

INVESTIGACIONES DE LEIBNIZ SOBRE LA NOCION Y EL POSTULADO DE
LAS PARALELAS

Javier Echeverría Ezponda
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

A pesar de la importante edición de Gerhardt (1858-1863) de siete volúmenes de escritos y correspondencia científica de Leibniz, así como de un volumen adicional (1899) de su correspondencia con matemáticos, puede afirmarse sin riesgo de error que la matemática leibniziana continúa en su mayor parte inédita. Y, además, por la importancia de los trabajos que Leibniz dejó sin publicar, que dará lugar a un nuevo capítulo de la historia de las matemáticas. La edición crítica de la Academia de Berlín no ha producido por el momento más que dos volúmenes de correspondencia científica y técnica. Desde el año 1981 está preparado el primer volumen de escritos matemáticos y científicos, pero aún no ha visto la luz. Los profesores Knobloch y Contro, encargados de dicha edición, se han visto obligados a preveer hasta ocho volúmenes para tan sólo los cuatro años que duró la estancia de Leibniz en París (1672-76). Por mi parte, puedo pronosticar que con la etapa inmediatamente ulterior (1676-79, hasta la muerte del duque Johan Friedrich) sucederá otro tanto. Lo cual significa que la comunidad científica tardará más de tres siglos en conocer a fondo a Leibniz como matemático y científico. El propio Leibniz afirmó que quien le conocía por sus publicaciones no le conocía en absoluto. Así como en el campo de su filosofía las ediciones de textos, sin ser exhaustivas ni mucho menos, permiten en general conocer su pensamiento, la frase sigue siendo válida en lo que respecta a la ciencia. Knobloch señala ¹ que sólo un diez por ciento de sus escritos científicos han sido publicados. Al ser la Akademie-Ausgabe cronológica, este retraso es explicable: muchos borradores y escritos no ofrecen la menor pista sobre la fecha en que fueron escritos, con lo cual la preparación de cada nuevo volumen de las Obras y Correspondencia Completas resulta enormemente trabajosa.

Entretanto, resulta urgente y necesario, por la actualidad que sigue teniendo la inventiva de Leibniz, que los historiadores de la ciencia vayan familiarizándose con algunos aspectos parciales de la labor matemática de Leibniz; en tal sentido se orientan las tres ediciones recientes de Knobloch ² sobre el álgebra, la combinatoria y los determinantes, la de Zacher sobre el Cálculo Binario ³ y la mía propia sobre

la Característica Geométrica.⁴

En la presente comunicación aludiré brevemente, y por supuesto con carácter parcial y provisional, en tanto no se complete la edición crítica, a algunos trabajos de Leibniz sobre los fundamentos de la Geometría, y en concreto sobre el axioma euclidiano de las paralelas. Puede afirmarse que se trata de una cuestión prácticamente inédita, pues sólo en la tesis de Josef Lauter, Die Prinzipien und Methoden der Geometrie bei Leibniz⁵, que nunca fue publicada, se estudian algunas de las tentativas de Leibniz para dar una nueva fundamentación axiomática a la Geometría, comparándolas por su importancia a la obra clásica de Hilbert⁶.

Sin embargo, Lauter basó su estudio en los escasos ensayos sobre axiomatización y fundamentación de la Geometría publicados por Gerhardt y Couturat⁷, lo cual proporciona un carácter bastante incompleto a su investigación, pese al rigor de su análisis de dichos textos. Por esa misma causa, la cuestión de las paralelas apenas tiene cabida en su tesis, a pesar de que Leibniz dedicó no pocos esfuerzos a reflexionar sobre la noción de paralela, e incluso sobre la demostración del axioma XIII de Euclides.

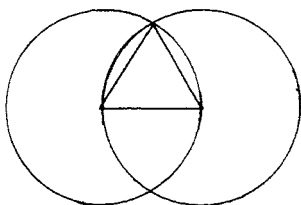
* * * *

Es sabido que Leibniz lee los Elementos por primera vez de manera sistemática durante su estancia en París, a partir de 1673. Desde el principio manifiesta críticas respecto a la estructura deductiva de dicha obra, y en particular a las definiciones (que considera inútiles o confusas en la formulación euclidiana) y a los axiomas (que considera demostrables). En el Projet d'un art d'inventer, editado por Couturat, puede leerse:

*"Le defaut le plus general, et dont Euclide meme n'est pas exempt, c'est qu'on suppose des axiomes qu'on pourroit demonstrier"*⁸.

En 1679 Leibniz trabajó intensamente en el análisis de las nociones geométricas y de los axiomas, intentando construir una nueva Geometría: las críticas se repiten en distintos fragmentos, siempre en el mismo sentido. Leibniz acusa a los geómetras, incluido Euclides, de que sus demostraciones no son suficientemente rigurosas. Así, en el fragmento 4 de febrero de 1679 se afirma:⁹

"Euclides quiso atenerse a un rigor máximo al demostrar: así, prueba que en un triángulo dos lados son mayores que el tercero, lo que, como decían riendo los epicúreos, hasta un asno conoce. Entretanto no prueba otras cosas que se puede ver precisan más de demostración, como por ejemplo en el libro 1, proposición 1ª, donde enseña a construir un triángulo equilátero sobre una base dada, asumiendo que dos círculos descritos a



partir de una recta que se toma como base tomando sus extremos (por centro) y la propia recta (como radio) se han de cortar entre sí. Lo cual no es igualmente manifiesto. En efecto, hay que probar que se cortan fuera de la propia recta de partida" *.

El fragmento 36¹⁰, de septiembre de 1679, retoma esta cuestión en forma más sistemática, lo cual le lleva a interesantes investigaciones sobre las nociones de interior, exterior y frontera (ambitus). El fragmento 37¹¹ resulta la primera tentativa amplia de demostrar los axiomas de Euclides, y su título explicita el proyecto general de la ulterior investigación leibniana: *Demonstrationes Geometrarum in Primis Elementis non satis severa esse*. En dicho fragmento se analizan las definiciones XV, XVI y XVII de los Elementos, iniciándose con ello la larga serie de intentos leibnianos por analizar una por una las definiciones, proposiciones y axiomas de Euclides, como medio para construir una Geometría más general y más clara. Como botón de muestra del extremo rigor leibniano en el estudio de los fundamentos de la Geometría

*: *Euclides summum rigorem observare voluit in demonstrando: ideo probat quod in triangulo duo latera sint tertio majora, quod, ut Epicurei ridentes ajebant, etiam asinus novit. Interea non probat alia quae magis probatione indigere videntur, exempli causa in prop. 1 lib. 1 ubi triangulum aequilaterum super data basi constituere docet, assumit duos circulos ex rectae (quae pro basi sumitur) extremis et intervallo ipsius rectae descriptos, sese secare. Quod non equidem ita manifestum est. Imo probandum est se secare extra ipsam rectam productam. (L.Hd. XXXV, I, Nr. 2, Bl. 6^r de la catalogación Bodemann, Fragmento 4, p. 44 de la edición citada).*

El postulado de las paralelas

baste decir que en dicho fragmento, y en su crítica de las definiciones XV y XVI, Leibniz critica a Euclides el hecho de haber asumido sin demostración que el centro de un círculo está en el interior del mismo, pese a que en las definiciones de centro y de círculo nada se dice al respecto.

Resumiendo sucintamente el espíritu general de estas investigaciones de Leibniz sobre los fundamentos de la Geometría, se trataría de:

- 1.- No suponer nada que no haya sido explicitado como tal presupuesto.
- 2.- No presuponer nada que pueda ser demostrado.
- 3.- Analizar las definiciones geométricas hasta ofrecer nuevas formulaciones que sean las más simples posibles, que luego sean efectivamente utilizadas en las demostraciones y que, a poder ser, se autosustenten como definiciones por ser constructivas, como diríamos hoy, o definiciones reales, como decía Leibniz.
- 4.- Intentar demostrar uno por uno los axiomas de Euclides, y no sólo el de las paralelas. Así, Leibniz insiste varias veces a lo largo de su vida en su demostración, propuesta desde 1672 a Galloys, del axioma según el cual "El todo es mayor que la parte".
- 5.- Intentar buscar un nuevo elenco de nociones simples y de axiomas indemostrables que permitan, por un lado, englobar la Geometría de los Elementos, y por otro, inventar nuevos problemas, objetos y demostraciones matemáticas.

En este contexto general, y con matices peculiares a lo largo de las distintas investigaciones que llevó a cabo a lo largo de su vida, se inscriben sus trabajos sobre el quinto postulado de Euclides. Obtenemos con ello una primera diferencia, fundamental, entre las investigaciones de Leibniz y las de otros matemáticos que se han ocupado del tema a lo largo de la historia: a Leibniz no le preocupa tanto que el axioma XIII (o el V Postulado) sea oscuro en su formulación, relativamente a los restantes, y que en base a ello tenga sentido intentar su demostración a partir de los demás. Para Leibniz, efectivamente, el axioma XIII tiene defectos específicos, sobre todo por la defectuosa definición de paralelas que Euclides introduce, pero también los restantes axiomas adolecen de defectos similares, y por consiguiente son demostrables. Leibniz trató, ciertamente, de demostrar el axioma de las paralelas, pero no con más empeño que los restantes axiomas y presuposiciones de Euclides.

El postulado de las paralelas

Para ver la cuestión más en concreto, en la presente comunicación elegiré un manuscrito inédito, fechado provisionalmente en 1685 por el Kronologisches Katalog de Hannover, en el cual se encuentra una investigación sistemática de Leibniz sobre las definiciones y axiomas de los Elementos de Euclides. Pero es importante señalar que en la investigación leibniziana pueden obtenerse resultados importantes para la cuestión de las paralelas cuando se están analizando otras nociones y axiomas. Así ocurrió en 1679, como ya subrayé en mi comunicación al II Congreso de la SEHC¹². Allí, intentando analizar las nociones euclídeas de plano y de recta, que a Leibniz siempre le parecieron insatisfactorias, propone nuevas definiciones de dichas figuras geométricas, como conjuntos de puntos determinados por dos (el plano) y tres (la recta) puntos dados, más la relación de congruencia, que en 1679 era la relación geométrica clave. Tal y como mostró Lechallas en 1912¹³, se anticipaban así las definiciones de Lobatchevsky, pero sin conectar esas nuevas nociones de recta y plano con el problema de las paralelas, por lo cual su propuesta se diluyó entre la multitud de propuestas de gran interés geométrico y topológico que abundan en sus manuscritos geométricos.

Si pasamos ya al manuscrito inédito antes aludido¹⁴, que no tiene título, conviene subrayar que Leibniz recorre el libro de Euclides definición tras definición y axioma tras axioma, señalando los defectos específicos de cada uno, así como los inconvenientes generales del sistema axiomático de Euclides. Al llegar a los axiomas Leibniz afirma tajantemente:

*"Pienso que todos los axiomas pueden ser demostrados, y que de hacerlo así la contribución al perfeccionamiento de la ciencia sería mayor de lo que se cree" **

Esta es una convicción firme en Leibniz. Es sabido que siempre elogió a Roberval por dicha tentativa, ridiculizada por sus contemporáneos, y que trató incluso de leer los manuscritos inéditos de Roberval relativos a la demostración de los axiomas de Euclides, sin éxito. Pero,

*: *Puto omnia axiomata posse demonstrari, idque majoris esse ad perfectionem Scientiae, quam quis credat (L. Hd. XXXV, I, Nr. 5, Bl. 79^v)*.

El postulado de las paralelas

en cualquier caso, el interés de Leibniz por los intentos de demostración de Proclo, Pappo, Clavio e incluso del propio Apolonio, así como de otros matemáticos, se mantuvo constante a lo largo de toda su vida. Leibniz criticó en detalles concretos a esos predecesores suyos, pero siempre los elogió por la pretensión misma de demostrar los axiomas de Euclides.

Todo esto vale para los axiomas, pero conviene hacer notar que para Leibniz los postulados tienen una función lógica muy diferente:

*"Los postulados no son otra cosa que posibilidades asumidas, o generaciones, tan fáciles que no sea necesaria la labor de demostrarlas" **

Es decir que, a diferencia de los axiomas, que son todos demostrables, los postulados enuncian la existencia de entes geométricos posibles, y ello por medio de la construcción o generación de las figuras correspondientes.

Pero el punto básico de la crítica son las definiciones de Euclides, que le parecen inservibles en su gran mayoría. Para Leibniz, el defecto fundamental de la Geometría de Euclides estriba en su definición de recta. Repetidas veces trató de mejorar dicha definición y, aunque también se ocupó específicamente de la noción de paralela, cabe afirmar que las grandes novedades sobre el V Postulado (o axioma XIII) provendrán más bien de su análisis del género (recta) que de la especie (paralela). En el fragmento aquí comentado dicha crítica resulta muy clara. Los Elementos de Euclides:

*"no proporcionan ninguna definición de recta. En efecto, la que ofrece Euclides ¹⁵ no es inteligible, ni se emplea en las demostraciones" ***

Tal y como el propio Leibniz afirma al analizar la cuarta definición de Euclides:

*: *Postulata: Hoc nihil aliud sunt quam assumtae possibilitates, aut generationes, ita faciles ut non censeatur opus eas demonstrare* (L. Hd. XXXV, I, Nr. 5, Bl. 19^v).

** : *nullam adhibent definitionem rectae. Nam ea quam Euclides offert, quod ex aequo suae interjaceat puncta, non est intelligibilis, nec adhibetur in demonstrando* (L. Hd. XXXV, I, Nr. 5, Bl. 20^v)

"Mucho he meditado sobre la definición de línea recta y pienso que puede ser definida como la vía simplicísima de un punto a otro punto. De donde se sigue también que es la vía mínima entre dos puntos. Así pues a la distancia entre los puntos A y B la designamos mediante la recta AB. Asimismo designamos el sitio de un punto a otro por medio de la magnitud de la recta interceptada (por ambos), es decir la distancia" *.

Leibniz demuestra a continuación que esa definición es clara y distinta, en el sentido de que define un objeto geométrico único y determinado. Subrayo el hecho de que la recta es simplemente un modo de designar la distancia (de medirla, diríamos hoy en día), pero no el único. Leibniz consideró numerosas veces la posibilidad de otras vías o líneas entre dos puntos. Siempre que esas líneas sean rígidas, aunque no sean rectas, permiten definir el situm entre dos puntos, pero conforme a geometrías que hoy llamaríamos curvas. Leibniz poseyó plenamente la noción gaussiana de geodésica.

Si pasamos a párrafos posteriores del manuscrito:

"Hago notar que en la definición 29 ¹⁶ se puede dudar de que se dé un cuadrilátero equilátero que sea a la vez rectángulo, pero si se piensa que una recta igual a otra recta y apoyada sobre ella conforme a ángulos rectos se mueve en el plano, lo cual efectivamente es posible, resulta manifiesto que también la anterior (figura) resulta posible. El mismo defecto se encuentra en la definición de paralelas ¹⁷, pero si se piensa que una recta finita se mueve sobre una recta indefinida permaneciendo invariante el mismo ángulo, y si el otro extremo describe una línea, es manifiesto que dicha recta es equidistante a la primera" **

*: *Multum meditatatus sum de definitione lineae rectae et puto ita definiri posse quod sit via simplicissima à puncto ad punctum. Unde sequitur et minimam esse inter duo puncta. Hinc distantiam inter puncta A et B designamus per rectam AB. Situm quoque puncti ad punctum per magnitudinem rectae interceptae designamus sive per distantiam (Ibid., Bl. 18^{ra}).*

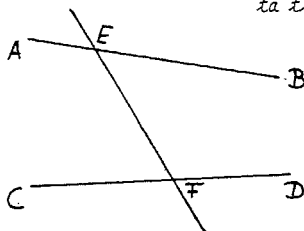
** : *Noto ad definitionem 29. dubitari posse an detur quadrilaterum aequilaterum quod simul sit rectangulum, sed si cogitetur rectam rectae aequali ad rectos angulos insistentem in plano moveri quod utique possibile est, manifestum est tale quoque esse possibile. Idem vitium est*

El postulado de las paralelas

Podemos ver, aunque sólo sea en un ejemplo, algún aspecto del método leibniciano de análisis de las definiciones. No basta con nombrar al cuadrilátero equilátero rectángulo. Hay que demostrar su existencia, su posibilidad. Las definiciones han de ser reales, y las de Euclides no lo son. En el caso de las paralelas, Euclides proporciona una definición intuitiva mientras que, para Leibniz, si se definen las paralelas como líneas rectas equidistantes, entonces su existencia puede ser demostrada por medio del movimiento de un segmento sobre una recta indefinida. Se dirá quizá que, entonces, en ese movimiento se presupone la noción de paralelismo, puesto que el segmento se mueve paralelamente a sí mismo. En la concepción leibniziana la afirmación más precisa no es ésta: lo esencial es que el movimiento tiene lugar "servato eodem angulo", por lo cual la dificultad lógica se remite a la definición de igualdad de ángulos, pero no a la de paralelas. Por supuesto, también es imprescindible la noción de movimiento, pero esto es una característica esencial en la geometría leibniziana; al menos entre 1679 y 1685, la noción de movimiento siempre es previa, e incluso la de movimiento continuo que conserva la rigidez de los objetos que se mueven.

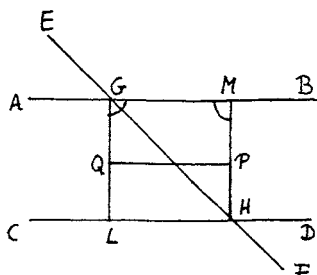
Todo ello nos llevaría muy lejos, y sólo se trata aquí de proporcionar un botón de muestra. Pasemos pues al análisis que Leibniz lleva a cabo en este manuscrito del axioma XIII de Euclides:

"El axioma 11 de Euclides, que para Clavio es el 13, fue intentado demostrar por Proclo, pero de manera imperfecta, a juicio de Clavio, y por mi parte a su vez la demostración de Clavio no me satisface. Esta tiene lugar así:



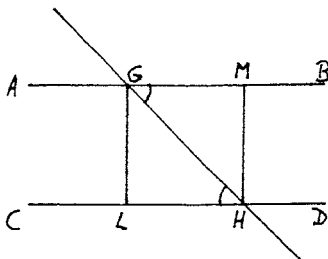
Si sobre dos líneas rectas AB, CD incide otra recta EF de manera que los ángulos internos BEF, DFE de una misma parte sean menores que dos rectos, esas dos rectas, producidas hasta el infinito, se cortan entre sí en aquella parte en que esos ángulos son menores que dos rectos. Este enunciado lo utiliza Euclides al de-

definitiones parallelarum, sed si cogitetur finitam rectam super recta indefinita eodem servato angulo moveri, et altero extremo describi lineam manifestum est, eam rectam esse et priori aequidistantem [Ibid., Bl. 19^a].



mostrar que si una recta corta a dos paralelas produce ángulos iguales con ambas, a saber el ángulo AGH (es igual) al ángulo CHF. Surge esta perplejidad de la noción de paralelas. En efecto, si Euclides definiere las paralelas como las que son equidistantes, es decir como aquellas cuyas distancias mínimas son iguales por doquier (corolario de esta definición es que no pueden ser concurrentes, ya que en el punto de concurso no hay distancia en el plano) desaparece la dificultad.

Veamos la cuestión por tanto a partir de esta definición:



Como GL y MH son iguales, muévase la recta LH (perpendicular a la otra, o mínima) permaneciendo el ángulo recto, de manera que L se traslade por LG y H por HM. Puesto que LG y HM son recorridas en el mismo tiempo, entonces LH y GM son iguales. Puesto que los triángulos GMH y HLG son de lados iguales, también serán de ángulos iguales, es decir que el ángulo GHL es igual al ángulo HGM" *.

Esta es la demostración del axioma de las paralelas propuesta por Leibniz en el manuscrito inédito que estamos comentando. Por supuesto, no es la única que investigó, aunque sí cabe verla repetida en otros fragmentos inéditos¹⁸. Independientemente de la valoración que se pueda hacer de ella, lo cual podría dar lugar a un prolongado debate, que en mi opinión sólo tiene sentido emprender cuando se conozcan todos los inéditos de Leibniz relativos a este tema, lo cierto es que algunas conclusiones provisionales pueden ser extraídas:

*: XI. Axioma Euclidis quo Clavio est XIII. demonstrare conatus est Proclus, sed Clavio iudicē imperfectē, et mihi vicissim demonstratio non satisfacit. Ita autem habet: Si in duas rectas lineas AB, CD altera recta EF incidens internos, ad eisdemque partes angulos BEF, DFE duobus rectis minores faciat, duae illae rectae in infinitum productae sibi mutuo incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores. Hoc pronuntiatio utitur Euclides ad demonstrandum quod si recta incidat in duas paralelas angulos ad eas facit aequales. Nempe angulum AGH angulo CHF orta ista perplexitas ex definitione parallelarum, nam si Parallelas definisset Euclides, quae sunt aequidistan-

El postulado de las paralelas

1.- Leibniz adopta decididamente la definición de líneas paralelas (y por ende de rectas paralelas) como equidistantes.

2.- La noción de distancia se remite en Leibniz a la noción de situs, más general. Lo esencial es que dos líneas son equidistantes si sus puntos respectivos, tomados dos a dos, tienen el mismo sitio entre sí.

3.- La demostración del axioma de las paralelas se funda en esta nueva noción (equidistancia), la cual se fundamenta a su vez en las nociones de distancia, sitio e igualdad, pero también en la noción de movimiento; y aquí Leibniz piensa en movimientos netamente físicos.

4.- Los movimientos geométricos son caracterizados por los invariantes que dejan: servato situ, servata distantia, servato angulo recto, servato angulo, etc., son expresiones que continuamente resurgen en sus investigaciones. Provisionalmente, pero con cierto grado de verosimilitud, cabe correlacionar la geometría leibniziana con la concepción de Félix Klein.

5.- La demostración del axioma de las paralelas no es un tema aislado, sino que involucra todas las nociones básicas de la Geometría, así como la demostración de los restantes axiomas.

6.- En cualquier caso, las investigaciones de Leibniz sobre el tema son muy numerosas, y plenamente originales, por lo cual, como se dijo al principio, estas conclusiones han de ser consideradas como provisionales, pese a que abran ya por sí mismas un nuevo capítulo de la historia de las matemáticas, hasta ahora desconocido, y que habrá de ser elaborado en los próximos años.

Javier Echeverría

* * * * *

tes seu mínimas distantias ubique habent aequales (cuius corollarium est non posse concurrere, nam in concursu nulla plane distantia est) cessabat difficultas. Ex hac ergo definitione rem ostendam:

Cum GI et NH sit aequalis moveatur recta LH utrique perpendicularis seu mínima, manente angulo recto, ita ut I incedat per LG et H per HM. Utiq; eodem tempore percurrentur LG et HM ergo LH et GM sunt aequales. Cum ergo triangula GMH et HLG sint aequalium laterum, erunt et aequalium angulorum, seu angulus GHL aequalis angulo HGM [L.Hd. XXXV, I, Nr. 5, Bl. 20^a].

* * 262 * *

NOTAS

- 1.- Eberhard Knobloch, Die mathematischen Arbeiten von Leibniz im Lichte seines unveröffentlichten Nachlasses, texto inédito, p. 1.
- 2.- G. W. Leibniz, Ein Dialog zur Einführung in die Arithmetik und Algebra, ed. E. Knobloch, Stuttgart-Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog 1976;
E. Knobloch: Die mathematischen Studien von G.W. Leibniz zur Kombinatorik, Wiesbaden: F. Steiner 1976.
E. Knobloch, Der Beginn der Determinantentheorie-Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkül, Vol. 2, Gerstenberg Verlag, Hildesheim, 1980.
- 3.- H. Zacher, Die Hauptschriften zur Dyadik von G.W. Leibniz, Frankfurt: V. Klostermann 1973.
- 4.- J. Echeverría, Edition Critique des manuscrits concernant la Caractéristique Géométrique de Leibniz en 1679, Université Lille III, ANRT 1-84-1802 (en microforma).
- 5.- Lauter, J.: Die Prinzipien und Methoden der Geometrie bei Leibniz, Aachen 1953, Tesis Doctoral.
- 6.- D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Stuttgart: Teubner 1972, 11a ed.
- 7.- Leibniz, G.W.: Opusculs et fragments inédits, ed. Couturat, Paris 1903, reimpr. Olms 1966.
- 8.- Ibid., p. 180.
- 9.- L. Hd. XXXV, I, Nr. 2, Bl. 6^r (cat. Bodemann); Fr. 4, p. 44 de la ed. de J. Echeverría.
- 10.- L. Hd. XXXV, I, Nr. 11, Bl. 55-56 (Bodemann).
- 11.- L. Hd. XXXV, I, Nr. 4, Bl. 1-2 (Bodemann).
- 12.- J. Echeverría, La Geometría Leibniziana: de la Perspectiva al Analysis Situs, en Actas del II Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias, ed. M. Horzmiqón, Jaca:SEHC 1974, pp. 69-79.
- 13.- G. Lechallas, Une définition géométrique du plan et de la ligne droite d'après Leibniz et Lobatchewsky, Revue de Métaphysique et de Morale 20 (1912), pp. 718-721.
- 14.- L. Hd. XXXV, I, Nr. 5, Bl. 18-21 (Bodemann).
- 15.- "Línea recta es la que yace igual sobre sus puntos", trad. de J. Vera en Elementos de Euclides, libro I, Def. 4, en Científicos Griegos, Madrid: Aguilar 1970, vol. I, p. 702.
- 16.- Definición número 22 en la edición de Vera recién citada.
- 17.- "Rectas paralelas son las que, estando en el mismo plano y prolongadas al infinito, no se encuentran" (Def. 23 de la ed. Vera, p. 704).
- 18.- Véase por ejemplo L. Hd. XXXV, I, Nr. 3, Bl. 13-14.