

Tormentas eléctricas

La fuerza de impacto del rayo

Aníbal Seminario García. Graduado en Ing. De Recursos Mineros y Energéticos. Máster en Ciencia de los Materiales

Cuando se forma una nube de tormenta con concentración en su interior de cargas eléctricas negativas y positivas, se puede originar un rayo. En este artículo, después de definir qué se entiende por Distancia de Cebado, para después, se describe las fórmulas que hay que aplicar para saber la fuerza del impacto del rayo.

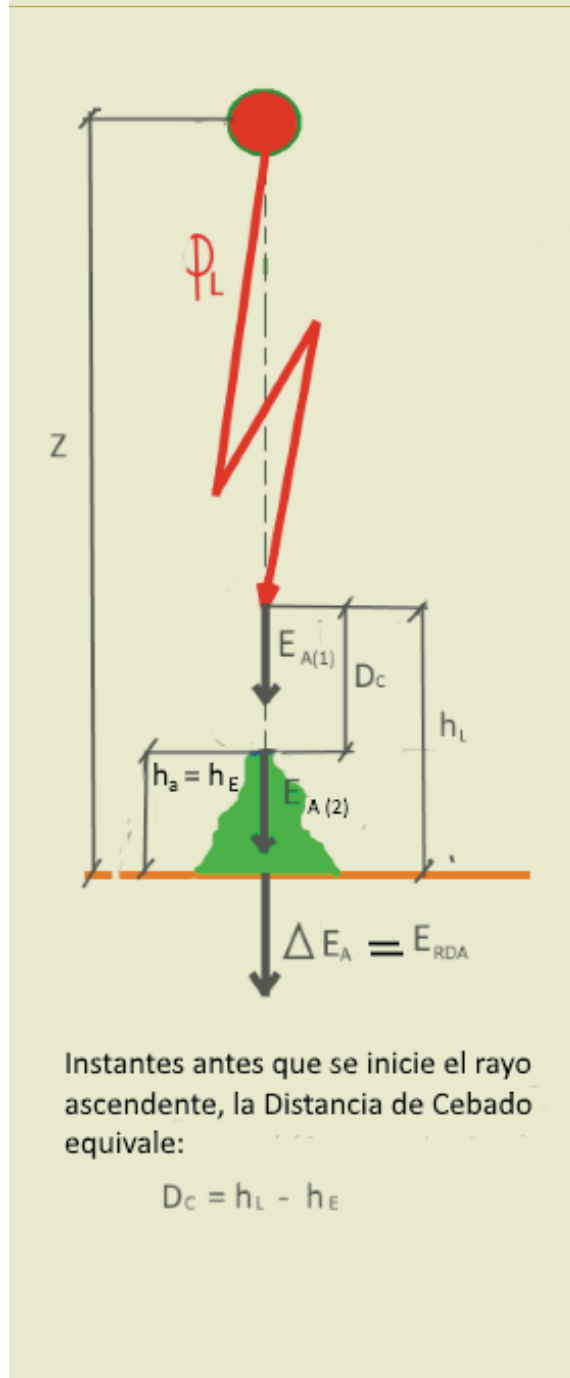
Antes de nada conviene describir brevemente el funcionamiento del rayo atmosférico. Una vez formada la nube de tormenta tenemos en su interior zonas de concentración de cargas eléctricas: unas son negativas y otras positivas. Normalmente el rayo se inicia en dichas regiones, surgiendo un rayo guía, denominado **RAYO LÍDER DESCENDENTE (RLD)**, que avanza a través de la atmósfera transportando carga eléctrica, que generalmente es negativa.

Cuando el RLD está cerca del suelo se inicia en tierra un rayo, llamado **RAYO LÍDER ASCENDENTE (RLA)**, que va en busca del rayo bajante. Una vez unidos se descargan miles de amperios por el canal formado.

El RLD siempre busca en el aire el camino de menor resistencia, por ello su trayectoria siempre es irregular y en forma de zig-zag.



Figura 1



Podemos decir que el rayo bajante cuando está cerca del suelo excita las cargas eléctricas que, por inducción son de sentido contrario, se originan en puntos determinados de la tierra, provocando el RLA. En ese instante es cuando definimos la **DISTANCIA DE CEBADO (D_c)**.

DISTANCIA DE CEBADO (D_c)

La Distancia de Cebado es la longitud entre el extremo de Rayo Líder Descendente (RLD) y el suelo o estructura terrestre en el instante en que se inicia el Rayo Líder Ascendente (RLA). También se puede definir como «el gradiente de potencial entre el extremo del rayo bajante y tierra en el momento que se produce la ruptura dieléctrica del ambiente surgiendo el RLA».

El campo eléctrico formado por el rayo, en la base de la estructura, viene dado por la ecuación (1):

$$E_A = \frac{\varphi_l}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{z+h_E-h_l}{z^2} + \frac{z+h_E-h_a}{h_E^2} - \frac{1}{h_l} - \frac{1}{h_a} \right]$$

(La demostración de esta expresión será motivo de otro artículo).

φ_l = Densidad lineal de carga (C/m)

Z = Altura desde el foco de carga en la nube hasta el suelo (en metros)

h_E = Altura (m) de la estructura, que puede ser natural (árbol, montaña, etc.) o artificial (edificios, torres eléctricas, etc.)

h_l = Altura (m) del extremo del rayo bajante hasta el suelo. Es la posición a partir del cual el rayo ascendente se inicia.

h_a = Altura (m) del extremo del RLA al suelo.

En el instante que el RLD esté en la posición crítica de h_l tenemos (2):

$$h_l = D_c + h_E; \text{ donde } D_c = \text{DISTANCIA DE CEBADO}$$

El rayo ascendente (RLA) aún no ha salido, por tanto: $h_a = h_E$

Sustituyendo estos últimos valores en (1) obtenemos (3):

$$E_{A1} = \frac{\varphi_l}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{z-D_c}{z^2} + \frac{z-h_E}{h_E^2} - \frac{1}{D_c+h_E} \right]$$

Esta ecuación representa el campo eléctrico en función de la Distancia de Cebado, en el momento antes de iniciarse el RLA.

Podemos considerar dos posibles valores de Distancia de Cebado y son:



- a. Una hipotética Distancia de Cebado nula: en este caso el rayo descendente impacta directamente en la estructura, sin producirse el RLA. La ecuación anterior queda para: $D_c = 0$

$$(4) \quad E_{A_2} = \frac{\varphi_l}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{z} + \frac{z - 2 \cdot h_E}{h_E^2} \right]$$

- b. Una Distancia de Cebado comprendida entre cero y la diferencia entre la altura Z y la estructura h_E ; es decir:

$$0 < D_c \leq (z - h_E)$$

por tanto la ecuación sigue siendo la misma que en (3).

Si hallamos la diferencia de los campos eléctricos tenemos:

$$(5) \quad \Delta E_A = E_{A_1} - E_{A_2}$$

Sustituyendo los respectivos valores de campo eléctrico y haciendo operaciones se llega al siguiente resultado:

$$(6) \quad \Delta E_A = \frac{\varphi_l}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{D_c}{h_E \cdot (D_c + h_E)} - \frac{D_c}{z^2} \right]$$

Si el diferencial del campo eléctrico ΔE_A lo igualamos a la rigidez dieléctrica del ambiente (E_{RDA}) y sacamos factor común a D_c nos queda:

$$(7) \quad E_{RDA} = \frac{\varphi_l}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot D_c \cdot \left[\frac{1}{h_E \cdot (D_c + h_E)} - \frac{1}{z^2} \right]$$

Generalmente el valor de Z suele ser superior a los mil metros, se puede despreciar el término $1/z^2 \cong 0$, la expresión anterior queda:

$$(8) \quad E_{RDA} = \frac{\varphi_l}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{D_c}{h_E \cdot (D_c + h_E)}$$

Despejando la Distancia de Cebado obtenemos:

$$(9) \quad D_c = \frac{h_E^2 \cdot E_{RDA}}{\frac{\varphi_l}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} - h_E \cdot E_{RDA}}$$



La **Distancia de Cebado** depende de la rigidez dieléctrica del ambiente, de la carga por unidad de longitud del rayo bajante y de la altura de la estructura.

La ecuación (9) resulta compleja debido a sus tres variables φ_l, h_E y E_{RDA} . Si calculamos las variaciones que sufre la Distancia de Cebado respecto de estas y las relacionamos unas respecto de otras, se llega a obtener tres ecuaciones diferenciales muy interesantes.

PRIMERA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Procede de:

$$(10) \quad \frac{dD_c/dh_E}{dD_c/d\varphi_l} = \frac{d\varphi_l}{dh_E} = f_1(\varphi_l, h_E, E_{RDA})$$

Una vez realizada las derivadas y simplificaciones correspondientes se llega a la siguiente ecuación diferencial (11):

$$\frac{d\varphi_l}{dh_E} = A - 2 \cdot \frac{\varphi_l}{h_E}; \text{ donde: } A = 2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_{RDA} (\text{C/m}^2).$$

Suponemos el campo E_{RDA} constante

La solución de (11) es: Si llamamos

$$t = \frac{\varphi_l}{h_E} \rightarrow \varphi_l = t \cdot h_E \rightarrow d\varphi_l = t \cdot dh_E + h_E \cdot dt$$

la ecuación anterior nos queda

$$(2 \cdot t - A) \cdot dh_E + t \cdot dh_E + h_E \cdot dt = 0$$

$$\frac{dt}{A-3 \cdot t} = \frac{dh_E}{h_E}; \text{ cambiando la variable}$$

$$A - 3 \cdot t = x \rightarrow t = \frac{A-x}{3} \rightarrow dt = -\frac{dx}{3}$$

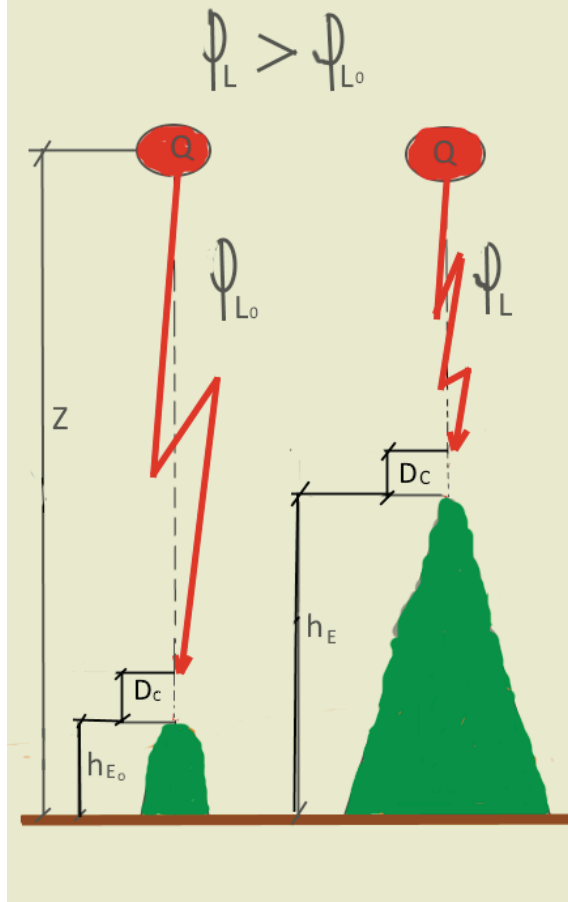
obtenemos las siguientes integrales

$$-\int_{x_0}^x \frac{dx}{3 \cdot x} = \int_{h_{E0}}^{h_E} \frac{dh_E}{h_E}$$

Integrando y sustituyendo x por su valor y a la vez t por φ_l/h_E obtenemos:

$$-\frac{1}{3} \cdot \ln \frac{A-3 \cdot \frac{\varphi_l}{h_E}}{A-3 \cdot \frac{\varphi_{l0}}{h_{E0}}} = \ln \frac{h_E}{h_{E0}} + C$$

Figura 2



Para determinar la constante de integración debemos de suponer la condición inicial de: $h_E = h_{E0}$ lo que implica que la densidad de carga por unidad de longitud también es: $\varphi_l = \varphi_{l0}$. En este caso los neperianos se hacen nulos dando como resultado $C = 0$.

La ecuación anterior queda:

$$\ln \left[\frac{h_{E0} \cdot (A \cdot h_E - 3 \cdot \varphi_l)}{h_E \cdot (A \cdot h_{E0} - 3 \cdot \varphi_{l0})} \right]^{-1} = \ln \left(\frac{h_E}{h_{E0}} \right)^3$$

Eliminando logaritmos, sustituyendo A por su valor y finalmente despejando la densidad de carga resulta (12):

$$\varphi_l = \frac{1}{3} \cdot \left[2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_{RDA} \cdot h_E + \left(\frac{h_{E0}}{h_E} \right)^2 \cdot (3 \cdot \varphi_{l0} - 2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_{RDA} \cdot h_E) \right]$$

La expresión (12) podemos transformarla de la siguiente forma:

Llamamos g a la relación entre alturas:
 $g = \frac{h_{E_0}}{h_E}$; donde: $0 \leq g \leq 1$

La ecuación (12) queda:

$$\varphi_L = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{3} \cdot (1 - g^3) \cdot E_{RDA} \cdot h_E + \varphi_{L_0} \cdot g^2$$

El campo eléctrico es constante y podemos considerar como el campo inicial, es decir: $E_{RDA} = E_0$. La ecuación anterior queda finalmente (13):

$$\varphi_L = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{3} \cdot (1 - g^3) \cdot E_0 \cdot h_E + \varphi_{L_0} \cdot g^2$$

SEGUNDA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Esta ecuación procede de:

$$(14) \quad \frac{dD_c/dh_E}{dD_c/dE_{RDA}} = \frac{dE_{RDA}}{dh_E} = f_2(E_{RDA}, h_E, \varphi_L)$$

Una vez realizadas las derivadas y simplificaciones correspondientes se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$(15) \quad \frac{E_{RDA}^2}{\alpha} \cdot dh_E - 2 \cdot \frac{E_{RDA}}{h_E} \cdot dh_E + dE_{RDA} = 0$$

donde: $\alpha = \frac{\varphi_L}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$; la densidad φ_L la consideramos constante.

Si hacemos:

$$t = \frac{1}{h_E \cdot E_{RDA}} \rightarrow E_{RDA} = \frac{1}{t \cdot h_E}$$

diferenciando esta última expresión, tenemos:

$$dE_{RDA} = -dt/h_E \cdot t^2 + -dh_E/t \cdot h_E^2$$

Sustituyendo en la ecuación (15) y haciendo operaciones se llega:

$$\frac{dh_E}{h_E} = \frac{\alpha \cdot dt}{1 - 3 \cdot \alpha \cdot t} \rightarrow \int_{h_{E_0}}^{h_E} \frac{dh_E}{h_E} = \alpha \cdot \int_{t_0}^t \frac{dt}{1 - 3 \cdot \alpha \cdot t}$$

Resolviendo estas integrales y sustituyendo t por su valor tenemos:

$$3 \cdot \ln \frac{h_E}{h_{E_0}} = -\ln \frac{1 - \frac{3 \cdot \alpha}{h_E \cdot E_{RDA}}}{1 - \frac{3 \cdot \alpha}{h_{E_0} \cdot E_0}} + C$$

Para hallar la constante de integración C consideramos que los campos eléctricos son iguales $E_0 = E_{RDA}$ para alturas de estructuras iguales $h_{E_0} = h_E$, entonces los logaritmos neperianos se hacen nulos y como consecuencia $C = 0$. La ecuación queda:

$$\left(\frac{h_E}{h_{E_0}}\right)^3 = \frac{1 - \frac{3 \cdot \alpha}{h_{E_0} \cdot E_0}}{1 - \frac{3 \cdot \alpha}{h_E \cdot E_{RDA}}}$$

Despejando el campo E_{RDA} y sustituyendo el parámetro a por su valor tenemos:

$$(16) \quad E_{RDA} = \frac{3 \cdot \frac{\varphi_L}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot h_E^2}{h_E^3 + h_{E_0}^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot \varphi_L}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} - h_{E_0}\right)}$$

Si sustituimos: $h_{E_0} = g \cdot h_E$, sacamos factor común a h_E^2 en el denominador y suponemos que la densidad de carga lineal es constante e igual al inicial $\varphi_L = \varphi_{L_0}$, la expresión anterior queda finalmente:

$$(17) \quad E_{RDA} = \frac{\varphi_{L_0} \cdot E_0}{\frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{3} \cdot h_E \cdot E_0 \cdot (1 - g^3) + g^2 \cdot \varphi_{L_0}}$$

TERCERA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Esta procede de:

$$\frac{dD_c/dE_{RDA}}{dD_c/d\varphi_L} = f_3(\varphi_L, E_{RDA})$$

El resultado es (18):

$$\frac{d\varphi_L}{dE_{RDA}} = -\frac{\varphi_L}{E_{RDA}} \rightarrow \int_{\varphi_{L_0}}^{\varphi_L} \frac{d\varphi_L}{\varphi_L} = \int_{E_0}^{E_{RDA}} \frac{dE_{RDA}}{E_{RDA}}$$

$$\ln \frac{\varphi_L}{\varphi_{L_0}} = -\ln \frac{E_{RDA}}{E_0} + C$$

Para $E_0 = E_{RDA}$ implica que $\varphi_L = \varphi_{L_0}$, por tanto la constante de integración es cero.



Finalmente tenemos el siguiente resultado:

$$(19) \quad \varphi_L \cdot E_{RDA} = \varphi_{L_0} \cdot E_0$$

Esta ecuación es interesante pues el producto de la densidad de carga lineal por el campo eléctrico nos da la densidad de fuerza por unidad de longitud, siendo una cantidad constante. La ecuación anterior queda definitivamente (20):

$$F_L = \varphi_L \cdot E_{RDA} = \varphi_{L_0} \cdot E_0 = \text{constante}$$

donde F_L viene expresado en N/m, la densidad de carga en culombios/m y el campo en V/m.

Si tenemos una densidad de fuerza de 400 N/m y observamos que el rayo tiene unos 1000 m de longitud, el impacto en el lugar de encuentro es de 400 KN.

Por otra parte si multiplicamos (13) por (17) obtenemos el resultado inicial de $\varphi_{L_0} \cdot E_0$

Las ecuaciones (13) y (17) están representadas en el gráfico (1), en este se observa cómo los valores máximos de densidad de carga se recogen en una curva. Lo mismo ocurre con el campo eléctrico, pero la diferencia es que son valores mínimos.

Según el gráfico 1, para cualquier valor de g , el producto de la carga lineal por el campo eléctrico existente se mantiene constante.

Las ecuaciones correspondientes de carga lineal máxima y de campo eléctrico mínimo son:

$$(21) \quad \varphi_{L(max)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\varphi_{L_0}^3 + 2 \cdot (\pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_0)^3 \cdot h_E^3}{(\pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_0)^2 \cdot h_E^2}$$

$$(22) \quad E_{RDA(min)} = 3 \cdot \varphi_{L_0} \cdot E_0 \cdot \frac{(\pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_0)^2 \cdot h_E^2}{\varphi_{L_0}^3 + 2 \cdot (\pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_0)^3 \cdot h_E^3}$$

Estas ecuaciones quedan representadas en el gráfico (2)

En ambas curvas tenemos, para una altura $h_E = \varphi_{L_0} / \pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_0$, un mínimo para la densidad de carga lineal y máximo para el campo eléctrico.

Gráfico 1

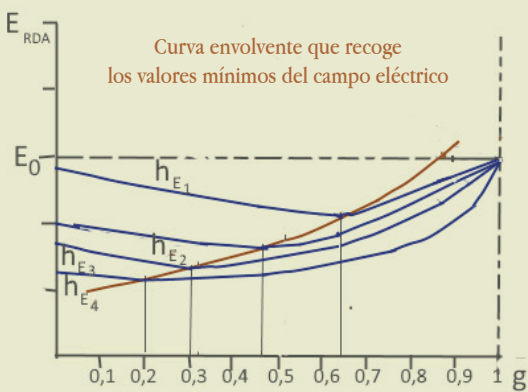
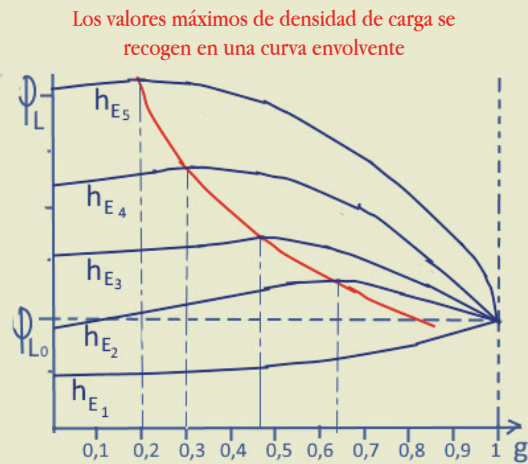
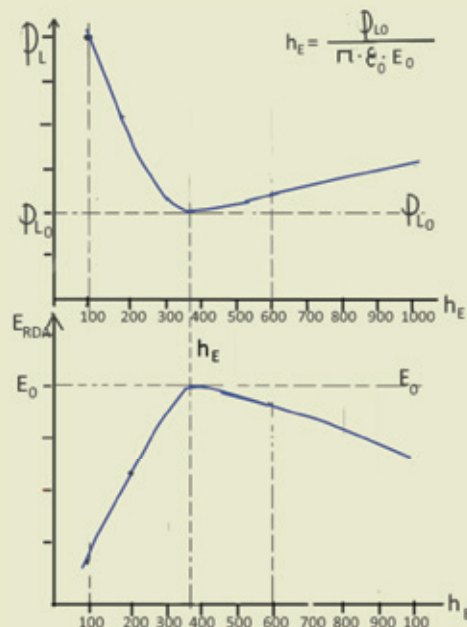


Gráfico 2

Curva envolvente que recoge todos los valores máximos de densidad de carga. Tiene un mínimo para una determinada altura de estructura:



Curva que recoge todos los valores mínimos de campo eléctrico. Tiene un máximo en la misma altura de estructura.



FUERZA EJERCIDA POR EL RAYO

La fuerza por unidad de longitud calculada en (20) también se puede determinar de la siguiente manera:

Fuerza ejercida por el rayo en el punto de impacto:

$$\bar{F} = F_x \cdot \bar{i} + F_y \cdot \bar{j} + F_z \cdot \bar{k}$$

Distancia:

$$\bar{r} = r_x \cdot \bar{i} + r_y \cdot \bar{j} + r_z \cdot \bar{k}$$

Para simplificar el problema consideramos la trayectoria del rayo vertical, por tanto las componentes de \mathbf{x} e \mathbf{y} no existen: $F_x = F_y = 0$ y $r_x = r_y = 0$

Se define la densidad de fuerza lineal como el cociente de:

$$(23) \quad F_L = \frac{\bar{F}}{\bar{r}} = \frac{F_z \cdot \bar{k}}{r_z \cdot \bar{k}} = \frac{F_z}{r_z}$$

donde F_z es el módulo de fuerza en Newton según componente vertical y r_z representa la diferencia entre la distancia al foco de la carga (z) y la suma de la mitad de la Distancia de Cebado con la estructura h_E en metros, es decir:

$$r_z = z - h_E - D_c/2$$

El motivo de $D_c/2$ es debido al punto de encuentro entre los dos rayos que está situado en el punto medio de la Distancia de Cebado.

Si igualamos esta última expresión (23) con (20) y despejamos la fuerza F_z obtenemos:

$$(24) \quad F_z = \varphi_L \cdot E_{RDA} \cdot (z - h_E - D_c/2)$$

- F_z = Fuerza en Newton que ejerce el rayo en el punto de impacto
- φ_L = Densidad de carga lineal en C/m
- E_{RDA} = Campo eléctrico en V/m
- Z = Distancia en metros entre el foco de carga situada en la nube y tierra.
- h_E = Altura en metros de la estructura.
- D_c = Distancia de cebado en metros



La ecuación anterior también puede ser:

$$(25) \quad F_z = \varphi_{L_0} \cdot E_0 \cdot (z - h_E - D_c/2)$$

Un caso particular de F_z consiste en sustituir la altura de estructura por el hallado del valor mínimo de $\varphi_{L_{max}}$ y el máximo de $E_{RDA_{min}}$ tenemos: para $h_E = \varphi_{L_0}/\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0$

$$(26) \quad F_{z_0} = \frac{\varphi_{L_0}}{\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot [\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot (z - D_c/2) - \varphi_{L_0}]$$

CONCLUSIONES

Partimos de la Distancia de Cebado (9) que está en función del campo eléctrico, densidad de carga lineal y de la altura de estructura existente en el ambiente.

Según esta hipótesis, la D_c cambia dependiendo de estas variables. Comparando y relacionando estas variaciones unas respecto de otras se llega al resultado de tres ecuaciones diferenciales:

– En la solución de la primera obtenemos la ecuación (13) que describe el comportamiento de la densidad de carga lineal en función de la altura de estructura (h_E) y de un parámetro (g) que relaciona dos posibles alturas de estructuras.

Si representamos la densidad de carga en un eje de coordenadas (gráfico 1) vemos como la densidad cambia según damos valores a (g) para diferentes alturas $h_{E_1}, h_{E_2}, h_{E_3} \dots$

En el gráfico todas las curvas convergen en un punto común que representa el valor inicial de densidad de carga (φ_{L_0}) cuando las alturas inicial y final son iguales ($g = 1$). Esta situación nos indica que la variación de la densidad de carga final no sólo depende de (g) y (h_E) sino de la posición de la carga inicial (φ_{L_0}), que según esté situado cambian las curvas.

También debemos destacar que los valores máximos de densidad de carga se recogen en una curva envolvente, en la cual hay un mínimo para una altura de estructura determinada cuyo valor es directamente proporcional a la densidad de carga inicial e inversamente proporcional al campo eléctrico inicial (E_0).

– De la segunda ecuación se llega a la expresión (17) que nos dice que el campo eléctrico existente varía, de forma casi inversamente proporcional, a la altura de estructura y al parámetro (g).

En la gráfico (1) vemos que todas las curvas convergen en un punto (igual que en el caso de la densidad de carga) donde el campo tiene un valor inicial (E_0) para un $g=1$. Dependiendo de la situación de este punto las curvas del campo serán muy distintas.

En el gráfico se observa una curva que recoge todos los valores mínimos de campo eléctrico, en su representación se obtiene un máximo (gráfico 2) situado en la misma altura de estructura (h_E) que en el caso de la densidad de carga.

Este valor h_E común, tanto para el campo máximo como para el mínimo de densidad, es muy interesante debido a que el rayo a medida que baja buscará aquella estructura cuya altura cumpla $h_E = \varphi_{L_0}/\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0$, pero esto es una hipótesis. Puede ocurrir que el rayo localice otra estructura cuyo campo eléctrico y densidad de carga no sean las iniciales.

– La tercera ecuación diferencial nos da como resultado la expresión (19) que nos dice: el producto de la densidad de carga con el campo eléctrico es igual al producto de la densidad inicial por el campo inicial.

En realidad, esta ecuación nos indica, que el producto de estas dos variables se mantiene constante, además ésta tiene dimensiones. El producto de la densidad de carga por el campo eléctrico nos da **la fuerza lineal que ejerce el rayo.**

La Fuerza Resultante se determina mediante el producto de la fuerza lineal por la longitud del rayo.

Un caso particular del cálculo de la fuerza ejercida por el rayo es la representada en la expresión (26). En este punto la fuerza depende fundamentalmente de la altura donde está situado el foco de la carga (z), Distancia de Cebado, densidad inicial y campo inicial. ■

BIBLIOGRAFÍA

Lightnig: physics and effects de Vladimir A. Rakov y Martin A. Uman

Electrificación de tormentas por Earle R. Williams