunque gran parte de los esfuerzos se derrocharan lamentablemente por carecer de significación en el terreno de la filosofía natural.

Otro de los ingredientes internos nuevos en el Paradigma Hilbertiano fue el instrumental. La búsqueda de una cimentación firme para el Análisis y el Algebra supuso la necesidad de rigorizar los conceptos de número y de estructura alumbrados a lo largo del siglo. De uno y otro campo se llegó a la Teoría de Conjuntos, en un principio proceloso ámbito lleno de conflictivas e incluso contradictorias paradojas. Mas la necesidad de extender los procesos matemáticos a otros campos de la Naturaleza, impuso el considerar la Teoría de Conjuntos como punto de partida para la construcción de las Matemáticas de la síntesis hilbertiana. Otro aporte de singular importancia plenamente ratificado por la práctica de los matemáticos fue el reconocimiento de que la solución de un problema podía ser la demostración de la imposibilidad de resolverlo. Algunos de los más famosos enigmas de la Historia de las Matemáticas terminaron de dilucidarse precisamente por esta vía. Problemas como la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo o la solución por radicales de la ecuación de quinto grado —que tanto trabajo habían dado a aficionados ávidos de gloria— quedaron perfectamente aclarados una vez que se admitió en la comunidad matemática que su solución era imposible.

También experimentaron una variación sustantiva los elementos externos del Paradigma. Los condicionantes exigidos desde la Grecia clásica sobre la necesidad de poder visualizar las verdades geométricas cayeron estrepitosamente ante las evidencias de las geometrías no euclídeas y los espacios n-dimensionales. En el paradigma Hilbertiano la única exigencia al discurso matemático fue la consistencia lógica interna, por más que su representación o su imaginación, en un primer momento, fueran de todo punto descabelladas.

Adquirieron asimismo una entidad sin precedentes los factores institucionales anexos a la comunidad matemática. Aunque con tímidas raíces en las estructuras del periodo de la Ilustración, la necesidad de formar matemáticos que atendieran las necesidades cada vez mayores de la sociedad impulsaron de manera decidida al establecimiento de centros de instrucción e investigación. Los matemáticos, en el mundo desarrollado, dejaron de ser exóticos miembros de las clases dominantes o jóvenes entusiastas con una cierta dosis de aventurerismo intelectual, para pasar a ser unos profesionales más.

Todo este conjunto de rupturas implicaron también una transformación de los objetivos finales del quehacer matemático. La búsqueda clásica de la verdad y la belleza o las revolucionarias metas de los geómetras ilustrados se habían diluído en el resbaladizo terreno de unas verdades que podían salir de unas proposiciones o sus contrarias. Esa relajación de objetivos necesariamente admitida por la comunidad matemática internacional daría muchos temas de estudio a los profesionales pero privaría a las Matemáticas de la honorabilidad que antaño habían tenido. Para los matemáticos, las Matemáticas seguían siendo bellas, pero de una belleza esotérica e inalcanzable para los no iniciados. También se buscaba que la conclusión de una cadena de proposiciones fuera verdadera pero ya no se hacían preguntas sobre la veracidad de las premisas de partida. Como resultado obvio se desprendió que el tema de la utilidad de las Matemáticas —tan sólo cien años antes consideradas claves para el desarrollo de la agricultura, la industria y el comercio— no debía de ser considerado, aunque, por supuesto, lo fueran.

2. EL PARADIGMA HILBERTIANO EN ESPAÑA

Las sucesivas crisis político-sociales del XIX español fueron la causa principal del retraso en la incorporación de los matemáticos españoles a la comunidad matemática internacional. Llama al asombro que la mutua proximidad de finales del XVIII y la primera década del XIX se fuera alejando sucesivamente. Josef Mariano Vallejo fue discípulo de Cauchy y amigo de Laplace en uno de sus exilios y, sin embargo, apenas si alguno de sus conocimientos fue recogido institucionalmente en el país[6]. Gumersindo Vicuña, en el tono exagerado característico del XIX español, afirmaba[7] que cuando se institucionalizaron los estudios científicos en España nuestro retraso respecto a Europa era ya de 300 años. Poco importa que la cifra fuera correcta porque en cualquier caso lo que está fuera de duda es el retraso enorme que en todas las áreas del pensamiento científico se tenía respecto a las comunidades científicas europeas e, incluso ya, respecto a la estadounidense.

El paradigma en el que se desenvolvían las Matemáticas españolas en el segundo tercio del siglo XIX era de un lagrangianismo desvaído sustentado por algunos textos —excelentes en su tiempo— de autores españoles o franceses[8] y por proclamas bien intencionadas sobre la conveniencia de los estudios de Matemáticas para el progreso del país.

Mas el conjunto de reformas institucionales que se produjeron en España en ese periodo de tiempo conmovieron algunas estructuras y se inició una leve progresión en la importación de algunas secciones —más que de teorías— y en la mejora de los textos. Rey Pastor adjudicó el inicio del proceso de modernización de las Matemáticas a Echegaray[9], construyendo el triunvirato reformador con Torroja Caballé y García de Galdeano. Como el propósito de esta comunicación es solamente el relatar el proceso de articulación en España del Paradigma Hilbertiano, se prescinde de los elementos polémicos respecto a la cantinela repetida como hueco sonsonete de la valoración de Rey Pastor. En otro trabajo de dimensiones más apropiadas[10] se aborda este tema con mayor extensión. Baste, pues, confirmar aquí que el juicio de Rey hipervalora los méritos reales de Echegaray y Torroja y, al igualarlos, desmerece los de García de Galdeano.

3. LA INFRAESTRUCTURA

Es obvio que la articulación del Paradigma finisecular exigía, además de los voluntarismos personales, un marco adecuado sobre el que poder construir unas Matemáticas harto distintas de las existentes hacia mediados de siglo. Y aunque con limitaciones —todavía no superadas en su totalidad en nuestros días— esos cambios institucionales se produjeron.

Entre dichos cambios cabría destacar como más relevantes los que se dieron en la componente asociativa a nivel profesional y los que tuvieron lugar en el sistema de enseñanza.

Por lo que hace a la primera componente hay que reseñar la influencia positiva que en la comunidad matemática tuvieron la creación de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias y de la Sociedad Matemática Española. En una y otra se potenció la nueva imagen profesional del científico y del matemático, que dejó de ser, en parte, una planta rara y aislada en el conjunto social para pasar a ser cada vez más un ciudadano normal y corriente. De singular importancia fue la idea tenaz de que era necesario que los matemáticos se asociasen para poder sostener una revista de Matemáticas en España que aspirase a una vida, si no plácida, por lo menos estable y a potenciar un órgano válido de relación con las comunidades matemáticas de allende nuestras fronteras.

La evolución del sistema de enseñanza de las matemáticas es más difícil de condensar en unas pocas líneas. Sintéticamente habría que partir de la institucionalización en la Facultad Mayor de Filosofía[11] de los estudios de Ciencias en los que se contemplaban diez asignaturas de Matemáticas. Posteriormente, con la Ley Moyano de 1857, aparecían las Facultades de Ciencias y, en ellas, la Sección de Ciencias Físico-Matemáticas, con un curriculum que, aunque arcaico, era acorde con la disciplina en la que, por primera vez, podía obtenerse la licenciatura y el doctorado.

Es posterior pero cualitativamente significativa la Reforma del Plan de Estudios de las Facultades de Ciencias en tiempos del Ministro García Alix, que coincidió cronológicamente con la aparición del Ministerio de Instrucción Pública. Lo más notable de dicha reforma fue la aparición de las cuatro Secciones de Ciencias (exactas, físicas, químicas y naturales). Con el siglo XX nacía pues la verdadera carrera de Matemáticas, aunque por razones de poder académico-institucional el Plan de Estudios, más que de Matemáticas, fuera de Geometrías. La filosofía inspiradora del Plan García Alix se establecía en la consideración de que la Química (con evidente proyección social industrializadora y de uso público) era la rama básica y que las Ciencias Exactas eran el nexo necesario entre las otras tres Secciones. Este Plan, que mejoró obviamente la situación de los estudios de Matemáticas y que propició que a partir de él surgieran en España nuevos profesionales llamados matemáticos fue, sin embargo, una ocasión lamentablemente perdida, porque al hipertrofiar los estudios de Geometría de manera exagerada se relegaban otras materias básicas a un segundo plano hasta tal punto que el Cálculo Infinitesimal no comenzaba a estudiarse hasta tercero. Es interesante resaltar este dato porque viene a corroborar que la Historia —y la vida— no son lineales ni están exentas de contradicciones. Este Plan con sus excrecencias y deformaciones supuso al mismo tiempo la posibilidad de estudiar Matemáticas modernas en España y también que por sus lagunas e insuficiencias la crítica a su estructuración fuera prácticamente inmediata. García de Galdeano —a las pocas semanas de su publicación en la Gaceta de Madrid— establecía desde las páginas del Progreso Matemático un análisis acerado y posteriormente otros matemáticos de las más diversas tendencias (Marzal, Octavio de Toledo, Jiménez Rueda y otros) criticaron con más o menos vehemencia el Plan desde los más variados ángulos.

Para la comprensión de que con el Plan de García Alix —que se mantuvo intacto hasta los escarceos autonómicos del año 21— se consiguió la articulación del nuevo Paradigma pueden bastar tres ejemplos que no por particulares dejan de ser elocuentes: El primero son los cursos de Análisis Matemático que García de Galdeano explicaba en la Universidad de Zaragoza en la segunda década del siglo XX; el segundo lo constituyen los cursos monográficos de doctorado que se explicaban en Madrid hacia finales del mismo periodo; el tercero es la creación del Laboratorio Seminario Matemático de la Junta de Ampliación de Estudios. Estos tres elementos, aunque se conectan con aspectos que van a ser desarrollados en el párrafo siguiente, tienen por su función ejemplificadora un cierto carácter infraestructural por su conexión con el sistema de formación.

García de Galdeano publicó en 1913 un libro de 192 páginas con el expresivo título de *Sumario de mis Cursos de Cálculo Infinitesimal.* Es una obra militante —con sus componentes de defensa y ataque— en la que da fe pormenorizada del nivel de su enseñanza además de expresar de forma fehaciente que en España la calidad de la producción científica no es directamente proporcional al escalafón académico-funcionarial.

Los programas de García de Galdeano son comprensivos y tienden a la autosuficiencia. Elaborados con un criterio moderno, desde el punto de vista del Análisis recogen aspectos sumamente nuevos en las Matemáticas de la época como, por ejemplo, la integral de Lebesgue, los elementos de Aritmética transfinita o de Cálculo de Probabilidades.

El segundo de los elementos de reflexión es uno de los datos fundamentales para valorar el cambio de Paradigma en la comunidad matemática española. Se trata del conjunto de cursos de doctorado que tuvieron lugar en la Universidad de Madrid en el curso 1919-20 y que suponen un complemento formativo moderno para el Plan de Estudios de 1900. En dichos cursos se estudiaban entre otras cosas los grupos de sustituciones (Octavio de Toledo), funciones analíticas (Rey Pastor), Mecánica Relativista (Plans), Teoría de Galois (Araujo), clases de Baire (Correa) y Ecuaciones en Derivadas Parciales (Hadamard).

La creación del Laboratorio Seminario Matemático de la Junta de Ampliación de Estudios significó la institucionalización de la investigación matemática como tal, hasta entonces compañera acomplejada de las tareas docentes de los matemáticos españoles.

4. LA ARTICULACION DE LOS ASPECTOS INTERNOS DEL PARADIGMA HILBERTIANO

4.1. ASPECTOS GENERALES

El Paradigma Lagrangiano fue muy rápidamente asimilado en España. Desde cualquier punto que se considere, la dedicación a las Matemáticas en los siglos XVIII y XIX tuvo en su estandarte la palabra *utilidad*. Por ser útiles se instó a los sucesivos Gobiernos a proteger y extender los estudios de Matemáticas en el Estado. Y tanto los militares marinos como los jesuítas o los escasos docentes que se distinguieron en la profesión en este lapso de tiempo subrayaron y enfatizaron la vertiente aplicada, recogida bajo el epígrafe de *matemática mixta*. Y ello ocurrió, aun en el caso de matemáticos conscientes de que había un Universo conceptual matemático puro, aunque fuera aplicable, como revela el prólogo al Tomo III de los *Elementos* de Bails[12]. Es claro, pues, que a pesar del descenso de conocimientos que la exigua comunidad matemática hispana tuvo en las primeras décadas del XIX, como consecuencia de los avatares políticos, los matemáticos españoles estaban fuertemente insertos en la atmósfera ideológica de las Matemáticas francesas de los años de la Revolución.

La ruptura del Paradigma Lagrangiano es históricamente perceptible por la aparición de los detalles rupturistas con el marco espacial lagrangiano, con el instrumental, con la metodología de trabajo y con la orientación teleológica general.

Otra cuestión que es necesario aclarar es la aparente contradicción de enfoque entre el proceso de asimilación (o de construcción) del paradigma, que discurre por pasos analíticos, y el de aplicación posterior a los problemas de síntesis, que tienen lugar cuando el paradigma es aceptado por una comunidad matemática.

4.2. EL ALGEBRA

Como es usual, la incorporación de las nuevas ideas se desarrolló por un camino de acumulación al Paradigma Lagrangiano, ésto es, por la vía de la Teoría de Ecuaciones. Y no sobra advertir de entrada que la rapidez no fue síntoma característico del proceso hasta entrado el siglo XX. Efectivamente, los astrónomos trabajaron esencialmente sobre los métodos de resolución. En 1879, Miguel Merino, director del Observatorio de Madrid, tradujo la estimable memoria de Encke sobre la resolución númerica de las ecuaciones por el método de Gräffe, tema sobre el que mucho más tarde volvió a insistir el también astrónomo Vicente Ventosa desde las páginas de la Revista de la Academia de Ciencias de Madrid.

La teoría de determinantes, tras la primera referencia de Cortázar, fue definitivamente introducida por Echegaray en 1868 que publicó una versión de la memoria de Trudy. Como se sabe, el trabajo de Trudy es una de las primeras recopilaciones generales sobre esta teoría y apareció en 1862. Barinaga[13] destacó la sensibilidad de Echegaray ante los progresos científicos que se producían en Europa. Un desarrollo posterior sobre esta teoría salió de la pluma de los profesores Bacas, Escandón y sobre todo, del trabajo de Fernández de Prado de 1891, en el que también se incluían elementos de la teoría de las formas. Esta parte del Algebra fue uno de los temas predilectos de los matemáticos del siglo XIX y en su nacimiento estuvo íntimamente ligada a la teoría de determinantes. A Sylvester se debe la primera generalización en la teoría de invariantes, iniciando un proceso que ya no se detendría en todo el siglo XIX. También los matemáticos españoles procuraron importar traducciones más o menos libres de los tratados que vieron la luz en Europa. Entre los libros mejor construídos se pueden citar el de Durán Lóriga de 1889 y el de Octavio de Toledo de 1914.

La teoría de Galois fue muy tardíamente introducida en España. Las primeras referencias explícitas, la explicación de su significado y el apoyo bibliográfico original se encuentran en la *Crítica y Síntesis de Algebra* de 1888 de García de Galdeano. Posteriormente aparecieron comentarios más o menos extensos sobre la obra del malogrado matemático francés y sobre la teoría de grupos. También Clariana desarrolló el tema de los grupos de sustituciones en 1891. Los conceptos fueron también expuestos en el curso que sobre el tema dio Echegaray en el Ateneo de Madrid en 1897 y fue publicado en 1898. También en los textos de Algebra de García de Galdeano aparecieron los primeros elementos sobre la generalización de los conceptos de operación y de cantidad, a partir de las ideas de Boole, Hankel y Peano. Mas la primera lección escrita sobre teoría de conjuntos no aparecería hasta 1904, obra también de García de Galdeano, plasmada en el primer tomo del Tratado de Análisis Matemático, en la que desarrolló los elementos punteados en el curso del Ateneo de Madrid de 1898.

Este espectro que se puede utilizar de detector del retraso de la Matemática española del periodo, merece una explicación más global. A pesar de la importancia de los descubrimientos apuntados a comienzo de este párrafo, su plena comprensión tardó mucho tiempo en entrar en la comunidad matemática. Como una primera muestra basta señalar que Galois y Abel fueron incomprendidos no en un país atrasado matemáticamente sino en la avanzadísima Francia. Se debe añadir que la presentación de la teoría de grupos fue en principio realizada por Jordan y desarrollada por Klein y Lie, contemporáneos de los matemáticos españoles de la época, y que la reivindicación de la genialidad de Galois fue, tras la presentación de Liouville en 1846, obra de Emile Picard, otro contemporáneo.

Además hay que señalar que la primera sistematización rigurosa del Algebra se debe a las obras de Weber de 1894 y sobre todo de Steinitz, cuya *teoría algebraica de cuerpos* no fue publicada hasta 1910.

Las producciones algebraicas alemanas de ese periodo suponen una piedra que, sin ser la primera, sí tenía la suficiente consistencia como para pensar en los adornos necesarios (aunque una observación atenta siempre permita descubrir en la historia los perifollos recargados que enmascaran la pureza de líneas y en definitiva afean la belleza del original)[14]. Una vez consolidadas las ideas en Europa, en un periodo en el que las instituciones científicas españolas tenían mayor entidad de asimilación, el proceso de importación se aceleró y, aunque fuera ya del período de este trabajo, es preciso señalar que el retraso de conocimientos se abrevió significativamente con la publicación del *Análisis Algebraico y las Lecciones de Algebra* de Rey Pastor[15].

Viene ésto a cuento del tratamiento interesado que se hace de la Historia en general y de la Historia de las Matemáticas en particular. Intentar leer la historia del siglo XIX con criterios prejuiciados desde las parciales perspectivas del siglo XX es una trampa que demasiado a menudo colocan los profesionales más comprometidos en una rama especializada. La entidad del Algebra de hoy, aunque con sus raíces en el XIX, no debe ser baremo para medir la relevancia del Algebra en ese periodo, en el que surgieron muchas ideas fructíferas, que con el tiempo confluyeron en el poderoso y necesario dominio argumental del Algebra actual.

En España, por razón de las disputas académicas, el Algebra se consideró desde una perspectiva incluso hostil. Esto hay que explicarlo. En la medida en que la ideología dominante es la ideología del grupo dominante, la incorporación de una corriente geométrica "antialgebraica" llevó a los matemáticos interesados en circular por el entorno de los centros fundamentales de influencia político-académicos (o viceversa) a un tipo de profesión de fe en el que la síntesis cartesiana del XVII se presentaba como "lo antiguo" y lo nuevo era "la liberación de la geometría de la tiranía del álgebra". Este tipo de expresiones, producto de los gustos retóricos de la época, dificultaron enormemente la actualización de las ideas matemáticas en España, pero ésto se podrá ver mejor en el párrafo siguiente.

4.3. LA GEOMETRIA

Las primeras pautas del desarrollo de la Geometría —todavía inmersa en el Paradigma Lagrangiano— fueron dadas por caminos diferentes, por Monge y Poncelet. Sus concepciones, vinculadas a planteamientos técnicos, se estructuran sobre las representaciones geométricas de relaciones consolidadas en el plano y espacio físicos. Estas geometrías. aún teniendo en cuenta sus poderosos desarrollos en el siglo XIX, no supusieron ruptura con la matemática lagrangiana. Por su propia definición, hay que entender los trabajos de los matemáticos franceses de la Revolución y del periodo inmediatamente posterior como un proceso de acumulación de tipo cuantitativo, que además tenía sus raíces hundidas en alternativas geométricas marginales del siglo XVII en el propio paradigma griego.

Esta Geometría generó una cierta reacción anticartesiana que tomó cuerpo a lo largo del siglo XIX. Fue un proceso "lógico" de reacción frente a los esquemas rotundamente establecidos del siglo XVIII. La Geometría cartesiana, como todas las grandes ramas del siglo XVII, experimentó un proceso de complementación exhaustiva por el que se fueron desvelando los enigmas abiertos por la síntesis de Descartes. Y en ese proceso de reacción surgió la síntesis de K.G.C. von Staudt y su Geometría de la Posición.

K.G.C. von Staudt (1798-1867) publicó en 1847 la *Geometrie der Lage* en la que se construye una Geometría Proyectiva sin referencias a magnitudes métricas ni aritméticas. La idea, que cargaba la "culpa" de las zozobras geométricas al álgebra, no fue seguida con gran entusiasmo en la Europa matemáticamente desarrollada, aunque sí es cierta su influencia en la exposición sintética posterior de la Geometría Proyectiva[16]. En esta escuela geométrica "sintética", la hostilidad al álgebra llegó a alcanzar cotas tales que, como señala Bourbaki[17], "el empleo de coordenadas llega a ser considerado como una deshonra"; mas Staudt, no contento con eso, llegó a prescindir de los números reales incluso en los fundamentos de la geometría. A pesar del fervor alborozado de sus partidarios, este tipo de Geometría sintética fue abandonado, como señala Bourbaki[18], "porque las posibilidades de aplicación fructífera han resultado ser muy escasas". Sin embargo, como reveló Comesati en 1921 y expuso en España Barinaga[19] el manejo de la Geometría staudiana fue mirado con recelo progresivo debido a la ambigüedad que se escondía en el Teorema de Staudt o Teorema fundamental.

Este es el primer aspecto fundamental de la geometría en España entre 1870 y 1920. La acomodación rígida a una manera parcial de contemplar y entender la geometría impidió de hecho un desarrollo más rápido y eficaz de acortar distancias entre España y Europa. He aquí una de las lecciones más provechosas que pueden extraerse de la historia que se está estudiando. Porque en este campo se podía haber caminado más deprisa en España. En efecto, el "Dios geometriza" platónico era un axioma muy sentido por los matemáticos españoles ilustrados. De sus escarceos mínimamente creadores buena parte se desarrollaron sobre elementos geométricos. E, incluso ya mediado el siglo XIX, la receptividad respecto a las construcciones más acabadas en materia de geometría fue bastante fina. La calidad de la obra de Chasles centrada en su importante *Aperçu historique* era un primer punto de apoyo sobre el que sustentar la actualización en España de los conocimientos geométricos. Y así lo vió Echegaray, cuando publicó en 1865 y 1867 sus *Problemas de Geometría Analítica* y la *Introducción a la Geometría Proyectiva Superior*. En este momento, la distancia cronológica entre la línea de trabajo de los geómetras franceses no era muy grande, el idioma de expresión de las investigaciones más asequibles —factor todavía nada desdeñable en el siglo XIX— y su vertiente aplicada la hacía enormemente sugestiva. Y aunque no significase ruptura del paradigma Lagrangiano, la línea de Geometría Proyectiva marcada por las obras de Poncelet y Chasles la hacía moderna.

Así lo entendieron García de Galdeano y el propio Torroja cuando comenzó su carrera de geómetra. Pero en uno de los acostumbrados bandazos de las instituciones científicas españolas, Chasles fue sustituído por von Staudt, por parte de Torroja. Y aquí hay que volver, aunque sea brevemente, a la peculiar organización y funcionamiento de la Institución Universitaria. La ausencia de autonomía en la Universidad, su ordenancismo reglamentario, la fijación de los Planes de Estudios por decreto y el funcionamiento funcionarial del profesorado fueron factores que propiciarion esta situación. Una buena gestión a nivel ministerial era, en esa situación, más eficaz que el más riguroso y tenaz razonamiento estrictamente científico. La Matemática española se llenó de Geometría, lo cual no hubiera sido malo, pero se llenó en concreto de un solo tipo de Geometría, la geometría de posición, y ésto sí que lo fue.

Echegaray y García de Galdeano trabajaron, en sus primeros años de geómetras, sobre la línea proyectiva francesa representada por la obra de Chasles. Sus obras, aunque discretas, son estimables desde el punto de vista de la importación. Y si Echegaray se quedó ahí, no fue ese el caso de García de Galdeano, que en la segunda edición de su Geometría Elemental, en las dos partes de la Geometría General, en los tomos correspondientes a las aplicaciones del cálculo infinitesimal y en algún otro trabajo, introdujo casi todas las ideas fundamentales del bagaje geométrico del siglo XIX. Igualmente, debido a su asistencia personal a los congresos internacionales de matemáticos, pudo oír y utilizar inmediatamente las visiones sintéticas que Hilbert, Poincaré, Darboux y otros realizaron en los Congresos de la primera década del siglo XX.

El primer geómetra español que aportó —en este periodo— resultados originales, apreciados a nivel internacional, fue Ventura Reyes y Prósper. En sus artículos en el Progreso Matemático aportó también ideas sobre las geometrías no euclideas, que estaban siendo tratadas por García de Galdeano, en la serie constitutiva de su Geometría General. Dichas Geometrías, fundamental capítulo de ruptura del Paradigma Lagrangiano, fueron tratadas de una forma más exhaustiva y preferentemente didáctica en la Memoria de Bartrina y Capella de 1908 y con un tono más filosófico en la comunicación de Domenech y Estapá al Congreso de Zaragoza de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias del mismo año. Por último, la incorporación al más alto nivel tuvo lugar con el ciclo de conferencias que sobre Geometrías no euclídeas dio en España Federico Enriques y que recogió y editó Olegario Fernández Baños[20].

Sin embargo, como ya he señalado más arriba, la vía más penetrante sobre la actualización geométrica la marcó Rey Pastor. Su formación geométrica básica fue clásica. Y por estudiar en Zaragoza tuvo a oportunidad de comenzar a publicar pequeñas notas y rsultados en la Revista Trimestral de Matemáticas y en los Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza. La mayor parte de estas notas tratan sobre la geometría del triángulo, tema al que también se aproximó desde el punto de vista no euclídeo en un artículo de 1912 de *L'Intermediaire des mathématiciens* y en 1918 en la "Revista de la Facultad de Ciencias Exactas de la Plata". Las aportaciones conectadas con el nuevo Paradigma llegaron también desde Alemania, pero esta vez los trabajos de inspiración fueron los de Hilbert sobre el problema de los fundamentos. De esta escuela eran las *Lecciones de Geometría Moderna* de Mortiz Pasch que tradujeron Alvarez Ude y Rey Pastor en 1913 y una de las creaciones más importantes de la obra de Rey: *Los Fundamentos de Geometría Proyectiva Superior*, que fue distinguida con el Premio Duque de Alba por la Academia de Madrid y que introdujo al matemático riojano en la Historia de las Matemáticas a nivel universal. Igualmente notables son también los trabajos sobre la *Sistematización de la Geometría* que vieron la luz en las páginas de la Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza, cuyo título expresa un tácito homenaje a la obra de su Maestro, García de Galdeano, a quien Rey llamó "paladín de la matemática moderna" en la dedicatoria de sus lecciones introductorias a la Matemática Superior, editado en 1916.

De los *Fundamentos* dicen sus biógrafos, Rios, Santaló y Balanzat: "Esta fue posiblemente la obra más importante de Rey Pastor en su primer periodo, es decir hasta su radicación en la Argentina, donde sus trabajos de investigación derivaron, poco a poco, hacia el Análisis''. Los *Fundamentos* tuvieron muy buen éxito de crítica. L. Bieberbach los comenta en el *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (vol. 46, pág. 480) en los siguientes términos: ''... brillante síntesis panorámica de las ideas y métodos en este dominio. Con frecuencia da nuevos resultados y en muchos casos nuevos métodos de demostración; muy especialmente su análisis comparativo de las diversas teorías de los elementos imaginarios ha sido exitosamente logrado. Por otra parte, hace progresar la teoría de las colineaciones con un algoritmo vectorial proyectivo. Introduce en la Geometría muchos conceptos del Análisis, cuyas curvas analíticas, superficies de Riemann, representaciones conformes. También deseo hacer resaltar la bella demostración del principio de correspondencia de Chasles-Jonquieres''. La valoración de sus biógrafos es también interesante: ''El interés de los *Fundamentos* de Rey Pastor es doble. En primer lugar, dar un sistema de axiomas que mejora a los de Pasch y Schur en las obras citadas, para fundamentar rigurosamente la geometría real. En aquellos tiempos, en que las estructuras del Algebra Moderna todavía no estaban suficientemente difundidas y sistematizadas, los razonamientos geométricos, supletorios de transfondos algebraicos, debían ser sutiles y quedaban propensos a falta de rigor. Por otra parte Rey Pastor introduce el razonamiento sintético en la geometría compleja''[21].

Desde el punto de vista de este trabajo, lo que interesa resaltar es que los escasos elementos característicos del Paradigma Hilbertiano en Geometría que faltaban por incorporar a la Comunidad Matemática Española fueron introducidos plenamente por Rey Pastor que además creó otros nuevos, plenamente pertencientes al nuevo Paradigma.

4.4. EL ANALISIS MATEMATICO Y GARCIA DE GALDEANO

Las ideas claves del Análisis Matemático articulado en el Paradigma Hilbertiano llegaron a España de forma abrumadoramente mayoritaria, por la pluma y la enseñanza de García de Galdeano.

En la síntesis que se está realizando en este trabajo es imposible pormenorizar detalladamente todos los extremos de esta afirmación, por lo que se hace referencia exclusiva a la producción de García de Galdeano sobre Análisis en la primera década del siglo. En este periodo escribió el Catedrático de Zaragoza los cinco tomos del Tratado de Análisis[22] y el dedicado a las Ecuaciones Diferenciales[23], que su autor llamaba su ''último baluarte'' científico.

En las páginas de esos seis libros se encuentran la inmensa mayoría de las ideas fundamentales del análisis del XIX. Para su elaboración, García de Galdeano se basa principalmente en los textos de Picard y Goursat y Forsith, aunque son numerosas las referencias a Koenigs, Darboux, Bianchi, Borel, Vivanti, Weierstrass y otros.

Por medio del Tratado de Análisis Matemático se introdujeron en España la Teoría de conjuntos de Cantor, el concepto de función de Dirichlet-Weierstrass, el de cortadura de Dedekind, ideas de topología elemental, la integral de Riemann, funciones analíticas, integración en el campo complejo, los teoremas de existencia y analiticidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, y muchos temas más que resulta imposible enumerar dadas las dimensiones de este trabajo.

El esfuerzo de elaboración de los textos se tradujo en unos programas exhaustivos para los cursos de Análisis que García de Galdeano dictó en la Universidad de Zaragoza hasta su jubilación en 1918 y que representan un progreso creciente en los conocimientos teóricos, porque temas como el de la integral de Lebesgue, que no podían desarrollarse en el Tratado de 1904, aparecen en la edición de los programas de 1910.

Quizás uno de los detalles que merezca más la pena subrayar sea la concepción global del Análisis que se desprende de los textos y de los programas porque, para García de Galdeano, el desarrollo moderno del Cálculo y la teoría de funciones se fundamentan en sólidos basamentos algebraicos y aritméticos.

Aunque no es específico del Análisis es oportuno destacar el espíritu hilbertiano de García de Galdeano. Con motivo del I Congreso Internacional de Matemáticos reunido en Zurich en Julio de 1897, García de Galdeano presentó una comunicación sobre *La unificación de los conceptos matemáticos* y que también hubiera podido denominarse *el nuevo Paradigma que se está formando en Matemáticas*. Es este un trabajo clave en la evolución conceptual de García de Galdeano que señala que "el conjunto de modernos descubrimientos realizados en la Matemática... existe una tendencia hacia la unificación de los muy varios conceptos con que se ha enriquecido esta ciencia y que van a agruparse actualmente en una gran síntesis"[24].

En este breve párrafo García de Galdeano manifiesta tres ideas muy importantes. La primera, casi machacona por reiterada, es que los nuevos conocimientos revelan una nueva tendencia. Y esto, que desde una postura acomodaticia y autosuficiente instalada en la penúltima década del siglo XX puede parecer una perogrullada (porque la historia contemplada desde una poltrona intelectual nunca tiene ni matices ni interés científico —dicen—), no lo es inscrito en las coordenadas de los años finales del siglo pasado, cuando, por datar someramente la efemérides, ni habían aparecido los *Grundlagen* de Hilbert, ni las primeras ideas relativistas y la comunidad matemática internacional comenzaba solamente a caminar. El señalar una nueva tendencia es una opción que se produce cada vez que una persona quiere caminar por una vía definida. La segunda idea importante es plenamente hilbertiana, pero anterior. Porque conviene no perder de vista la conclusión final que Hilbert señalaba en su intervención en el Congreso de París: "La Ciencia Matemática es un entero indivisible, un organismo cuya fuerza vital tiene por condición la indisolubilidad de sus partes. En efecto, cualquiera que sea la diversidad de las materias de nuestra ciencia en sus detalles, no somos menos afectados por la equivalencia de unos procedimientos lógicos, del parentesco de las ideas en el conjunto de la Ciencia así como de las numerosas analogías en sus diferentes dominios. Remarcamos aún ésto: cuanto más se desarrolla una teoría, más gana su exposición en armonía y unidad y más relaciones se descubren entre esta teoría y las ramas de la Ciencia que hasta ahora le eran extrañas. Es así como con la extensión de las matemáticas su carácter de unidad no se pierde, sino que se hace, al contrario, cada vez más evidente".

"El carácter de unidad de las Matemáticas es la esencia misma de esta ciencia"[25].

Como se ve claramente, la comunión ideológica de García de Galdeano con Hilbert en la concepción de la Matemática no admite ningún tipo de fisuras, y es mérito de García de Galdeano haberla señalado precozmente en análoga tribuna internacional.

La tercera de las ideas expresadas en el párrafo anterior es característica de la metodología científica: la predicción. Porque García de Galdeano sentencia que, a la luz de los datos anteriores (recogidos en este trabajo en los párrafos anteriores), los nuevos conceptos van a agruparse consolidando la tendencia señalada. La generalización y profundización de estas ideas, enriquecidas por el ritmo enfebrecido de la producción matemática en esa época, le condujo a la síntesis de clasificación sobre la que se apoyó para ulteriores trabajos de orden crítico.

5. LAS MATEMATICAS EN ESPAÑA EN LA SEGUNDA DECADA DEL SIGLO XX

La situación en 1920 ha experimentado un cambio notable. Parcelas de la comunidad matemática española trabajan ya sobre temas estrictamente definidos en el Paradigma Hilbertiano. Los matemáticos españoles se han profesionalizado y autoorganizado. Cuentan ya con órganos de expresión de sus investigadores, participan en la comunidad matemática internacional y en algunos de sus organismos directivos. Matemáticos extranjeros de talla indiscutible cruzan la frontera para impartir sus conferencias en España. A nivel de conocimientos los aspectos renovadores básicos del Paradigma Hilbertiano son conocidos en España.

¿Dónde están pues los cincuenta años de retraso respecto a Europa que denunciara Rey Pastor?. La modernidad, cronológicamente, no puede entenderse como una variedad unidimensional en la que se está o no se está. La modernidad debe concebirse como una banda[26] en la que las comunidades científicas se entienden y se enseñan. (A modo de ejemplo. Hadamard dictó un libro de ecuaciones en derivadas parciales para la República Popular China en 1964. ¿Se imagina alguien a Hadamard haciendo lo propio en 1920?. Evidentemente, la conclusión es que la comunidad matemática china estaba en condiciones de poder aprender a Hadamard en 1964 y no en 1920 —condiciones de modernidad—. Pues bien, Hadamard estuvo en España impartiendo varios cursos de ecuaciones en derivadas parciales en 1919)[27].

Si la Historia de las Matemáticas se limitan al análisis de la frontera unidimensional, no cabe considerar las referencias a España. Si por Historia de las Matemáticas se entiende la investigación de bandas de modernidad adecuadas, con esquemas claros y definidos, la Historia General de las Matemáticas en España seguirá sin estar hecha.

Y esta es la tesis que en este trabajo se defiende. Porque lo que aquí se ha intentado demostrar es que en el entorno de 1920 la comunidad matemática española había penetrado en la banda de modernidad.

Un aspecto repercutió negativamente en el trabajo de la comunidad matemática del Estado Español: la estructura de la Universidad y el sistema de selección del profesorado. Este detalle, habida cuenta la importancia de la institución universitaria en el desarrollo cuantitativo de las Matemáticas —y de la Ciencia— en España, sí que supuso un anclaje férreo en concepciones napoleónicas que debieran, en ese medio siglo, haber estado claramente superadas.

La consideración de por qué no se avanzó hacia la frontera de la banda de modernidad una vez situada en ella la comunidad matemática española, es claramente, otra historia.

NOTAS Y BIBLIOGRAFIA

1 HILBERT, D. (1962) *Sur les problemes futurs des Mathématiques*. En: Compte rendue du II Congrès International des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 aout 1900. Gauthiers-Villars, Paris. págs. 58-114.

2 DAVIS and HERSH (1980) *The Mathematical Experience* Birkhäuser, Boston, pág. 220.

3 ENGELS (1968) *Anti-Dühring*, Ciencia Nueva, Madrid. pág. 45.

4 Véase DOU (1963) *Los Fundamentos de la Matemática*. Labor, Barcelona, pág. 24.

5 PICARD (1921) *Allocutions*. En: Comptes Rendues du Congrès International des Mathématiciens, Strasbourg, 22-30 septembre 1920, Toulouse, págs. XXVI-XXIX, XXXI-XXXIII.

6 Se pueden consultar al respecto los trabajos de HORMIGON (1980) *La Escuela de Matemáticas de la Real Sociedad Económica Aragonesa de Amigos del País*. Actas del I Congreso de la SEHC. Edición a cargo de Santiago Garma. Madrid. págs. 127-141. También GARMA (1[illegible]3) *Las Matemáticas en España en el primer tercio del siglo XIX*. D. Josef Mariano Vallejo. Revista de Occidente, núm. 118, 105-114.

7 VICUÑA (1875) *Cultivo actual de las ciencias físico-matemáticas en España*. DICA, 1875-76. Universidad de Madrid.

8 El proceso de obsolescencia de los libros de texto es una de las pautas más seguras para seguir la evolución o mejor dicho el estancamiento de los estudios de matemáticas en determinados periodos del siglo XIX. Así, textos como el Bails o el Vallejo, encomiables en los días de su primera edición se agotaron cronológicamente al ser mantenidos durante veinte o más años en los centros de enseñanza. Lo mismo podría decirse de los tratados de Legendre o Lacroix y otros.

9 REY PASTOR (1915) Conferencia inaugural de la sección de Ciencias Matemáticas del Congreso de Valladolid de la AEPPC, Tomo I, págs. 7-25.

10 HORMIGON, M. (1982) *Problemas de Historia de las Matemáticas en España entre 1870 y 1920. Zoel García de Galdeano y Yanguas*. Tesis Doctoral. Facultad de Filosofía y Letras. Universidad Autónoma de Madrid.

11 Véase PESET, GARMA y PEREZ GARZON (1978) *Ciencias y Enseñanza en la Revolución Burguesa, Siglo XXI*, Madrid. págs. 178-180.

12 Véanse, por ejemplo los prólogos de los tomos III y IV de los Elementos de Benito Bails, 2ª. ed. corregida y añadida, Madrid, 1792-3.

13 BARINAGA (1934) *Notas Breves y Comentarios, Matemática Elemental*. T. III, pág. 7.

14 Esto que resulta bastante visible en los desarrollos matemáticos posteriores a la Segunda Guerra Mundial, no es, sin embargo, una ley de la Historia de la Ciencia, que tiende sistemáticamente a su simplificación y a la depuración de las ideas más brillantes.

15 REY PASTOR (1917) *Elementos de Análisis Algebraico*. Madrid, y (1924) *Lecciones de Algebra*, Madrid.

16 COOLIDGE (1963) *A history of Geometrical Methods*. Dover.

17 BOURBAKI (1972) *Elementos de historia de las Matemáticas*. Versión española de Jesús Hernández. Alianza Universidad. Madrid. pág. 182.

18 BOURBAKI (1972) ibidem. pág. 186.

19 BARINAGA (1935) *Notas breves y comentarios, Matemática Elemental*. Tomo IV, págs. 1-3.

20 BATRINA Y CAPELLA (1908) *Tratado didáctico de las Geometrías no eúclideas*. Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona. DOMENECH ESTAPA (1909) *Naturaleza de los elementos geométricos puntos, recta, y plano de las Geometrías parabólica, hipérbolica o elíptica*. Congreso de Zaragoza de la AEPPC, Tomo II, Ciencias Matemáticas, Madrid, págs. 71-75.

ENRIQUES, F. (1918) *Conferencias de Geometría no euclídea*. Recogidas y ordenadas por D. Olegario Fernández Baños. Valladolid.

21 RIOS, SANTALO Y BALANZAT (1979) *Julio Rey Pastor, Matemático*. Madrid. págs. 145-147.

22 El Tratado de Análisis de GARCIA DE GALDEANO lo constituyen cinco volúmenes publicados en Zaragoza y aparecidos en los años 1904 y 1905.

23 GARCIA DE GALDEANO (1906) *Teoría de las Ecuaciones Diferenciales*. Libro 1°. Zaragoza.

24 GARCIA DE GALDEANO (1900) *Estudios de crítica y pedagogía matemática*. Zaragoza, pág. 108.

25 HILBERT (1902) *Sur les problemes...* págs. 13-114.

26 Véase HORMIGON (1981) *Un modelo teórico para el estudio de la modernidad en Historia de las Matemáticas*. I Simposium sobre Metodología de la Historia de las Ciencias, Madrid. págs. 19-27.

27 Véase REY PASTOR (1919), *J. Hadamard*, Revista Matemática Hispano-Americana, I, 66-80, 105-112.