

DIE MATHEMATISCHEN ARBEITEN VON LEIBNIZ IM LICHT SEINES UNVERÖFFENTLICHTEN  
NACHLASSES

Eberhard Knobloch  
Universidad de Berlín

Zusammenfassung

Der vierteilige Aufsatz behandelt folgende Fragen:

1. Über die Aufgaben der Leibnizforschung angesichts des gewaltigen unbekannt-  
ten mathematischen Nachlasses;
2. Sechs charakteristische Züge der mathematischen Manuskripte;
3. Die algebraischen Studien zur Determinanten- und Eliminations-theorie,  
von denen seine sogenannte Explikationstheorie genauer analysiert wird;
4. Die zahlentheoretischen Studien, vor allem die Partitionen, die Verteilung  
der Primzahlen und die Diophantische Analysis. Besonders wird Leibnizens Me-  
thode analysiert, geometrische Betrachtungen zur Lösung zahlentheoretischer  
Fragen anzustellen.

1. Über die Aufgaben der Leibnizforschung

"Schon das bisher im Druck Zugängliche ist nicht leicht zu überblicken;  
über das, was noch in den Handschriften vergraben ist, wissen wir nur unzu-  
länglich Bescheid."<sup>1</sup> Diese Worte schrieb 1966 der vorzügliche Leibnizkenner  
J.E.Hofmann. Er meinte die mathematischen Studien des Universalgelehrten G.  
W.Leibniz. Hofmanns Satz ist noch heute richtig, trotz der Fortschritte, die  
die Untersuchung der Leibnizschen Manuskripte inzwischen gemacht hat.

Leibniz veröffentlichte mehr als 60 Aufsätze zu den mathematischen Wissen-  
schaften, keine grössere Monographie. Bis heute sind nur rund 10 Prozent der  
etwa 7300 Blätter seines mathematischen Nachlasses veröffentlicht, abgesehen  
von dem Reichtum an mathematischen Ideen und Ergebnissen, die seine gewalti-  
ge Korrespondenz enthält. Auch seine Korrespondenz ist bis heute nur zu einem  
geringen Teil publiziert. Leibniz korrespondierte mit mehr als 1000 Briefpart-  
ner, von denen 120 Mathematiker oder Naturforscher waren.<sup>2</sup>

Noch heute gibt es keine Gesamtplanung für die Bände der im Akademie-Verlag  
erscheinenden Ausgabe seiner sämtlichen Schriften und Briefe, die 1923 begonnen  
wurde und heute von der Akademie der Wissenschaften der DDR herausgegeben wird.  
Der überhaupt erste Band der 7. Reihe "Mathematische, naturwissenschaftliche

un technische Schriften" ist erst seit 1981 im Druck. Er wurde von meinem Mitarbeiter W.S.Contro und mir bearbeitet und wird voraussichtlich 1986 erscheinen. Zweifellos wird die 7. Reihe einmal mindestens 30 Bände umfassen. Diese Zahlen belegen die Berechtigung von Leibniz' brieflicher Bemerkung vom 21.2.1696 gegenüber Vincentius Placcius: "Wer mich nur aus meinen Veröffentlichungen kennt, der kennt mich nicht".<sup>3</sup>

Es soll daher in den folgenden Ausführungen nicht um Leibniz als einen Begründer des Infinitesimalkalküls gehen, sondern um seine ziemlich unbekannt, hinterlassenen Studien, um die Schwierigkeiten, diese zu publizieren und zu interpretieren, und um die Gründe, warum es notwendig ist, diese zu berücksichtigen. Einen weiteren wichtigen Schritt in dieser Richtung tat vor kurzem J. Echeverria durch seine (vorläufig maschinenschriftliche) "Edition critique des manuscrits concernant la caractéristique géométrique de Leibniz en 1679".<sup>4</sup>

Ich möchte diesen Punkt unterstreichen: Wir benötigen die Publikation, die Edition der unveröffentlichten Handschriften, wenn wir nicht inadäquate oder unzutreffende Charakterisierungen des Leibnizschen Werkes wiederholen wollen.<sup>5</sup> Im Falle Newtons können wir die philosophischen Ansichten des Engländers seit kurzen wesentlich besser durch die Veröffentlichung des "Trinity notebook" verstehen.<sup>6</sup>

Allerdings ist die Aufgabe schwierig und kann nur gelöst werden, wenn man die Mahnung von Ernst Robert Curtius berücksichtigt<sup>7</sup>: "Die Philologie ist die Magd der historischen Wissenschaften". Ein sehr negatives Beispiel für die Ausserachtlassung dieser Mahnung ist die äusserst fehlerhafte und zuverlässige, jüngst erschienene Ausgabe des "Specimen dynamicum"<sup>8</sup>. Die Herausgeber haben die Schwierigkeiten erheblich unterschätzt, die das Studium der Leibnizhandschriften bietet. Diese spiegeln Leibnizens unglaubliche Kreativität seines rastlosen Geistes wider, der ständig nach Lösungen von Problemen suchte und neue Ideen entwarf. Eine Bemerkung aus einem um 1683/84 entstandenen, algebraischen Manuskript zur Eliminationstheorie möge diese Geisteshaltung veranschaulichen<sup>9</sup>: "Da ich auf Reisen bin und nichts habe, was ich heute Abend im Gasthof tun kann, und da niemand zur Hand ist, mit dem man sich unterhalten möchte, werde ich wieder aufgreifen, was ich bereits zu Hause (das heisst in Hannover) erreicht habe".

## 2. Sechs charakteristische Züge von Leibnizens mathematischen Studien

Zunächst seien sechs charakteristische Züge von Leibniz' mathematischen Schriften herausgestellt, die insbesondere für die zu besprechenden Handschriften von Bedeutung sind.

### 2.1. Notation

Leibniz glaubte aus guten Gründen, dass seine grösste mathematische Errungenschaft die Algebraisierung der mathematischen Analysis war. Nur einige Monate nach seinen entscheidenden Entdeckungen auf diesem Gebiet bemerkte er im Frühjahr 1676 im Rahmen einer Untersuchung zur Verteilung der Primzahlen<sup>10</sup>:

*"Ich lerne täglich durch ausgezeichnete Beispiele, dass die gesamte Kunst, Probleme zu lösen und Sätze zu finden, darauf hinausläuft, den Gegenstand durch Charaktere oder Abkürzungen der Imagination zu unterwerfen, besonders dann, wenn dieser der Imagination nicht unterliegt. Das, was nicht gemalt werden kann, wie intelligible Dinge, wird dennoch auf eine gewisse hieroglyphische, aber zugleich auch philosophische Weise gemalt."*

Er definiert "character" in der folgenden Weise: "Ich nenne 'character' ein sichtbares Zeichen, das Gedanken darstellt (characterem voco notam visibilem cogitationes repraesentantem)<sup>11</sup>". Ich werde algebraische und zahlentheoretische Beispiele geben, um zweierlei zu zeigen: 1. Leibniz verwandte dieses Prinzip sehr erfolgreich. 2. Er hatte ein lebenslanges Interesse an der Entwicklung einer geeigneten mathematischen Notation.

### 2.2. Philosophie

Wir können dieses Beispiel verwenden, um einige andere charakteristische Züge, zentrale Gedanken von Leibnizens mathematischen Studien aufzuzeigen. Fast immer gibt es eine enge Beziehung zwischen philosophischen oder logischen und mathematischen Argumenten, selbst dort, wo wir sie nicht erwarten, wie im Falle zahlentheoretischer Partitionen.

### 2.3. Veranschaulichung

Leibniz versucht, selbst abstrakte Theoreme, Probleme, Relationen zu veranschaulichen. Er ist überzeugt, dass Zahlen ein besonders geeignetes Hilfsmittel zu Erreichung dieses Ziels sind. Dennoch ist er an einer Art dialektischen Prozesses interessiert. Einerseits benötigt er Illustrationen, um Regeln und Relationen zu finden. Andererseits betont er den umgekehrten Prozess in seinem Aufsatz über die Geschichte und den Ursprung des Differentialkalküls<sup>12</sup>. Der Geist wird durch seinen Kalkül von der ständigen Aufmerksamkeit befreit, die er Figuren widmen muss.

### 2.4. Tafeln, Listen

Eine andere, sehr wichtige Methode von Leibniz, neue Relationen und Theoreme zu finden, besteht darin, dass er sehr oft umfangreiche Tabellen benutzt und induktiv Ergebnisse ableitet. 1673 bemerkt er<sup>13</sup>: "Ich überlasse es anderen, die Anzahl der Partitionen ohne Tafeln zu suchen" (Quaerere summam par-

tionum sine tabula, id ego aliis relinquo). Freilich ist diese induktive Methode ziemlich gefährlich. Denn Leibniz diskutiert sehr oft nur ein einziges Beispiel, bevor er glaubt, allgemeine, universelle Theoreme ohne Beweis aufstellen zu können. Wir stossen immer wieder auf Ausdrücke wie "universelle Regeln", "universelle Methode", "allgemeines Theorem", "um etwas Allgemeines zu formulieren". Unglücklicherweise kommt dadurch Leibniz oft zu falschen Feststellungen, obwohl der spezielle Fall richtig behandelt sein kann, oder obwohl er richtige Prinzipien verwendet. Meiner Ansicht nach können wir mindestens die folgenden drei Gründe für dieses Verhalten anführen:

1. Leibniz hängt dem wohlbekanntem Ideal der "mathesis universalis" an.

2. Er ist mehr an methodologischen Fragen als an speziellen Lösungen spezieller Probleme interessiert.

3. Als Konstrukteur einer Rechenmaschine ist er stets daran interessiert, wissenschaftliche Arbeit durch mechanische oder technische Instrumente und Vorrichtungen zu erleichtern. So denkt er 1674 über die Möglichkeit nach, zahlentheoretische Probleme mit Hilfe bestimmter Maschinen zu lösen<sup>14</sup>, wie das sogenannte Sechsquadratproblem. In einer algebraischen Studie schreibt er: "Es wäre nützlich, eine Liste der feineren Probleme und Theoreme anzulegen" (*Utile foret problemata ac theoremata elegantiora in indicem referri*)<sup>15</sup>.

#### 2.5. Harmonie

Wenn Leibniz Relationen und Theoreme entdeckt, bewundert er deren Schönheit und Harmonie. Er verwendet Ausdrücke wie "Wunder", "Geheimnis". Es ist deutlich, dass hier der Philosoph der prästabilierte Harmonie spricht<sup>16</sup>.

#### 2.6. Ähnlichkeit mit Eulers Arbeitsweise

Es gibt viele Ähnlichkeiten zwischen Leibnizens mathematischen Problemen und zugehörigen Lösungsmethoden und Eulers algebraischen und zahlentheoretischen Studien. Eine 1984 durchgeführte Durchsicht der 12 fast durchwegs unveröffentlichten Eulerschen Notizbücher in Leningrad hat mich davon überzeugt, dass diese Ähnlichkeiten noch grösser sind, als bisher aus den veröffentlichten Schriften der beiden Mathematiker geschlossen werden kann<sup>17</sup>:

1. Beide Autoren verwenden umfangreiche Tabellen und schlussfolgern aufgrund unvollständiger Induktion.

2. Beide Autoren behandeln dieselben algebraischen, zahlentheoretischen oder geometrischen Probleme: Eliminationstheorie, Partitionen, Flächenzerlegungen. Im Falle der Geometrie betrachtet Leibniz zum Beispiel das Problem, ein Dreieck mittels zweier senkrecht aufeinander stehenden geraden Linien in vier gleich grosse Teilflächen zu zerlegen<sup>18</sup>. Euler wählt anstelle des Dreiecks einen Kresiquadranten.<sup>19</sup>

### 3. Algebraische Studien

#### 3.1. Überblick

Es ist verständlich, dass die historische Forschung lange Zeit vor allem die Schriften zum Infinitesimalkalkül untersuchte und die algebraischen Arbeiten beiseite liess. Dennoch war es sehr wahrscheinlich, dass man auch auf dem Gebiet der Algebra erstaunliche Ergebnisse finden konnte. Denn Leibniz betrachtete den algebraischen Kalkül als ein Modell, als er erfolgreich einen Infinitesimalkalkül suchte. Er müsste um so mehr an dessen Vervollkommnung interessiert sein, als die Algebra für ihn ein Teil der umfassenderen "ars combinatoria" war, deren Ausarbeitung er zeit seines Lebens proklamierte.

Leibniz hat in der Tat seine Ergebnisse zum Infinitesimalkalkül viele Jahre zurückgehalten. Aber schliesslich veröffentlichte er doch die wichtigsten Resultate. Dagegen publizierte er von seinen Entdeckungen auf dem Gebiet der Eliminations- und Determinanten-theorie nichts. Es ist nicht wahr, dass er dem Marquis de l'Hospital oder Fatio de Duillier seine Determinantentheorie erklärte.<sup>20</sup> Er teilte l'Hospital 1693 nur ein einziges spezielles Ergebnis mit<sup>21</sup>. Soweit er anderen Korrespondenten etwas von seinen algebraischen Indexschreibweisen andeutete, wurde er nicht verstanden. Daher verzichtete er im allgemeinen darauf, in dem betreffenden Briefwechsel auf dieses Thema weiter einzugehen. Nur zweimal - 1700 und 1710 - veröffentlichte er Beispiele seiner Methode, algebraische Indizes zu verwenden. Diese Beispiele vermitteln keinen Eindruck von der unglaublichen Vielfalt von mehr als 50 Bezeichnungen, die er erfand. Diese Schreibweisen hängen entscheidend von der Art der Gleichungen ab, d.h. davon, ob es sich um 1. lineare Gleichungen, 2. algebraische Gleichungen höheren Grades, 3. Differentialgleichungen oder 4. unendliche Reihen handelt.

Allen gemeinsam ist die Tatsache, dass sie unmittelbar Zahlen als Koeffizienten, nicht Buchstaben mit Zahlen als Indizes verwenden, zum Beispiel

$$0 \text{ aequ. } 5111 x^3 + 5112 xxy + 5122 xyy + 5222 y^3 + 522 xx + 512 xy + 522 yy \text{ etc.}$$

Die Zahlenindizes lassen die Beziehung der Koeffizienten zu den Unbekannten, zu deren Potenz und Reihenfolge erkennen. Die Erfindung solcher Indizes geht auf die Jahre 1674/75 in Paris zurück. Soweit ich den Nachlass übersehe, treten jedoch solche voll entwickelten Doppel- oder Mehrfachindizes nicht vor 1678 auf, trotz gegenteiliger Behauptungen in der Literatur.<sup>22</sup>

Leibniz erzielte mit Hilfe dieser Indexschreibweise bemerkenswerte Ergebnisse in der folgenden drei Gebieten:

1. Theorie der inhomogenen, linearen Gleichungssysteme.
2. Berechnung der Resultante zweier Polynome, die zum Ring  $R[x]$  gehören,

3. Elimination einer gemeinsamen Variablen aus zwei algebraischen Gleichungen mit zwei oder mehr Variablen.

Euler behandelte intensiv das zweite und dritte Problem. Es waren diejenigen Probleme, die die japanischen Mathematiker im 17. und 18. Jahrhundert, die Wasankas, erörterten. Eine vergleichende Analyse der Leibnizschen und der japanischen Methoden wäre sehr wünschenswert, wie sie Annick Horiuchi 1984 anregte:

*"Une Étude comparative avec les travaux de Leibniz relatifs à l'indexation et aux déterminants apporterait un éclairage intéressant aux travaux des Japonais."*<sup>23</sup>

Ich möchte hier nur die folgenden sieben Resultate von Leibniz anführen:<sup>24</sup>

1. Er bezeichnet 1684 eine n-reihige Determinante ( $n = 2, 3, 4, 5$ ) durch  $\overline{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$ .
2. Er leitet die sogenannte Cramersche Regel ab.
3. Er formuliert den Laplaceschen Determinantenentwicklungssatz.
4. Er findet das kombinatorische Gesetz, nach dem der Wert einer Determinante unmittelbar berechnet werden kann.
5. Er antizipiert um 1679/81 Sylvesters dialytische Methode, um die Resultante zweier Polynome zu berechnen.
6. Er löst in diesem Zeitraum das Eliminationsproblem in derselben Weise wie Etienne Bézout durch die Multiplikation mit Hilfspolynomen.
7. Er entdeckt zwischen 1683 und 1693 die wichtigsten, d.h. die Dimensions- und Homogenitätseigenschaften der Resultante.

### 3.2. Leibnizens Explikations-Theorie

1693/94 entwickelte Leibniz eine eigenartige, sehr originelle Eliminationsmethode, die als Beispiel für seine derartigen Studien dienen soll.<sup>25</sup> Wir betrachten das folgende Problem:

Geben seien die beiden algebraischen Gleichungen

$$\begin{aligned} 10x^3 + 11x^2 + 12x + 13 &= 0 \\ 20x^3 + 21x^2 + 22x + 23 &= 0 \end{aligned}$$

Die Unbekannte  $x$  soll eliminiert werden. Wir verwenden zwei Multiplikationsmethoden, um jeweils neue Gleichungen von niedrigerem Grad zu erhalten.

1. Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit den ersten Koeffizienten der ersten Gleichung und subtrahieren die erste Gleichung die mit dem ersten Koeffizienten der zweiten Gleichung zuvor multipliziert wurde:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 21x^2 + 10 \cdot 22x + 10 \cdot 23 &= 0 \\ - 11 \cdot 20x^2 - 12 \cdot 20x - 13 \cdot 20 & \end{aligned}$$

oder  $(10)x^2 + (11)x + (12) = 0$

2. Wir multipliziert die erste Gleichung mit dem letzten Koeffizienten der zweiten Gleichung und subtrahieren die zweite Gleichung, die mit dem letzten

Die mathematischen Arbeiten von Leibniz

Koeffizienten der zweiten Gleichung zuvor multipliziert wurde:

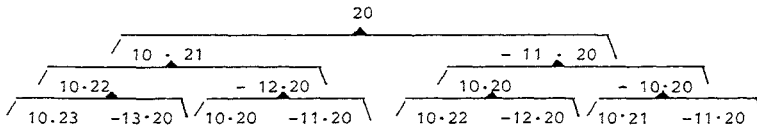
$$10 \cdot 23 x^2 + 11 \cdot 23 x + 12 \cdot 23 = 0$$

$$- 13 \cdot 20 x^2 - 13 \cdot 21 x - 13 \cdot 22$$

oder  $(20) x^2 + (21) x + (22) = 0$

Leibniz nennt beide Verfahren "Interpretation" oder "Explication" der alten Koeffizienten. Wir können diese Verfahren fortsetzen, bis wir zwei lineare Gleichungen erhalten. In diesem Fall führt eine weitere Explication auf die gesuchte Resultante. Allerdings ist diese Resultante von unnötig hoher Dimension. Wenn wir mit zwei Gleichungen n-ten Grades begonnen haben, so wird jeder Term der Resultante  $2^{n-1} + 1$  Faktoren haben, obwohl es nur  $2n$  zu sein brauchen. Diese Dimensionsregel hatte Leibniz selbst gefunden.

Die beiden Ausgangsgleichungen können von verschiedenen Grad sein. Wenn wir die Koeffizienten erklären, deren erste Ziffer 2 ist, so erhalten wir in Leibnizscher Terminologie die folgende "dichotomiste" Tafel oder "Stammbaum":



Wir können die einzelnen Terme schrittweise durch die Substitution der neuen Werte berechnen, wie es auch Leibniz tatsächlich tut. Es ist erwähnenswert, dass er einen "Stammbaum" bereits 1666 in der "Dissertatio de arte combinatoria" verwandt hatte, um bestimmte Partitionen zu erörtern. Wegen der Ähnlichkeit mit einem Stammbaum bezeichnet er die Zweierprodukte als Väter, Onkel, Brüder, Erstgeborene (linker Term), Zweitgeborene (rechter Term). Leibniz zieht aus seiner Tabelle 34 Folgerungen, die man in fünf Gruppen einteilen kann:

1. Die beiden ersten Sätze betreffen die Brüder.
2. Die Sätze drei bis fünfzehn betreffen den Zusammenhang zwischen den Termen einer Spalte, zum Beispiel der Spalte der Erst- oder der Zweitgeborenen.
3. Die Sätze 16 bis 20 diskutieren die Dimensionen und Vorzeichen.
4. Die Sätze 21 bis 27 erörtern die Zusammenhänge zwischen den entsprechenden Gliedern verschiedener Zeilen.
5. Die letzten sieben Sätze diskutieren den Aufbau einer beliebigen Zeile.

Leibniz entwickelt ein Bezeichnungssystem, um eine beliebige Zeile darzustellen. Er verwendet dazu das Prinzip der Zweiteilung (bisectio). Er erwähnt nicht, dass wir jedesmal den ersten Term der folgenden Bereiche zu nehmen haben:

1. Die grossen Buchstaben A, B, C, D usf. bezeichnen jeweils die zweite Hälfte, das zweite Viertel, das zweite Achtel, das zweite Sechzehntel usf. aller Terme einer Zeile.

2. Wenn die Buchstaben geklämrt werden, so wird eine erneute Zweierunterteilung (subbisectio) der betreffenden Bereiche vorgenommen. (C) bedeutet: man nehme das zweite Achtel einer Zeile. Dort nehme man den ersten Term der zweite Hälfte, des zweiten Viertels, des zweiten Achtels usf.

3. Wir können einen geklämerten Buchstaben mit anderen oder mit demselben Buchstaben kombinieren. Wir können auf diese Weise eine Reihe von Buchstaben konstruieren, indem neue Buchstaben auf der rechten Seite der vorausgehenden Buchstaben angehängt werden:

(A) A, (C) B, (A) BB, (B) BA usf.

Ein neuer Buchstabe bezeichnet die nächste Zweierunterteilung des Bereiches, der durch den geklämerten Buchstaben bezeichnet ist. Daher haben wir eine Folge von Buchstaben von rechts nach links aufzuschlüsseln. Als Beispiel diene (C) B:

Wir haben das zweite Viertel des zweiten Achtels zu nehmen.

In diesem Bereich ist der Reihe nach der erste Term der zweiten Hälfte, des zweiten Viertels, des zweiten Achtels usf. zu wählen.

Führt man die Explikation sechsmal durch, so liefert (C) B den einzigen Term:  $- 10^3 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 20$ .

Wir können derartige Buchstabenfolgen beliebig lange fortsetzen. Leibniz erwähnt nicht ein Korollar, das wahr und zugleich interessant zu sein scheint:

Korollar: Wir erhalten stets dieselben Terme, wenn wir die Reihenfolge der Buchstaben, einschliesslich dem geklämerten Buchstaben, vertauschen.

Zum Beispiel gilt: (A) BB = (B) AB = (B) BA

Bisher konnte ich jedoch keinen einwandfreien Beweis für dieses Korollar finden.

#### 4. Zahlentheoretische Studien

##### 4.1. Geometrische Modelle und Veranschaulichungen

Leibniz sah eine enge Verbindung zwischen Geometrie und Zahlentheorie, als er zahlentheoretische Fragen zu lösen versuchte. So stellte er 1674 fest:<sup>26</sup>

*"Gegeben sei eine Figur. Man finde die rationale Ordinate zu einer Abszisse. In diesem Problem ist die gesamte Kunst enthalten, Probleme in rationalen Zahlen zu lösen, die mit Potenzen zu tun haben."*

Natürlich war dies nicht Leibniz' einzige Methode, solche Probleme zu lösen. Aber die Beziehung zwischen den beiden Disziplinen Geometrie und Zahlen-





## Die mathematische Arbeiten von Leibniz

Er schliesst, dass uns jede Regel der Arithmetik der unendlich kleinen Grössen die Quadratur einer bestimmten oder besser gesagt von vielen Figuren liefert. Aber seine Untersuchung der Zahlensegmente ist noch nicht abgeschlossen. Leibniz berechnet die Summe der Quadrate der beiden Summanden einer Partition, z.B. von  $n = 9$ :

$$49 + 1, 36 + 4, 25 + 9, 16 + 16$$

Er berechnet die Folge der Differenzen und die Differenzen der Differenzen: Wir erkennen seine wohlbekannte Methode, die Summen von unendlich Reihen zu berechnen. Auf diese Weise findet er zwei bemerkenswerte Sätze, freilich ohne diese zu beweisen:

Satz 1: Die 2. Folge der Differenzen ist konstant und besteht aus 4, 4, 4, ... Die Folge der ersten Differenzen beginnt mit 2, falls  $n$  gerade ist, mit 4, falls  $n$  ungerade ist.

Satz 2: Wenn wir die Differenz zwischen den Quadraten der Segmente anstelle der Summe der Quadrate bilden, so ist die Differenz zwischen zwei derartigen aufeinanderfolgenden Differenzen das Doppelte der gegebenen Zahl  $n$ .

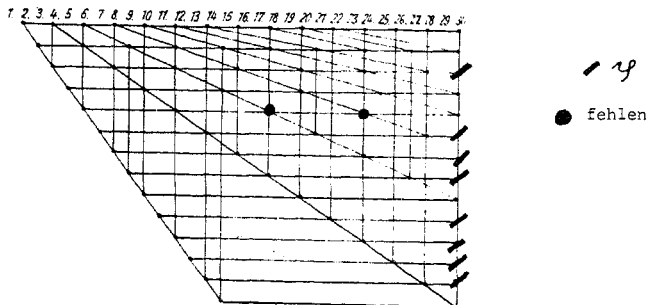
Die moderne Begründung kann wie folgt gegeben werden:

Beweis zu Satz 1: Die Differenz zwischen zwei beliebigen, aufeinanderfolgenden Quadratsummen ist  $2n - 4x - 2$ . Die Differenz zwischen den zwei nächsten, aufeinanderfolgenden Quadratsummen ist  $2n - 4x - 6$ . Also ist die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Differenzen konstant 4.

Beweis zu Satz 2: 
$$\left[ (n - x)^2 - x^2 \right] - \left[ (n - (x+1))^2 - (x+1)^2 \right] = 2n$$

### 4.2. Primzahlverteilung

Vom Januar bis zum April 1676 studierte Leibniz intensiv die Verteilung der Primzahlen und Fragen der Teilbarkeit<sup>29</sup>. Im Anschluss an die Folge der natürlichen Zahlen konstruierte er mehrere Male die folgende Figur:



1. In der ersten Zeile werden die Vielfachen von 2 gekennzeichnet, in der zweiten Zeile die Vielfachen von 3, in der dritten Zeile die Vielfachen von 4 usf.

2. Leibniz verbindet durch schräge Linien die Vielfachen von 1,2,3,4 usf. der horizontalen Linien miteinander, wobei er von einer Linie zur nächsten jeweils 1,2,3,4 usf. Einheiten überspringt.

Leibniz stellt fest, dass die Neigungswinkel wie die arithmetische Folge der Sinus variiert. Dieser Satz ist offensichtlich falsch. Die Folge der Sinus der Neigungswinkel ist:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{17}}, \text{ usf.}$$

Er fügt hinzu: "Eine bemerkenswerte Figur, in der die Geheimnisse der Primzahlen und Vielfachen verborgen sind... Es bleibt das Problem, die Eigenschaften der Linien auf den Senkrechten zu entdecken."

Erst im April 1676 lässt er die Zahlenfolge mit 0 beginnen und fügt die senkrecht untereinander liegenden Punkte unter der Null hinzu. Überraschenderweise tritt genau die gleiche Figur in Eulers erstem Notizbuch auf, das er etwa um 1726 verfasste. Euler zählt sogar beinahe dieselben Zahlen auf, nämlich die ganzen Zahlen von Null bis 25.<sup>31</sup>

Nunmehr macht Leibniz neue Entdeckungen allein auf Grund dieser Ergänzung. Er gesteht, dass er zuvor nicht etwas Wunderbares gesehen hatte, was sofort beim Anblick der Figur ins Auge fällt:

*"Die Zwischenräume zwischen den von gleich langen punktierten Linien vollen Senkrechten sind auf beiden Seiten ähnlich. (Vides interiecta directis plenius aequalibus lineis punctatis utrinque similia esse)".*

Er glaubt, dass auch die unterbrochenen Senkrechten eine bemerkenswerte Ordnung befolgen, ohne irgendwelche weiteren, genaueren Aussagen zu machen. Aber er fügt äußerst interessante, allgemeine Schlussfolgerungen über die Kunst hinzu, intelligible Theoreme zu entdecken. Offensichtlich besteht diese Kunst darin, die Darstellungen (representaciones) der Theoreme zu malen oder zu hören, da die Sätze selbst nicht gemalt oder gehört werden können und in diesen Darstellungen bestimmte wahrnehmbare Schönheiten zu beobachten. Die Darstellungen werden uns den Satz oder die Eigentümlichkeit, dass die Natur der Sache es mit sich bringt, sozusagen diese Sichtbarwerdungen (apparitiones) hervorzubringen, wenn die Sache durch diese Charaktere ausgedrückt ist.

Leibniz fügt hinzu: "Ich glaube hier endlich den Schlüssel zu den meisten, bisher unbekanntem Geheimnissen der Zahlen gefunden zu haben". Einige Tage später ist er noch zuversichtlicher.<sup>32</sup> Dort behauptet er, das Schloss

geöffnet zu haben, das bis dahin die Geheimnisse der Zahlen und die Natur der Primzahlen verborgen habe. Er habe dies erreicht, indem er Punkte verwendet habe, die einige wundervolle, weissagende (geomanticae) Figuren zustande gebracht hätten.

#### 4.3. Partitionen

Im August 1673 sucht Leibniz die Zahl der Partitionen einer gegebenen Zahl  $n$  und einer gegebenen Klasse  $k$ , d.h.  $p_n^k$ .<sup>33</sup>

Er schliesst aus einigen Beispielen, dass man die Anzahl aller Partitionen der Klasse  $k-1$  aller vorausgehenden Zahlen zu suchen hat, d.h.  $p_{n-i}^{k-1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Aber man muss jedes Mal die Anzahl der Zahlen von  $p_{n-i}^{k-1}$  subtrahieren, die zwischen  $n$  und  $n-i$  liegen, d.h.  $(i-1)$ . Er folgert allgemein:

$$p_n^k = \sum_{i=1}^k (p_{n-i}^{k-1} - (i-1))$$

und fügt hinzu:

*"Dies ist die universale Lösung, deren spezielle Abkürzungen durch besondere Methoden entsprechend dem Verhältnis der Zahlen und Klassen gefunden werden können".*

Wir haben solange zu summieren, wie die Summanden grösser als Null sind. Aber es ist keine Universalregel. Zum Beispiel gilt:

$$p_8^4 = 5, \text{ jedoch } p_7^3 + (p_6^3 - 1) = 4 + (3-1) = 6$$

Dagegen ist die Regel im Fall  $k = 3$  richtig, für den Fall also, den Leibniz seiner Verallgemeinerung zugrunde gelegt hatte.

Im Zeitraum 1678 bis 1684 versucht er,  $p_n^4$  mit Hilfe von  $p_n^3$  und  $p_n^2$  zu finden.<sup>34</sup> Sei  $n = 10$ . Leibniz betrachtet die ersten Summanden 7,6,5,4, und sucht alle Partitionen in drei Summanden der Differenz zwischen 10 und diesen Zahlen, also von  $x = 3,4,5,6$ , er erhält:

$$p_3^3 = 1, \quad p_4^3 = 1, \quad p_5^3 = 2, \quad p_6^3 = 3$$

Grössere  $x$ , wie  $x = 7$ , führen auf unbrauchbare Partitionen, weil einige nur Wiederholungen früherer Partitionen sind. Dies geschieht, weil die Summe der letzten beiden Summanden zu klein ist, d.h. die Summe von  $1 + 1, 1 + 2$ . Leibniz erhält die Regel:

Es sind alle diejenigen Partitionen in 2 Summanden unbrauchbar, deren Summe kleiner als  $x - (n-x)$ , d.h. als  $2x - n$  ist.

Aber es gibt eine Einschränkung. Wir können nur solche Partitionen in 2 Summanden subtrahieren, deren grösstes "segmentum" nicht die zulässige Grösse  $n-x$  übersteigt. Andernfalls ist sie keine der in Frage kommenden Partitionen.

Im Falle  $x = 7$  treten derartige Partitionen nicht auf, weil der grösste

Summand der Partitionen in 2 Summanden nicht grösser als  $\left\lceil \frac{x-1}{2} \right\rceil = 3$  ist.

Die Situation ändert sich jedoch im Falle  $x = 8$ . Wenn wir die Regel von Leibniz anwenden, so müssen alle Partitionen in zwei Summanden subtrahiert werden, deren Summe kleiner als  $2 \cdot 8 - 10 = 6$ , also deren Summe  $5, 4, 3, 2, 1$ , ist, und deren grösstes Segment nicht grösser als 2 ist. Tatsächlich zieht Leibniz von den Partitionen

$$6 \underline{1} \underline{1}, \quad 5 \underline{2} \underline{1}, \quad 4 \ 3 \ 1, \quad 4 \underline{2} \underline{2}, \quad 3 \ 3 \ 2$$

diejenigen ab, die die Partitionen in zwei Summanden  $1 \cdot 1, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2$  enthalten.

Leibniz bedenkt, dass jede Zahl  $(x)$ , die kleiner als die gegebene Zahl  $v$  ist, durch  $v - x$  dargestellt werden kann, jede Zahl  $((x))$ , die kleiner als  $2(x) - x$  ist, durch  $v - 2x - y$ . Ohne an die erforderliche Einschränkung zu denken, leitet er daher die Rekursionsregel ab:

$$p_v^e = \sum p_{v-x}^{e-1} - \sum \sum p_{v-2x-y}^{e-2}$$

Diese Regel liefert falsche Resultate, da wir im allgemeinen zu viele Partitionen in  $e-2$  Summanden abziehen. Als Beispiel diene  $p_{10}^4 = 9$ .

Ist  $v - x = 8$ , so ergibt  $p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = 6$ . Aber es treten nur fünf Partitionen in zwei Summanden auf, da die Partition  $5 = 4+1$  als Rest zu 3 entfällt.  $3 \ 4 \ 1$  ist nicht möglich. Leibniz wurde ein Opfer seiner Suche nach Uniformität. Aber er bemerkt enthusiastisch:

*"Diese Art des Rechnens zeigt die einzigartige Natur der Universalität oder Totalität, die von den Logikern als einfach betrachtet wird. Die Mathematiker finden sie auf verschiedene Weise variiert. Hier haben die Dimensionen ihren Ursprung."*

Ich möchte an Leibnizens Definition der Dimension erinnern:

*"Dimensionen treten bei einer beliebigen Darstellung in der Wirklichkeit der im Geist stattfindenden Multiplikation statt."<sup>35</sup>*

Eine richtige Rekursionsformel, nämlich

$$p_n^k = p_{n-k}^k + p_{n-1}^{k-1}$$

leitete Leibniz erst um 1712 bis 1715 ab.<sup>36</sup>

#### 4.4. Diophantische Analysis

Euler erwähnt in seinem Notizbuch aus den Jahren 1740-1744<sup>37</sup> "das von Leibniz aufgeworfene Problem", das er auch in seiner "Algebra" behandelt<sup>38</sup>:

*"Man finde zwei Zahlen  $x$  und  $y$ , deren Summe ein Quadrat ist. Die Summe der Quadrate soll eine vierte Potenz sein."*

Euler gibt im Notizbuch das Lösungspaar  $x = 120, y = -119$  und das auch in die "Algebra" aufgenommene Lösungspaar in natürlichen Zahlen  $x = 4565 \ 486 \ 027 \ 761$   
 $y = 1061 \ 652 \ 293 \ 520$ .

Dieses Problem wurde nicht von Leibniz aufgeworfen, sondern bereits von Fermat gelöst, der auch Eulers Lösungszahlen ermittelte.<sup>39</sup> Wir haben hier mit diesem Problem zu tun, sondern mit einer Verallgemeinerung von Fermats Problem auf 3 Zahlen. Leibniz wurde mit diesem allgemeineren Problem im Februar oder März 1674 durch Jacques Ozanam bekannt.<sup>40</sup> Es lautet demnach:

*"Man finde drei Zahlen  $x, y, z$ , deren Summe ein Quadrat ist. Die Summe der Quadrate soll eine vierte Potenz sein."*

Leibniz schrieb seine Lösungen zu diesem Problem innerhalb weniger Tage nieder. Wir haben sieben unabhängige Lösungen und acht Fortsetzungen von Zwischenergebnissen gefunden. Leibniz glaubte zunächst, es gäbe keine Lösung in positiven Zahlen, und ermittelte das Lösungstriplet 42, 21, -14. Etwas später fand er eine wahre Lösung, die ausschliesslich aus natürlichen Zahlen besteht: 64, 152, 409. Bezeichnenderweise versucht er unmittelbar nach dieser Lösung das Problem zu verallgemeinern:

*"Ist es möglich, beliebige Potenzen für die Summe der Zahlen wie für die Summe der Quadrate zu wählen?"*

Ohne weiteren Kommentar fügt er hinzu: "Diese Frage muss freilich untersucht werden". Soweit ich weiss, ist dieses Problem bis heute nicht gelöst.

Dreissig Lösungsversuche allein aus den Jahren 1672-1676 zeugen von Leibnizens erfolglosem Bemühen<sup>41</sup>, ein anderes, von Ozanam aufgeworfenes Problem der diophantischen Analysis zu lösen, das sogenannte Sechsquadratproblem:

*"Man finde drei derartige Zahlen, dass die Summe und die Differenz von zwei beliebigen von ihnen Quadrate sind."*

Pietro Mengoli glaubte 1674, zeigen zu können, dass es keine Lösung hat. Aber Ozanam widerlegte ihn sofort durch ein Lösungstriplet, das Leibniz verifizierte. Ozanam veröffentlichte 1687 und 1691 noch einmal Lösungen des Problems. Euler löste es im erwähnten Notizbuch aus den Jahren 1740-1744.<sup>42</sup>

Er setzt voraus:

$$x = (p^2 + q^2) \cdot (r^2 + s^2), \quad y = 2(pr + qs) \cdot (ps - qr), \quad z = 2(ps + qr) \cdot (pr - qs)$$

Daher sind  $x \pm y, x \pm z, y \pm z$  Quadrate. Er leitet ab, dass

$$s = (p^2 + q^2)^2, \quad r = 4pq \cdot (p^2 - q^2)$$

und setzt  $p = nt^2, q = nu^2$ .

$$\text{Daher ist } s = n^4 \cdot (t^4 + u^4)^2, \quad r = 4n^4 t^2 u^2 (t^4 - u^4).$$

Setzt man  $p = 4, q = 1$ , so erhält man  $s = 289, r = 240$  bzw.

$$x = 239\,9057, \quad y = 228\,8168, \quad z = 187\,3432.$$

Dies ist genau Ozanams Lösung aus dem Jahre 1674, ohne dass Euler in diesem Zusammenhang Ozanam erwähnt. Er zitiert ihn bei der Erörterung eines anderen zahlentheoretischen Problems. Im Notizbuch führt Euler die weiteren Lösungen 733 025, 488 000, 416 304, bzw. 434 657, 420 968, 150 568 an, von de-

nen er die letzte in die "Algebra" aufgenommen hat.<sup>43</sup> Ich bezweifle daher, dass Euler wirklich nichts über die ältere, diesbezügliche Literatur wusste.<sup>44</sup> Hofmann Eulers Notizbücher nicht kannte.

In seinem ersten Lösungsversuch leitet Leibniz schliesslich folgende Gleichung ab<sup>45</sup>:  $2a^6 + a^5 = \frac{3}{16}$

Bezeichnenderweise bemerkt er, man solle die Folge der Zahlen untersuchen, die die Summe der sechsten und fünften Potenz derselben Zahl sind. Wenn die Gleichung überhaupt in ganzen Zahlen lösbar ist, so müsse man auf diese Weise eine Lösung finden. Er verfällt sofort auf den Gedanken, eine Maschine zu verwenden: Man benötigt Zahlen, die leicht in einer bestimmten beweglichen Maschine transponiert werden können, so dass man leicht jede Folge betrachten kann.

18 mal versucht er den folgenden Ansatz (1 ist eine Homogenitätsgrösse):  
 $al, al - x^2, al - x^2 - z^2$   
 oder  $al, x^2 - al, z^2 - x^2 + al$ .

Dadurch müssen zwei Summen und zwei Differenzen Quadrate sein. Aber Leibniz kommt nie aus Ziel, wegen Rechenfehler, oder wegen der zu grossen Zahl von Hilfsgrössen oder Variablen, die spezielle Teilbarkeitseigenschaften haben sollten. Keiner der anderen Mathematiker freilich aus dem 18. Jahrhundert, wie Gregory, Landen, Bumpkin, Wildbore, Hutton, Leybourn, Euler, die das Problem erfolgreich lösten, begannen mit einem solchen Ansatz.

Im April 1676 beginnt Leibniz fünfmal mit den folgenden sechs Bedingungen:

$$\begin{aligned} x + y &= a^2, & x + z &= c^2, & y + z &= e^2, \\ x - y &= b^2, & x - z &= d^2, & y - z &= f^2. \end{aligned}$$

Wir sehen sofort die Ähnlichkeit mit Eulers Ansatz. In einem Fall<sup>46</sup> führt Leibniz nicht weniger als 41 Hilfsgrössen ein und leitet 161 Gleichungen ab, bevor er den Versuch abbricht. 1678 fügte er eine irrtümliche Randbemerkung zu dieser Handschrift hinzu: Er glaubt, einen Ausweg gefunden und das Problem in der universalsten Weise gelöst zu haben.

Dennoch formulierte er einige allgemeine, richtige Richtlinien für die Lösung solcher Probleme. Ich möchte abschliessend die folgenden zwei zitieren:<sup>47</sup>

1. Die gesamte Kunst, Probleme dieser Schwierigkeit zu lösen, besteht darin, eine Methode zu entdecken, zu einer "Destruktion" zu kommen, notfalls mit Hilfe von Explikationen (d.h. Substitutionen), die so oft wie erforderlich wiederholt werden.

2. Nach hinreichender Prüfung des Problems habe ich erkannt, dass sie gesamte Kunst, Probleme in rationalen Zahlen zu lösen, auf Vergleiche ähnlicher Grössen hinausläuft, oder auf die Ableitung anderer aus ihnen, die mit den gegebenen Quadraten verglichen werden können.

## Die mathematischen Arbeiten von Leibniz

### FUSSNOTEN

1. J.E. Hofmann, "Leibniz als Mathematiker", in W. Totok, W. Haase, Leibniz, Sein Leben - sein Wirken - seine Welt, Hannover, 1966, S.442; zum folgenden vergleiche E. Knobloch, "Leibniz und sein mathematisches Erbe" Mitteilung der Mathematischen Gesellschaft der DDR, 1984, Heft 1, S.7-35.
2. Zur Bedeutung wissenschaftlicher Korrespondenzen für die Wissenschaftsgeschichte siehe R. Taton, "Les correspondances scientifiques et l'histoire de la science", in I Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias, Edición a cargo de Santiago Garma, Madrid, 1980, S.27-38.
3. L. Dutens (Hrsg.), Gothofredi Guilielmi Leibnitii opera omnia, 6 Bände, Genf, 1768,, hier Bd.VI,1.,S.64.
4. Thèse d'Etat Juin 1980, Université Paris I
5. Man lese zum Beispiel das Kapitel "Mathematics" von G.Mac Donald Ross, Leibniz, Oxford - New York, 1984.
6. J.E.Mc Guire, M.Tamny, Certain philosophical questions: Newton's Trinity Notebook, Cambridge, 1983.
7. E.R.Curtius, Europäische Literatur und lateinisches Mittelalter, Bern-München 6. Auflage 1967, S.10.
8. G.W. Leibniz, Specimen dynamicum, hrsg. u. übersetzt von H.G.Dosch, G.W. Most, E. Rudolph, Lateinisch-Deutsch, Hamburg 1982; siehe mein Essay Review in Analys of Science, 40, 1983, S.501-504.
9. E. Knobloch, Der Beginn der Determinantentheorie, Hildesheim 1980, N.50, S.213.
10. G.W.Leibniz, Sämtliche Schriften und Briefe, Bd. VII,1 (=LSB VII,1) (im Druck), N.51.
11. Bei Rita Widmaier, "Die Rolle der chinesischen Schrift in Leibniz' Zeichentheorie", Stud. Leib. Suppl. XXIV, Wiesbaden 1983, S.1 heisst es fälschlich "visibiles".
12. "Historia et origo calculi differentialis", in G.W.Leibniz, Mathematische Schriften, hrsg. v.C.J.Gerhardt, Halle 1858 (Hildesheim 1962), Bd.V,S.408.
13. E.Knobloch (Hrsg.), "Die mathematischen Studien von G.W.Leibniz zur Kombinatorik", Stud. Leib. Suppl. XVI, Wiesbaden 1976, N.40, S.260.
14. LSB VII, 1, N.42; siehe unten Kapitel 4.
15. LSB VII, 1, N. 110.
16. Eine Zusammenstellung einschlägiger Stellen ist zu finden in: E.Knobloch, "Übersicht über die unveröffentlichten mathematischen Schriften von Leibniz (1672-1676)" in Leibniz à Paris (1672-1676), Stud. Leib. Suppl., XVII, Wiesbaden 1978, S.13.
17. Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Leningrad, Fond 136, Opus 1, Nr. 129-140; siehe Manuscripta Euleriana Archivi Academiae Scientiarum URSS, Tomus I, editierte J.Ch. Kopelevič, M.V.Krutilova, G.K.Mikhailov, N.M.Raskin, Moskau-Leningrad 1962, N.397-408.
18. LSB VII, 1, N.10.
19. Notizbuch N. 136, Bl. 92v.
20. Entsprechendes behauptet E.Hlawka, "Leibniz als Mathematiker", Philosophia Naturalis 10 (1967/68), S.162.



Die mathematischen Arbeiten von Leibniz

21. E. Knobloch, "Zur Vorgeschichte der Determinantentheorie", Stud. Leib. Suppl. XXII, Wiesbaden 1982, S.113.
22. Knobloch 1978 (wie Anm. 16), S.39.
23. A. Horiuchi, Quelques aspects de la vie mathématique Japonaise à l'époque Edo, Maîtrise de Japonais, Université de Paris 7, Année universitaire 1983-84 S.121f.
24. Näheres bei E. Knobloch, "Die entscheidende Abhandlung von Leibniz zur Theorie linearer Gleichungssysteme", Studia Leib. 4 (1972), 163-180, und: "Unbekannte Studien von Leibniz zur Eliminations- und Explikationstheorie", Archiv for the H. of Ex. Sc. 12 (1974), 142-173.
25. E.Knobloch, Der Beginn der Determinantentheorie, Hildesheim 1980, N.57 und Knobloch 1974 (wie Anm.24).
26. LSB VII, 1, N.62.
27. LSB VII, 1, N.36.
28. LSB III, 1, N.2.
29. LSB VII, 1, N.86,87,88,89,90,92,94.
30. LSB VII, 1, N.92.
31. Notizbuch N.129 (wie Anm.17),Bl.43 v.
32. LSB VI, 3, N.51.
33. Knobloch 1976 (wie Anm. 13), N.40.
34. Knobloch 1976 (wie Anm. 13), N.46.
35. G.W. Leibniz, "Ein Dialog zur Einführung in die Arithmetik und Algebra", hrsg., "übers. und kommentiert von E. Knobloch, Stuttgart-Bad Canstatt 1976, S.100 f.
36. Knobloch 1976 (wie Anm. 13), N.54.
37. Notizbuch N.133 (wie Anm. 17), Bl. 76r.
38. L. Euler, Vollständige Anleitung zur Algebra, St. Petersburg 1770, 2, Teil # 240.
39. J.E.Hofmann, "Leibniz und Ozanams Problem, drei Zahlen so zu bestimmen, dass ihre Summe eine Quadratzahl und ihre Quadratsumme eine Biquadratzahl ergibt", Studia Leib. 1 (1969), 103-126.
40. LSB VII, 1, N.38,47.
41. LSB VII, 1, N. 42, 43, 44, 49 bis 61, 93, 96 bis 100.
42. Notizbuch N. 132 (wie Anm.17), Bl. 147v; siehe dazu H.P.Matvievskaia, "Die diophantische Analysis in den unedierten Manuskripten von L. Euler"(russisch) Istoriko-Matematičeskie Issledovanija 13 (1960), hier S.164.
43. L. Euler, Algebra (wie Anm. 38), 2. Teil, # 235.
44. J.E.Hofmann, "Zur Geschichte des sogenannten Sechsquate-problems", Mathematische Nachrichten 18 (1958), 152-167.
45. LSB VII, 1, N. 42.
46. LSB VII, 1, N.96.
47. LSB VII, 1, N.50, 53 vom August 1674.