redie Revista Electrónica de Investigación Educativa
ISSN: 1607-4041
http://redie.uabc.mx

Vol. 19, Núm. 1, 2017

Tareas con diversas soluciones: estructura conceptual en profesores de matemáticas

Multiple-Solutions Tasks: Mathematics Teachers' Conceptual Structure

Fernando Barrera-Mora (*) fbarrera10147@gmail.com
Aarón Víctor Reyes-Rodríguez (*) rrav76@yahoo.com.mx

(*) Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
(Recibido: 6 de noviembre de 2014; Aceptado para su publicación: 26 de octubre de 2015)

Cómo citar: Barrera-Mora, F. y Reyes-Rodríguez, A. V. (2017). Tareas con diversas soluciones, estructura conceptual en profesores de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 19*(1), 110-122. Recuperado de http://redie.uabc.mx/redie/article/view/971

Resumen

En el artículo se analizan las diferentes soluciones que un grupo de 15 profesores de matemáticas propuso para resolver un problema rutinario de aritmética, con el objetivo de identificar qué elementos específicos puede aportar el uso de tareas con múltiples soluciones para la formación y actualización docente. La posición teórica que sustenta este trabajo tiene como elemento fundamental la identificación y discusión de rutas de solución para fortalecer el conocimiento matemático y didáctico de los profesores, y favorecer el desarrollo de una postura crítica respecto a su práctica profesional.

Palabras clave: Procesos de aprendizaje, resolución de problemas, formación de profesores.

Abstract

This paper analyzes the different solutions proposed by a group of 15 mathematics teachers to a routine arithmetic problem, with the aim of identifying the contribution provided by multiple-solution tasks in the training and continuing education of teachers. The theoretical background of this work is based on the identification and discussion of solution routes to strengthen teachers' knowledge of mathematics and didactics, in addition to promoting a critical approach to their professional practice.

Keywords: Learning processes, problem solving, teacher education.

I. Introducción

La forma en que los profesores conceptualizan a las matemáticas y su aprendizaje determina el tipo de actividades que emplean en el aula, así como los medios o mecanismos de evaluación. Por otra parte, las actividades o tareas moldean las características del conocimiento que los estudiantes construyen (Stein y Smith, 1998; Silver, Ghousseini, Gosen, Charalambous y Font-Strawhun, 2005), al influir en la estructuración de sus formas de pensar y su visión de lo que significa hacer matemáticas (Henningsen y Stein, 1997).

Las aproximaciones didácticas tradicionales generalmente enfatizan la memorización y el desarrollo de habilidades algorítmicas y procedimentales; sin embargo, en las últimas décadas se ha intentado promover una aproximación dinámica y exploratoria de las matemáticas (Romberg, 1994) que conlleva conceptualizar el aprendizaje como una actividad durante la cual los estudiantes tienen oportunidades para discutir y defender sus ideas, formular y justificar conjeturas, establecer conexiones entre conceptos, y explorar relaciones, comunicar resultados y diseñar sus propios problemas. Esto va acorde con los principios del pensamiento matemático que impulsan el desarrollo de la disciplina (National Council of Teacher of Mathematics, 2000; Santos-Trigo, 2007).

Desde esta perspectiva dinámica, una de las metas del proceso de instrucción es que los estudiantes entiendan las ideas matemáticas, lo que incluye dar sentido y significado a los conceptos, así como desarrollar habilidades para implementar algoritmos y procedimientos. Durante el aprendizaje de una técnica existen componentes que contribuyen al entendimiento de los conceptos involucrados en ella, y a su vez la actividad teórico-conceptual es parte integral del proceso de actualización de los procedimientos, incluso de aquellos que se han automatizado (Kieran, 2013).

El entendimiento es importante, ya que entender un concepto, idea o resultado, podemos usarlo de manera flexible, adaptarlo para enfrentar situaciones problemáticas y emplearlo como base para aprender cosas nuevas (Hiebert et al., 1997). El entendimiento es una idea compleja, en constante cambio y crecimiento, y por tal razón existen diversos grados de "dominio" de un conocimiento, aun con respecto a hechos simples (Schoenfeld, 1985). Por ejemplo, un nivel básico de entendimiento de la ecuación $a^2+b^2=c^2$ (ecuación de Pitágoras) pudiera consistir en identificar que se trata de una ecuación cuadrática en tres variables; otro nivel de entendimiento incluye encontrar triadas de números enteros que la satisfacen, por ejemplo (3, 4, 5) y (6, 8, 10). Otro nivel más avanzado pudiera requerir encontrar un método para generar triadas pitagóricas, darle un sentido geométrico a la ecuación o llegar incluso a su estudio en estructuras algebraicas que generalizan a los números enteros.

En el presente trabajo se argumenta que entender algo significa determinar cómo ese algo se conecta y estructura con otros conocimientos al abordar y resolver problemas (Hiebert et al., 1997; Fennema y Romberg, 1999). Entre más conexiones relevantes puedan establecerse y justificarse entre una idea y otros conocimientos previos, se tendrá un mayor nivel de entendimiento de esa idea. En este contexto, las tareas con múltiples soluciones (TMS) (Leikin, 2010), son una herramienta útil para explorar el proceso de construcción de niveles progresivos de entendimiento conceptual y de un pensamiento crítico (Leikin, 2014); así como el desarrollo de flexibilidad mental, representacional y estratégica (Santos-Trigo, 1996; Silver, 1997). Resolver problemas de diferentes formas es una herramienta efectiva para ensayar perspectivas o puntos de vista diversos, así como construir relaciones matemáticas que articulen, estructuren y unifiquen ideas, representaciones, procedimientos, heurísticas, resultados y principios matemáticos (Leikin, 2007; Polya, 1945).

Abordar una tarea por diversas rutas, comparar soluciones y construir argumentos para sustentarlas, son medios para explorar la creatividad de los estudiantes (Silver, 1997; Leikin, 2007; Leikin y Lev, 2007; Leikin y Levav-Waynberg, 2007), al mismo tiempo que constituyen actividades centrales del quehacer matemático que contribuyen al desarrollo de diferentes niveles de entendimiento (Polya, 1945; Ma, 2010). Al movilizar e integrar un amplio rango de representaciones, heurísticas, resultados, procedimientos y principios durante la construcción de diferentes soluciones, estos elementos se incorporan paulatinamente al repertorio de recursos de los estudiantes, favoreciendo la integración de redes de conocimientos estructurados (Silver et al., 2005; Ma, 2010).

Para aprovechar las ventajas de las TMS como herramienta didáctica se requiere que los profesores sean capaces de encontrar diferentes caminos para resolver un problema y caracterizar las cualidades de cada ruta (Santos-Trigo, 1996). Por ello es importante que las TMS formen parte de las actividades en los programas de formación de profesores como un medio para fortalecer el conocimiento necesario para la docencia en matemáticas. Explorar múltiples métodos para resolver un problema permite a los profesores ver cómo diferentes ideas y recursos se estructuran, mientras que reflexionar sobre las diferencias o similitudes entre los métodos favorece la comprensión de las formas de razonamiento que podrían desarrollar los estudiantes (Leikin, 2010). La importancia de estos aspectos en la formación docente radica en que el profesor debe comprender profundamente las ideas que pretende enseñar y entenderlas de distintas maneras (Shulman, 2005).

A pesar del potencial didáctico de las TMS, la consideración de diferentes rutas para resolver un problema es una práctica que rara vez se implementa en los salones de clase (Silver et al., 2005), a excepción de países como China o Japón, donde es una aproximación didáctica común (Shimada y Becker, 1997; Cai y Nie, 2007; Ma, 2010).

En este trabajo se examinan las rutas de solución propuestas por profesores para abordar una tarea aritmética, la cual se implementó durante un seminario de resolución de problemas al que asistieron como parte de un programa de posgrado en educación matemática. La finalidad del análisis fue identificar los elementos específicos que puede aportar el uso de las TMS durante la formación y actualización de los docentes de matemáticas, particularmente en lo que se refiere a la construcción de conexiones entre ideas o conceptos disciplinares y didácticos.

Existe una extensa literatura en torno al uso de TMS como un medio para favorecer el desarrollo de entendimiento conceptual. Las TMS se han identificado como un recurso que permite examinar la creatividad de los estudiantes, al analizar la novedad de las soluciones, así como la flexibilidad y fluidez para producirlas (Leikin y Lev, 2007); y como un medio para desarrollar un pensamiento crítico (Leikin y Levav-Waynberg, 2008), formas matemáticas de pensar (Polya, 1945) o hábitos de pensamiento (Leikin, 2007). También se ha documentado que las TMS tienen el potencial de cambiar el discurso del salón de clase e incrementar la calidad de las lecciones de matemáticas (Silver y Kenney, 1995; Yackel y Cobb, 1996).

Al contrastar las prácticas de enseñanza en diferentes países, Stigler y Hiebert (1999) observaron que en los Estados Unidos se privilegia encontrar la solución de un problema, mientras que en Japón o China es común pedir a los estudiantes buscar distintas formas de resolver problemas. Los profesores japoneses consideran que las matemáticas están conformadas por relaciones entre conceptos, hechos y procedimientos que se explicitan durante la construcción de las soluciones, por ello resaltan la importancia de construir y analizar diversos métodos para abordar una tarea (Shimada y Becker, 1997).

En China, los ambientes de aprendizaje se organizan alrededor de una perspectiva denominada enseñanza con variación (Gu, Huang y Marton, 2004), durante la cual aparecen tres tipos de actividades: 1) un problema, múltiples soluciones, cuyo eje es la reflexión sobre las fortalezas y limitaciones de cada aproximación; 2) un problema múltiples cambios, donde los estudiantes modifican las condiciones iniciales del problema para buscar extensiones o generalizaciones y 3) múltiples problemas, una solución, que consiste en buscar métodos útiles para resolver familias de problemas que comparten una estructura profunda (Santos-Trigo, 1997).

Aunque es posible implementar TMS desde el nivel prescolar (Tsamir, Tirosh, Tabach y Levenson, 2010), los profesores de matemáticas pocas veces las utilizan como herramienta de instrucción (Stigler y Hiebert, 1999), debido a que ellos mismos tienen poca habilidad para encontrar diferentes rutas (Ma, 2010) o privilegian la implementación de estrategias específicas durante la solución de problemas (Santos-Trigo, 1996). Se ha obtenido evidencia de que los profesores no valoran el encontrar diferentes soluciones a un problema y tienen dificultades para evaluar la validez de aquellas propuestas por los estudiantes (Bingolbali, 2011), por lo que, generalmente, son reacios a resolver problemas por diferentes rutas en el salón de clases (Leikin y Levav-Waynberg, 2007).

II. Método

Los datos de esta investigación se recolectaron durante un seminario de resolución de problemas que tuvo una duración de 12 semanas y en el cual participaron 15 profesores que laboraban en diversos niveles educativos (primaria, secundaria y bachillerato), quienes contaban con una experiencia docente entre uno y 20 años de servicio. En las primeras semanas del seminario se discutieron aspectos básicos del marco de resolución de problemas, incluyendo la conceptualización de las matemáticas como la ciencia de los patrones (Steen, 1988), las cuatro fases por las que se transita al resolver un problema (Polya, 1945), las variables que influyen en el proceso de resolución de problemas (Schoenfeld, 1985) y aquellas que caracterizan a los salones de clase que promueven el entendimiento (Hiebert et al., 1997), además de la idea de conformar comunidades de aprendizaje como mecanismo para favorecer el desarrollo de una disposición matemática (Schoenfeld, 1992; Santos-Trigo, 2007).

En forma paralela a la discusión teórica se propusieron tareas que los profesores abordaron en ambientes de papel y lápiz. La tarea que se analiza en este artículo puede resolverse por diferentes rutas y es un problema bien estructurado, porque incluye la información necesaria para resolverlo sin que los datos sean superfluos, contradictorios o redundantes (Polya, 1945). El enunciado de la tarea es el siguiente:

> Emilia quiere llenar un tanque para su tortuga con 4 cubetas de agua. En cada viaje Emilia llena la cubeta en una fuente y camina hacia el tanque, pero en el camino derrama ⅓ del contenido de la cubeta. ¿Cuántos viajes tiene que hacer para llenar el tanque? (Rubio, 2006, p. 13)

Esta tarea se eligió con la intención de maximizar la posibilidad de que los profesores generaran múltiples métodos de solución y reflexionaran acerca de los aspectos cognitivos involucrados en las soluciones, lo cual no siempre ocurre cuando los contenidos son un poco más avanzados, incluso al nivel del currículo de bachillerato. La recolección de datos se llevó a cabo mediante la grabación en video de la exposición de las soluciones a los problemas, la toma de notas de campo. Después de haber resuelto el problema y expuesto ante el grupo la ruta de solución, los profesores reflexionaron acerca de las características de cada ruta con la finalidad de elaborar un reporte escrito.

El análisis de los datos se llevó a cabo en dos fases. En la primera fase se identificaron las diferentes rutas de solución, para caracterizar el espacio de soluciones (Leikin, 2007). Se consideró que dos soluciones son diferentes si se basan en diferentes representaciones o propiedades de los conceptos u objetos matemáticos involucrados (Leikin, 2011). Las soluciones se examinaron individualmente con respecto a las estrategias, representaciones y justificaciones. En la segunda fase se revisaron los reportes escritos para identificar secciones de texto en las que se reflejara algún impacto sobre el conocimiento disciplinar o didáctico, a partir de tres categorías de análisis en torno a conexiones: 1) entre representaciones, 2) entre conceptos matemáticos y 3) entre aspectos didácticos.

III. Resultados

En términos generales, aparecieron tres tipos de estrategias de solución con base en las representaciones utilizadas: numéricas, gráficas y combinación de representaciones.

1. Solución aditiva apoyada en representaciones numéricas y la idea de complementar. Se elaboró una tabla para registrar la cantidad de agua que se llevó al tanque al realizar cuatro viajes (figura 1). Posteriormente se identificaron los viajes necesarios para completar las cuatro cubetas. Esta solución utilizó la adición de fracciones organizadas en una tabla que permitió llevar un registro de los viajes, además de poner en juego la idea de complementar una suma parcial.

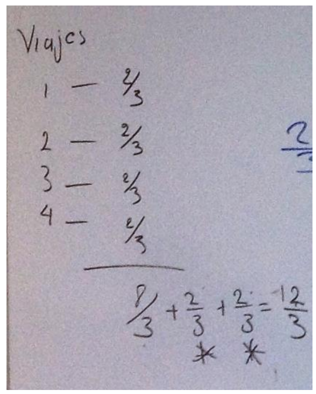


Figura 1. Estrategia aditiva apoyada en representaciones numéricas

2. Suma repetida. Se determinó el número de tercios de cubeta necesarios para llenar el estanque y posteriormente se sumaron mentalmente de forma repetida dos tercios, hasta obtener un total de 12 tercios.

3. Consideración de un caso particular. Se asignó una capacidad específica para la cubeta que fuera fácilmente divisible por 3 (900 mililitros). Posteriormente se calculó la cantidad de agua transportada en cada viaje (2/3*900=600 ml), la capacidad del estanque (4*900=3600 ml), la cantidad de agua transportada en cuatro viajes (2,400 ml) y la que faltaba transportar (1,200 ml) para obtener los viajes faltantes y el total de viajes. Se emplearon representaciones gráficas y numéricas, sin embargo la representación gráfica no apoyó de forma relevante el proceso de razonamiento (ver figura 2). En esta estrategia se utilizaron ideas aditivas y multiplicativas, además de que las fracciones se interpretaron como operadores (Lamon, 2006).

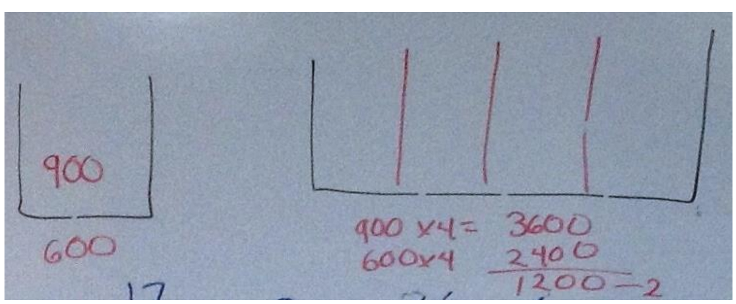


Figura 2. Caso particular como estrategia para resolver el problema

4. División de fracciones. El profesor consideró que se requieren cuatro cubetas es decir 12/3 de cubeta para llenar el estanque, entonces para encontrar la cantidad de viajes necesarios para llenar el estanque basta con dividir 12/3 entre 2/3 (la cantidad de agua que se transporta en cada viaje), para obtener la cantidad de viajes que se realizaron.

5. Distinción entre el agua vertida en el estanque y el agua derramada. Se calculó la cantidad de cubetas de agua que se vierte al estanque (8/3 de cubeta) y la cantidad de agua derramada (4/3 de cubeta) en cuatro viajes, mediante una multiplicación de fracciones. Se verificó que la suma de ambas cantidades es el total de agua requerida. Finalmente, se calcularon los viajes necesarios para transportar los 4/3 de cubeta faltante y se concluyó que la cantidad de viajes necesarios para llenar el estanque es 6. Mediante la representación gráfica se identificó únicamente el agua que se vierte en el estanque y se derrama en un viaje (ver figura 3) y el resto del proceso de razonamiento se basó en el uso de representaciones numéricas.

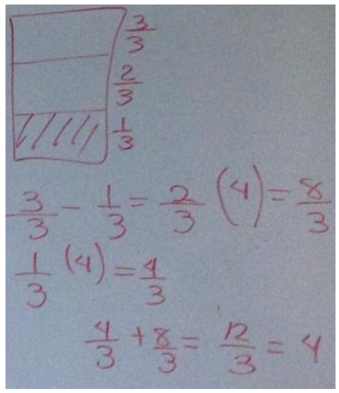


Figura 3. La representación gráfica orienta el proceso de razonamiento

6. Estrategia aditiva basada en representaciones gráficas y numéricas. Se dibujaron cuatro rectángulos que representan las cubetas necesarias para llenar el estanque, se dividió cada rectángulo en tres partes iguales y con base en la representación gráfica se determinó que son necesarios 12/3 para llenarlo (ver figura 4). Se dibujaron sucesivamente rectángulos divididos en tercios, en los que se sombreó una de esas tres partes para representar la porción de agua derramada en cada viaje, hasta que las partes sin iluminar fueran 12. La estrategia es de tipo aditivo y el razonamiento se basó esencialmente en la representación gráfica, pero se agregaron las fracciones que representan las partes no sombreadas, además de los dígitos del 1 al 6 para llevar un registro de los viajes realizados.

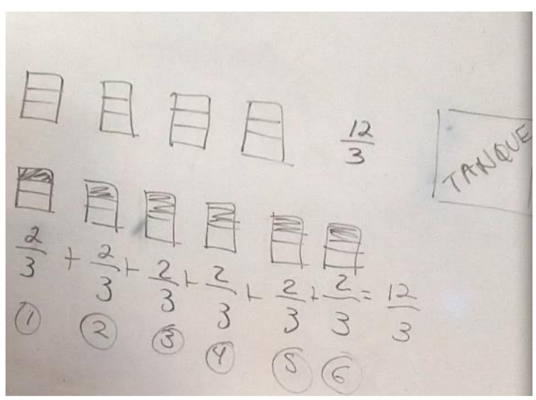


Figura 4. Estrategia aditiva apoyada en dos diferentes registros de representación

7. Incorporación de supuestos extra-matemáticos. En esta solución se supuso que se podría utilizar una barra de madera para transportar cuatro cubetas en un primer viaje, durante el cual se derramaron 4/3 de cubeta. En un segundo viaje se regresa por dos cubetas más y como en cada una de ellas se derrama 1/3, en este viaje se completan los 4/3 de cubeta necesarios para llenar el tanque. El proceso de razonamiento se basó tanto en representaciones numéricas como en representaciones gráficas (ver figura 5).

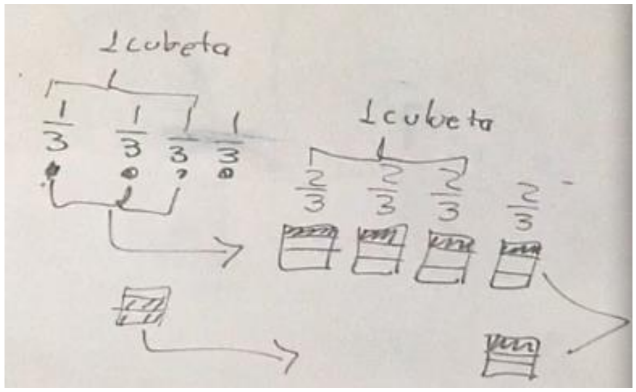


Figura 5. Introducción de supuestos extra-matemáticos

8. Estrategia aditiva apoyada en una representación gráfica. Se representaron cuatro cubetas por medio de rectángulos y se dividió cada rectángulo en tres partes, sombreando dos de ellas para representar la cantidad de agua que se agrega al estanque en cada viaje (ver figura 6). Se explicó que en tres viajes se ha derramado una cubeta completa, así que si realiza un quinto viaje se transportan 2/3 de cubeta, por lo que hace falta un tercio de cubeta para completar el agua derramada en los tres primeros viajes, además del tercio faltante del cuarto viaje, los cuales se completan al realizar un sexto viaje. En esta ruta se obtienen aditivamente resultados parciales, hasta conseguir la cantidad de agua necesaria para llenar el estanque, partiendo de considerar el agua faltante en cuatro viajes iniciales.

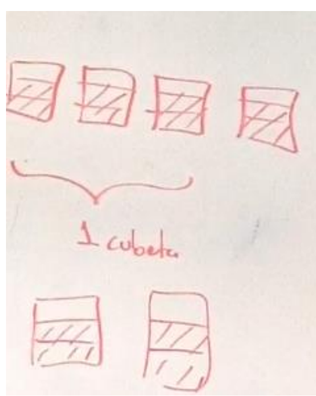


Figura 6. Representación gráfica de la solución

Después de que los profesores presentaron sus rutas de solución, se les mostró la forma en que un estudiante de quinto año de primaria resolvió el problema y explicó el procedimiento de solución. El estudiante dibujó cuatro rectángulos y dividió cada uno de ellos en tres partes iguales (ver figura 7). Se representó la cantidad de agua que se agrega al tanque en cada viaje mediante un color, y concluyó que los viajes requeridos para llenar el tanque son seis (ya que utilizó seis colores en el dibujo).

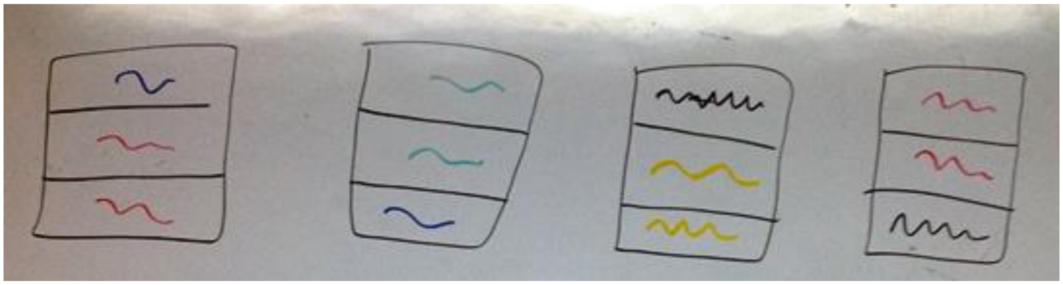
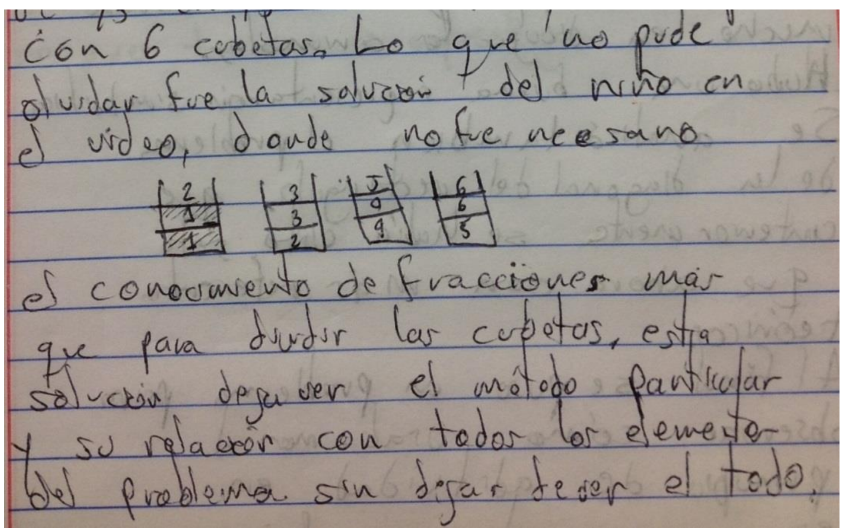


Figura 7. Conteo como estrategia de solución

En el reporte escrito la mayoría de profesores consideró que el estudiante de primaria realizó un uso eficiente de las representaciones durante la solución del problema, ya que el proceso de razonamiento se basó en el conteo de colores en el dibujo, sin que se hiciera un uso explícito de la representación numérica de las fracciones involucradas. Al discutir las soluciones, los profesores identificaron la estrecha relación entre diversas ideas matemáticas y sus representaciones, particularmente la representación de los procesos involucrados en el problema y la forma de operar con la información, les llevó a identificar que la suma y resta se determinan mutuamente, al expresar que el agua faltante después de realizar cuatro viajes se podría encontrar restando el total y lo que se ha acarreado o sumando cierta cantidad a lo que se acarreó en cuatro viajes para completar las cubetas.

Contrastar soluciones permitió identificar las ideas y conceptos relevantes involucrados en cada ruta y favoreció la identificación de algunos procesos de pensamiento relevantes, así como el desarrollo de una postura crítica sobre su propia práctica (Simon y Schifter, 1991), al reconocer la relevancia de las TMS como instrumento didáctico que puede favorecer el que los estudiantes desarrollen flexibilidad de pensamiento (ver figura 8).


con 6 cubetas. Lo que no pude olvidar fue la solución del niño en el video, donde no fue necesario el conocimiento de fracciones más que para dividir las cubetas, esta solución deja ver el método particular y su relación con todos los elementos del problema sin dejar de ver el todo.

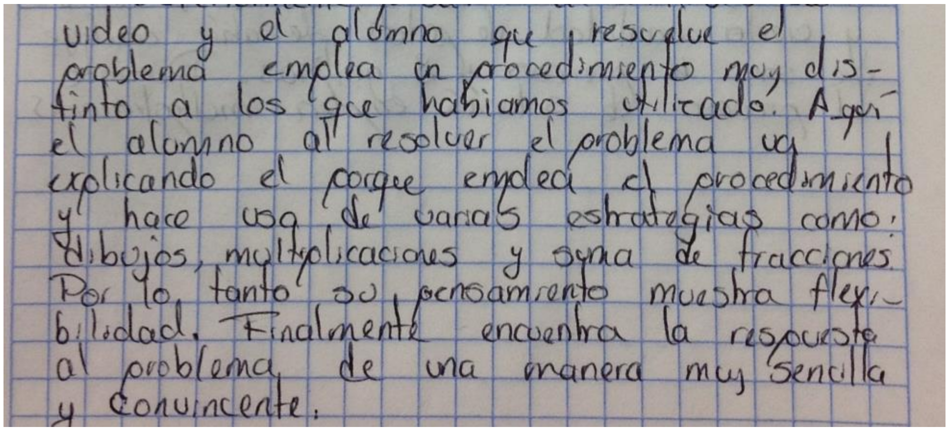

video y el alumno que resuelve el
problema emplea un procedimiento muy dis-
tinto a los que habíamos utilizado. Aquí
el alumno al resolver el problema va
explicando el porque emplea el procedimiento
y hace uso de varias estrategias como:
dibujos, multiplicaciones y suma de fracciones.
Por lo tanto su pensamiento muestra flexi-
bilidad. Finalmente encuentra la respuesta
al problema de una manera muy sencilla
y convincente.

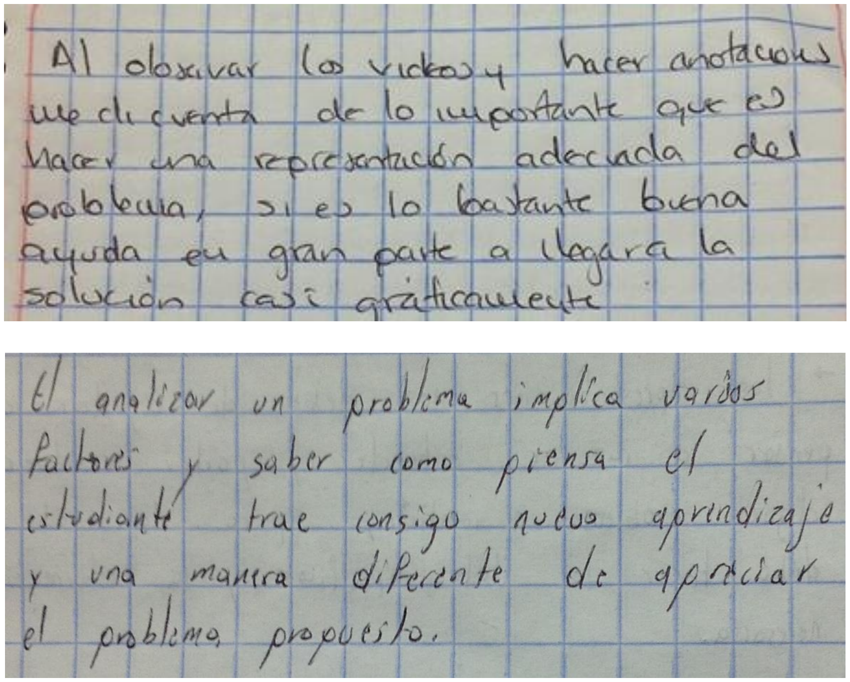
Figura 8. Conexiones entre representaciones y procesos de razonamiento

IV. Conclusiones

Comentario 1. Los profesores identificaron la importancia que hay entre diferentes representaciones como un medio para activar los recursos de los estudiantes. Además, considerar diferentes rutas puede constituirse en un medio que los ayude a estructurar diferentes elementos didácticos, entre los que se encuentran los conocimientos que requieren los estudiantes para abordar una tarea. Los profesores reconocieron también que los recursos puestos en acción por el resolutor pueden diferir de aquellos identificados en un análisis preliminar. Por ejemplo, el conocimiento necesario para abordar la tarea del estanque, en una primera aproximación, es la división de fracciones, o la solución de una ecuación de primer grado ($2x/3=4$); sin embargo, el problema se puede resolver utilizando suma de fracciones o al dividir rectángulos en tercios y contar colores. En este caso, el análisis de una situación matemática promovió entre los profesores la generación y estructuración de conocimientos didácticos, relacionado con la importancia de identificar y explorar rutas potenciales de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004).

Los profesores señalaron que el nivel de dificultad de la tarea debe ser acorde con los conocimientos previos de los estudiantes, identificaron la importancia de las representaciones en el entendimiento conceptual y mencionaron el valor de hacer visibles los errores que se cometen al resolver problemas, ya que el análisis de estos permite establecer conexiones entre ideas y conceptos (Silver et al., 2005). Una profesora comentó que no había dado importancia a la discusión relacionada con las respuestas erróneas, pero ahora considera que es realmente importante conocer y analizar las respuestas de todos los estudiantes para entender sus formas de pensar o razonar (Hiebert et al., 1997), y que incluso las respuestas incorrectas representan oportunidades para aprender (ver figura 9).

Comentario 2. Explorar una situación matemática ayudó a los profesores a reflexionar acerca de la relación general entre las representaciones y los procesos cognitivos, sin que de forma previa hayan tenido un acercamiento con marcos tales como el de Duval (2006). Por otra parte, los profesores reconocieron que escuchar y analizar las diferentes perspectivas y puntos de vista al resolver problemas es un elemento didáctico importante. Es decir, se obtuvo evidencia de que el desarrollo del conocimiento matemático se encuentra ligado estrechamente con la constitución de teorías personales sobre el aprendizaje y la generación de conocimiento didáctico, lo cual es un aspecto considerado en marcos que analizan cómo aprenden los profesores de matemáticas (Simon, 1994).



Al observar los videos y hacer anotaciones me di cuenta de lo importante que es hacer una representación adecuada del problema, si es lo bastante buena ayuda en gran parte a llegar a la solución casi gráficamente

El analizar un problema implica varios factores y saber como piensa el estudiante trae consigo nuevo aprendizaje y una manera diferente de apreciar el problema propuesto.

Figura 9. Conexiones entre representaciones y el aprendizaje

V. Reflexiones finales

En este trabajo se ejemplificó qué tareas rutinarias pueden convertirse en plataformas que apoyen la formación de los docentes de matemáticas al considerar diferentes rutas de solución y promover la reflexión de las ideas involucradas en la construcción de cada una de esas rutas. El problema utilizado, a pesar de requerir únicamente de aritmética elemental en su solución, tiene una considerable riqueza conceptual, ya que favoreció la aparición de diferentes estrategias de solución, además de la reflexión y la discusión entre los profesores.

Se observó también que en muchas ocasiones la presencia de múltiples representaciones no necesariamente implica un mayor nivel de comprensión, ya que éstas en algunos casos no se utilizaron para apoyar el proceso de razonamiento o se utilizaron de forma que proporcionaban información redundante. Considerar múltiples soluciones a un problema permitió ver cómo algunos contenidos tales como la suma y resta se encuentran conectados. Además, se obtuvo evidencia que la reflexión sobre una situación matemática puede ser un trampolín para la generación de teorías personales sobre el aprendizaje y sobre la práctica didáctica.

Referencias

Bingolbali, E. (2011). Multiple solutions to problems in mathematics teaching: Do teachers really value them? *Australian Journal of Teacher Education, 36*(1), 18-31.

Cai, J. y Nie, B. (2007). Problem solving in chinese mathematics education: research and practice. *ZDM Mathematics Education, 39*, 459-473.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Fennema, E. y Romberg, T. A. (1999). *Mathematics classroom that promote understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gu, L, Huang, R. y Marton, F. (2004). Teaching with variation: a Chinese way of promoting effective mathematics learning. En L. Fan, N.-Y. Wong., J. Cai y S. Li (Eds.), *How chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 309-347). NJ: World Scientific.

Guberman, R. y Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teachers Education, 16*, 33-56.

Henningsen, M. y Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and students cognition: Classroom-based factor that support and inhibit high level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524-549.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. y Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: An example from algebra. En K. Leatham (Ed.), *Vital directions in mathematics education research* (pp. 153-171). Nueva York: Springer.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Leikin, R. (2007). *Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks*. The Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-5) (pp. 2330-2339).

Leikin, R. (2010). Learning through teaching through the lens of multiple solution tasks. En R. Leikin y R. Zaskis (Eds.), *Learning through teaching mathematics: development of teachers' knowledge and expertise in practice* (pp. 69-85). Dordrecht, Holanda: Springer.

Leikin, R. (2011). Multiple-solution tasks: from a teacher education course to teacher practice. *ZDM Mathematics Education, 43*, 993-1006.

Leikin, R. (2014). Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry. En Y. Li, E. A. Silver y S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 59-80). Cham, Alemania: Springer.

Leikin, R. y Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161-168). Seúl: PME.

Leikin, R. y Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 349-371.

Leikin, R. y Levav-Waynberg, A. (2008). Solution spaces of multiple-solution connecting tasks as a mirror of the development of mathematics teachers' knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8*(3), 233-251.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Nueva York: Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. NJ: Princeton University Press.

Romberg, T. A. (1994). Classroom instruction that fosters mathematical thinking and problem solving: Connections between theory and practice. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 287-304). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Rubio, C. J. (2006). *Problemas para la 20a. Olimpiada Mexicana de Matemática en San Luis Potosí*. Mérida: Universidad Autónoma de Yucatán.

Santos-Trigo, M. (1996). An exploration of strategies used by students to solve problems with multiple ways of solution. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 263-284.

Santos-Trigo, M. (1997). La transferencia del conocimiento y la formulación o rediseño de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 2*(3), 11-30.

Santos-Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Santos-Trigo, M. (2009). Innovación e investigación en educación matemática. *Innovación Educativa, 9*(46), 5-13.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-371). Nueva York: Macmillan.

Shimada, S. y Becker, J. (1997). *The open ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 9*(2), 1-30.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM Mathematics Education, 29*(3), 75-80.

Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C. y Font Strawhum, B. T. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior, 24,* 287-301.

Silver, E. A. y Kenney, P. A. (1995). Sources of assessment information for instructional guidance in mathematics. En T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment* (pp. 38-68). Albany: State University of New York.

Simon, M. A. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 71-94.

Simon, M. y Schifter, D. (1991). Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 309-331.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science, 240*, 611-616.

Stein, M. K. y Smith M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268-275.

Stigler, J. y Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. Nueva York: The Free Press.

Tsamir, P., Tirosh, D., Tabach, D. y Levenson, E. (2010). Multiple solution methods and multiple outcomes– is it a task for kindergarten children? *Educational Studies in Mathematics, 73*, 217-231.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477.