ISSN: 1665-5826

Educación Matemática

México • vol. 27 • núm. 1 • abril de 2015

Comité editorial

Formación electrónica: Formas e Imágenes, S.A. de C.V. formaseimagenes@gmail.com

Educación matemática es una publicación internacional arbitrada, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer una influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. Educación Matemática aparece tres veces al año y es indexada en ZDM (Zentralbatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (MathEducDatabase), Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Latindex, REDALYC (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal), Scientific Electronic Library Online (SCIELO) y Clase (Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades). Las colaboraciones son recibidas en: revedumat@yahoo.com.mx.

Educación Matemática

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

Educación Matemática *vol. 27 • núm. 1 • abril de 2015*

© Educación Matemática, vol. 27, núm. 1, abril de 2015, es una publicación de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., con domicilio en Guty Cárdenas 121-B, Col. Guadalupe Inn, 01020, México D.F.

Certificado de Licitud de Título número 12499 y Certificado de Licitud de Contenido número 10070, expedidos por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación.

Registro número 3012 de la Cámara Editorial de la Industria Editorial Mexicana.

Editor responsable: Alicia Ávila Storer. Reserva de derechos al uso exclusivo: 04-2002-111517075100-102 expedido por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.
ISSN 1665-5826.

Diagramación y corrección de estilo:
Formas e Imágenes, S.A. de C.V. • formaseimagenes@gmail.com

Contenido

RESEÑAS

Editorial

Según un interesante artículo en torno a la evaluación de las revistas científicas en México aparecido hace algunos meses,[1] en el periodo 1991-1994 el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) publicó la primera convocatoria para integrar el Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica (IREMICYT). Este índice se ha mantenido y se considera garante de la calidad de un órgano de difusión de la investigación. Hoy Educación Matemática está de nuevo en ese Índice. Los criterios de pertenencia son diversos, uno que nos parece fundamental es el de la calidad de lo que se publica en una revista. CONACYT evalúa este aspecto a través de los arbitrajes, que deben ser rigurosos y argumentados, tomando en consideración lo siguiente: *a*) que el escrito constituya el reporte de una investigación; *b*) la definición y aplicación cuidadosa de la metodología de indagación; *c*) la actualidad de las fuentes que sustentan el trabajo; *d*) la originalidad del escrito. Todo lo anterior además de la claridad en la exposición. Estos criterios, se supone, permiten ponderar si un artículo constituye una aportación al campo de referencia.

Otros indicadores ponderados por el CONACYT son la existencia y composición de un Comité Editorial. En este caso, el reconocimiento de la trayectoria de investigación de sus miembros es esencial, como lo es también la internacionalidad de este órgano.

Educación Matemática cubre plenamente los anteriores criterios: los artículos se someten a arbitraje riguroso de especialistas en la materia que aborda el artículo motivo de evaluación y su Comité está conformado por colegas de reconocida trayectoria que realizan su trabajo en Canadá, Colombia, España y México.

Estar en el actualmente llamado Padrón de Revistas de Investigación Científica y Tecnológica de CONACYT anima a muchos colegas a enviar sus escritos a Educación Matemática puesto que esta pertenencia proporciona una evidencia de la calidad de los trabajos y, por lo tanto, una mejor ponderación de su quehacer como académicos. Esto último nos lleva al tema de la relevancia de la evaluación de las revistas de investigación científica, porque esta evaluación tiene un gran efecto no sólo sobre la investigación en términos individuales, sino sobre el conjunto del sistema científico del país. Las acciones evaluativas se vuelven cada vez más obligadas y sus resultados se consideran, cada vez más, indicadores (infalibles) de la calidad del trabajo que realizan los investigadores. Para resumir el

[1] Alejandro Canales, "¿Evaluación sofisticada de las revistas científicas?" www.campusmilenio, 24 de noviembre de 2014.

espíritu de los tiempos, podríamos decir que todo lo que se haga, habrá de certificarse, si no, no tendrá ningún valor, y el valor dependerá de la calidad del certificador.

En tal contexto, la evaluación va cada vez más allá con sus tiempos y sus exigencias. Refirámonos al caso de las revistas, que es el que aquí nos interesa.

En sus inicios, el IREMICYT buscaba lo siguiente: determinar cuáles revistas podían ser financiadas con base en criterios académicos; una jerarquización para el otorgamiento de los recursos financieros; constituir una referencia cualitativa para que los investigadores supieran dónde publicar sus trabajos; y una forma objetiva de facilitar la evaluación de los patrones de publicación del personal académico. Al comienzo, se utilizaron sólo dos grandes componentes para valorar la inclusión de las revistas en el IREMICYT: la calidad de su contenido, así como el formato y características de la revista. El primero se centró en verificar si los artículos publicados eran resultados de investigación y si la publicación estaba respaldada por un consejo editorial, que debía estar integrado por investigadores reconocidos, de diferentes instituciones (véase el artículo de Canales).

Hoy la evaluación va más allá, para el CONACYT no resultan suficientes los indicadores acerca de la calidad del contenido. Ahora se pide también contabilizar el número de descargas que una revista tiene desde los sitios web en que está alojada (lo que nos parece totalmente pertinente); o que las revistas estén insertas en índices internacionales, y que utilicen la plataforma OJS para gestionar el arbitraje. Es decir que se han agregado indicadores distintos de la calidad del contenido, y esto ha complejizado el trabajo de producción de una revista, descentrándolo de la simple calidad.

Diversas voces, nacionales e internacionales, señalan que esta forma de evaluación hoy imperante comienza a agotarse. Nosotros creemos que esta forma de ponderar las revistas de investigación es muy compleja y que se orienta demasiado a la inserción en redes y a la absorción y uso de nuevas tecnologías. Pensamos a la vez que la certificación otorgada por el CONACYT tiene un gran valor para la comunidad de investigadores de la educación matemática, pues proporciona una referencia de calidad y de impacto de una revista, y por ello Educación Matemática seguirá intentando la permanencia en este padrón. Pero lo hacemos no sin preguntarnos si esta forma de evaluación de las revistas es la más adecuada, si no habrá otras maneras más simples y directas de ponderar la calidad y relevancia de lo que en ellas se publica. Seguramente con el tiempo llegará la respuesta. Que muchos se hagan la pregunta empujará el tiempo en que ésta llegue.

El Comité Editorial

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

La noción de *relaciones entre cálculos* y la *producción de explicaciones en la clase de matemática* como objetos de enseñanza. Su configuración en el marco de un trabajo colaborativo entre investigadores y docentes

The notion of *relationships among calculations* and *the production of explanations in maths class* as teaching objects. Their configuration within a collaborative work between researchers and teachers

Patricia Sadovsky, María Emilia Quaranta, Horacio Itzcovich, María Mónica Becerril, Patricia García

Resumen: Este estudio da cuenta del proceso a través del cual, en el marco de un trabajo colaborativo entre investigadores y docentes, se configuran dos objetos de enseñanza de la escuela primaria: la práctica de *apelar* a *relaciones entre cálculos para obtener resultados* y la de elaborar *explicaciones en la clase de matemática*. Intentamos mostrar vínculos entre la configuración de estos objetos –el análisis de su sentido y de condiciones favorables para su funcionamiento en el aula– y la construcción colectiva de una intencionalidad didáctica. Esta investigación se inscribe en un proyecto más amplio orientado a conocer el tipo de producción matemático-didáctica que puede tener lugar cuando un grupo de investigadores concurre periódicamente a una escuela para trabajar con maestros y directivos con el objetivo de pensar colaborativamente cuestiones de enseñanza de la matemática.

Palabras clave: trabajo colaborativo, análisis de las prácticas de la enseñanza, formación docente, explicaciones en la clase de matemática, relaciones entre cálculos.

Abstract: This study accounts for the process through which, in the context of a collaborative work between researchers and teachers, two primary school teaching objects arise: the

Fecha de recepción: 23 de septiembre de 2014; fecha de aceptación: 17 de febrero de 2015.

practice of *appealing to relations among calculations to get results* and *the production of explanations in mathematics class*. We try to show links between the configuration of these objects –the analysis of its meaning and possible conditions for them to arise at a math class– and the collective construction of a didactic intent. This research belongs to a larger project aimed at understanding the type of mathematical and didactic production which could be obtained when a group of researchers attends regularly a school to work with teachers and heads in order to think jointly about mathematics education issues.

Résumé: Cette étude décrit le processus de mise en place, dans le cadre d'un travail de collaboration entre chercheurs et enseignants, de deux objets d'enseignement de la école primaire: la pratique de faire appel à des relations entre les calculs pour arriver à une solution numérique et celle d'élaborer des explications en classe de mathématiques. Nous essayons de montrer les liens entre la configuration de ces nouveaux objets –l'analyse de leur sens et des contraintes favorables à leur fonctionnement dans la classe– et la construction collective d'une intentionnalité didactique. Cette recherche s'inscrit au sein d'un projet plus vaste visant à étudier le type de production mathématique-didactique qui peut surgir quand un groupe de chercheurs se rend régulièrement dans une école pour travailler avec des enseignants et directeurs en vue de penser collectivement les questions d'enseignement des mathématiques.

Keywords: collaborative work, analysis of the mathematics teaching practices, explanations in math class, relationships between calculations.

Mots-clés: travail collaboratif, l'analyse des pratiques d'enseignement, des explications dans la classe des mathématiques, des relations entre des calculs.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Problema de investigación

Este artículo comparte resultados de una indagación –en curso– ubicada en el marco de las investigaciones en didáctica de las matemáticas dirigidas al análisis de las prácticas de enseñanza en espacios de trabajo colaborativo.[1] Nuestro objeto de estudio son los procesos de producción matemático-didáctica que pueden

[1] *Producción matemático-didáctica en el marco de un trabajo colaborativo entre maestros, directivos e investigadores en didáctica*. Equipo de investigación: Patricia Sadovsky (directora). María Emilia Quaranta, Horacio Itzcovich, María Mónica Becerril, Patricia García. Universidad Pedagógica de la Provincia de Buenos Aires. UNIPE. Subsidio FONCyT, Proyecto PICT-O número 2012-0050, 2013-2014. Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación productiva. Este proyecto es continuación de uno anterior inscripto en una de las líneas de investigación de la Universidad Pedagógica de la Provincia de Buenos Aires, *Análisis de las prácticas y producción de conocimiento didáctico-disciplinar.*

tener lugar cuando un grupo de maestros y directivos de una misma escuela trabaja en colaboración con investigadores para problematizar la enseñanza y producir, implementar y analizar de manera conjunta propuestas para explorar en el aula respuestas posibles a los problemas identificados. Se trata de conocer mejor el funcionamiento de un espacio de trabajo conjunto, en el cual se toman como punto de partida problemas reconocidos por los mismos docentes y se discuten en diálogo con las exigencias curriculares e institucionales, con la propia experiencia y con la producción didáctica y pedagógica.

1.2 Referencias teóricas

Analizar las prácticas en un proceso de colaboración entre docentes e investigadores supone, para estos últimos, reconocer el saber de los docentes para enfrentar la enseñanza que será objeto de análisis en la colaboración, asumir que los maestros tienen razones para actuar como lo hacen, considerar los condicionamientos que moldean las prácticas docentes –que muchas veces rebasan los objetivos de aprendizaje de los alumnos que todo docente tiene–, ser conscientes de los desajustes de ciertas producciones del campo de la didáctica con relación a la viabilidad de su funcionamiento en el sistema. Supone, asimismo, una ruptura tanto con el lugar de *práctico* que el docente tiene otorgado en la cultura, como con la posición de prestigio y autoridad que se suele atribuir a los investigadores. Esta ruptura es condición –creemos– para dar lugar a un reconocimiento genuino de lo que cada actor tiene para aportar. Tomamos de Sensevy (2011) la idea según la cual, para instalar la colaboración, es necesario construir una simetría que se basa en la elaboración compartida de razones en el marco de los trabajos que se realicen, antes que en la negación de las diferencias. Este *juego de razones* sería, según el autor, un modo de superar una división de trabajo secular basado en los dilemas teoría-práctica, fines-medios: la teoría y los fines para los investigadores, la práctica y los medios para los docentes.

Consideramos que la aproximación colaborativa a los problemas de enseñanza es imprescindible, sobre todo si pensamos que la exploración de esos problemas en el sistema real requerirá de estrategias de intervención que los mismos docentes deberán sostener en la acción (Desgagné, Bednarz, Lebuis y Poirier, 2001; Roditi, 2011; Fiorentini, 2004). Desde esta perspectiva, se subraya el papel del docente en tanto productor de conocimiento a partir del análisis de sus prácticas.

Las prácticas de enseñanza se inscriben en un entramado de restricciones que plantea la institución escolar. En ese sentido, constituyen respuestas, a modo de adaptaciones/equilibrios posibles, a las diversas situaciones que enfrentan los maestros (Robert y Rogalski, 2002; Robert, 2004; Robert y Vanderbrouk, 2003). El análisis colectivo sobre las propias prácticas promueve una ampliación de ese espacio de decisiones al permitir concebir nuevos posibles y bucear en la construcción de fundamentos para ellas (Robert, Roditi y Grugeon, 2007; Roditi, 2011; Charles-Pézard, Butlen y Masselot, 2012).

1.3 Cuestiones metodológicas

El proyecto consiste en un estudio de casos que se desarrolla en dos escuelas desde el año 2012. En ese momento, la selección de las escuelas fue realizada junto con las inspectoras regionales y distritales[2] con quienes, además de discutir el proyecto, acordamos las condiciones institucionales en las que se insertaría este trabajo: recibir alumnos pertenecientes a los llamados sectores populares, contar con un equipo directivo orientado a la promoción de la reflexión colectiva sobre la enseñanza por parte de los docentes y tener disposición para generar y sostener espacios de encuentros sistemáticos.

En este artículo comunicamos resultados del trabajo de producción que tuvo lugar en la Escuela 11 de Cardales, Exaltación de la Cruz, Provincia de Buenos Aires, a lo largo de 2013. En este espacio participaron voluntariamente las directoras, un grupo de docentes[3] y dos investigadores[4] de nuestro equipo que se reunían quincenalmente en la escuela en horario escolar.[5]

El grupo se organizó sobre la base de la discusión de problemas identificados por los docentes, la construcción de modos posibles de explorarlos en las aulas y el análisis de materiales recolectados por los maestros en tales intentos. La producción de ideas que tiene lugar a raíz de los intercambios del grupo –nuestro

---

[2] Acompañando los objetivos de extensión de la UNIPE, las escuelas han sido elegidas en regiones cercanas a sedes de la Universidad. El presente proyecto se sostiene en acuerdos institucionales establecidos entre la UNIPE y el sistema educativo provincial.

[3] Agradecemos al equipo de conducción integrado por Nora y Silvia y a los docentes Adriana, Ariel, Claudia, Elsa, Karina y Mónica por su generosidad, su apertura e involucramiento en la producción intelectual que tuvo lugar en el grupo de trabajo.

[4] María Mónica Becerril y Horacio Itzcovich

[5] Se desarrollaron un total de diez reuniones a lo largo del año.

objeto de indagación– va configurando, dialéctica y progresivamente, un proceso de problematización de la enseñanza y un marco para estudiarla.

Las reuniones se analizaron a través de los registros confeccionados a partir de grabaciones y notas de los investigadores, compartidos también con los docentes. Sobre la base de este material y de un primer análisis, se elaboraron síntesis de cada encuentro cuya lectura y discusión jalonaron el inicio de la reunión siguiente. Estas últimas incluyeron elementos interpretativos que el equipo de investigación puso a consideración en el grupo de trabajo colaborativo. Es un procedimiento que habilita la posibilidad de retomar las discusiones introduciendo nuevos elementos que van constituyendo un marco compartido de trabajo (Becerril, García, Itzcovich, Quaranta y Sadovsky, en prensa).

Los investigadores, como coordinadores de las reuniones, apelamos de manera sistemática a que los maestros expresaran sus expectativas respecto de los problemas de enseñanza que se analizaban para tomarlas como base de los procesos de problematización, alentamos una visión de la enseñanza en términos de recorridos de largo plazo, retomamos los planteos que se iban haciendo, trajimos las voces de los participantes en reuniones, ya ocurridas, cuando interpretábamos que lo que se discutía tenía relación con alguna intervención anterior. De alguna manera nos propusimos como sostenedores de la memoria del grupo. Las discusiones en cada encuentro dejaban cuestiones planteadas a partir de las cuales los maestros decidían hacer algún trabajo en las aulas, recogían las producciones de los alumnos y las llevaban al encuentro siguiente. Poco a poco se fue instalando una dinámica en la que las reuniones se estructuraban sobre la base del análisis de las producciones de los niños y el relato de las clases que hacían los maestros. Fuimos permeables a esa modalidad que operaba un cambio respecto del año anterior en el cual el trabajo del aula –que también se hacía con la intención de profundizar la exploración del asunto que se estaba tratando– se planificaba en el espacio colaborativo. Considerar el análisis de las producciones de los alumnos como una actividad principal del grupo nos exigió producir en terreno junto con los maestros y directivos interpretaciones de las ideas que subyacían a los procedimientos de los niños. Esto jugó a favor de la construcción de un clima de confianza en el que juntos nos involucramos en una tarea desafiante y original.

2. LA DISPONIBILIDAD DE CÁLCULO DE LOS ALUMNOS COMO PROBLEMA A ESTUDIAR

La disponibilidad de los chicos con relación al cálculo sigue siendo una preocupación para los maestros de la Escuela 11 de Cardales al iniciar el trabajo del año 2013. El abandono de las –cada vez más desprestigiadas– rutinas ligadas al recitado (de tablas) y la repetición (de cuentas) parece haber provocado un vacío didáctico. Los maestros, en tanto colectivo, no manifiestan haber construido un proyecto que los satisfaga en cuanto a los logros de sus alumnos en el terreno de los algoritmos vinculados a las operaciones; *saber de memoria* y *saber razonar* se mencionan como modalidades cuya coordinación no se logra establecer.

Durante el año 2012 habíamos reconocido la necesidad de discutir con los docentes sobre la idea de *puentes* entre las estrategias que elaboran los chicos y los procedimientos habituales de cálculo (Becerril *et al*, en prensa). Desde nuestro punto de vista, la construcción de estos puentes requiere un trabajo en el aula que permita desentrañar con los alumnos las relaciones matemáticas implicadas en sus estrategias, así como también hacer visibles las que sustentan los procedimientos más convencionales. Orientados por ese resultado general nos propusimos instalar la pregunta por los posibles recorridos que articulen los diferentes recursos de cálculo.

Empezar a discutir la matemática implicada en algunas reglas que se usan habitualmente, y preguntarnos por las relaciones entre las estrategias personales de los niños y los algoritmos convencionales, fue el comienzo de un proceso de problematización –sostenido a lo largo de todo el año– cuyo rasgo fundamental fue el de empezar a imaginar, explorar y construir un diálogo con los alumnos a raíz de sus posibles propuestas.

Al analizar en el espacio colaborativo algunas reglas que los maestros enseñan (como por ejemplo *al dividir un número por 100 las dos últimas cifras forman el resto y las cifras que quedan "arman" el cociente*) se pone de manifiesto que muchos docentes proponen una justificación que no logra explicar la regla (por ejemplo, *se toman las dos últimas cifras* ***porque*** *el cien tiene dos ceros*). Nosotros (los integrantes del equipo de investigación) proponemos discutir sobre el valor explicativo de las justificaciones y convocamos a encontrar argumentos basados en los significados de los números y las operaciones en juego y no sólo en los significantes (McClain y Cobb, 2001). Se establece la diferencia entre enunciar una regla y fundamentarla a través del reconocimiento y transformación de las relaciones implicadas; los docentes toman conciencia de que se trata de fundamentaciones accesibles para ellos. Esta accesibilidad –interpretamos– tiene un impacto importante en los maestros que parecen pensar que algo potente que desconocían estaba a su alcance –y al de sus alumnos mediante un trabajo de enseñanza–. Entendemos que la sensación de algo posible y potente motoriza al grupo.

Internarse paulatinamente en el análisis de algunas estrategias de los niños fue –lo mencionamos– otra fuente importante de problematización. *¿Qué cosas sabe el chico para hacer esto?* fue una pregunta planteada por los investigadores que organizaba las discusiones frente al desafío de interpretar procedimientos de los alumnos. En esos intercambios, algunos maestros desestimaban que se estuviera usando un saber interesante, otros se preguntaban cómo harían los chicos para elaborar esas estrategias y otros lograban conceptualizarlas en términos de relaciones matemáticas. Al analizar casos concretos surgían diferencias en las interpretaciones de los maestros que parecían tener posiciones más homogéneas cuando se hablaba en general. Estas diferencias resultaron productivas para poner de manifiesto el carácter interpretativo del análisis de las elaboraciones de los niños.

Frente a dos estrategias diferentes, que ponen en juego distintos niños en una clase, una maestra comenta que autoriza ambas *porque* –argumenta– *dan el mismo resultado.* Se señala que se trata de un control de tipo externo y se contrasta esto con la posibilidad de transformar las relaciones implicadas en los procedimientos para establecer su equivalencia (control interno).

En este contexto, se liga la elaboración de procedimientos para las operaciones con las relaciones que se pueden establecer al descomponer números en función de la estructura de nuestro sistema de numeración. Este vínculo no parece estar constituido para algunos maestros que, al concebir la enseñanza del sistema de numeración como un primer capítulo de un programa, no ven la oportunidad de profundizar sobre su organización que ofrece el tratamiento de las operaciones. Otros, en cambio, recuperan el trabajo del año anterior en el espacio colaborativo y señalan que la búsqueda de fundamentos a las cuestiones matemáticas constituyó una vía para superar la fragmentación de los temas.

En síntesis, la búsqueda de explicaciones para varias de las reglas que los maestros enseñan, así como el análisis en términos de relaciones matemáticas de las estrategias que se fueron proponiendo, empezó a hacer visible, en el espacio, que dichas relaciones constituyen una *materia prima* para que el docente pueda entablar un diálogo con sus alumnos. Aunque esto se irá configurando a lo largo de las reuniones, nos interesa adelantar como resultado el valor del análisis matemático de los procedimientos como generador de explicaciones y, simultáneamente, como herramienta de intercambio con los niños.

Se abre así un camino de exploración que impulsa a los maestros a buscar en sus aulas procedimientos aritméticos de los alumnos a raíz de las propuestas que realizan para llevarlos como insumos al espacio colaborativo. El análisis de estas producciones va dando lugar a la elaboración de asuntos matemáticos de enseñanza que son nuevos para estos maestros y a la vez presentan nuevas exigencias para su trabajo. Es así como emerge la necesidad de promover en las aulas que los niños establezcan relaciones explícitas entre diferentes cálculos para que unos funcionen como punto de apoyo para la resolución de otros (apartado 3). Asimismo se va apreciando cada vez más el valor de alentar la elaboración de explicaciones por parte de los alumnos (apartado 4). Planteamos a modo de conclusión algunas cuestiones que retenemos de este trabajo, y que sugieren modos de continuar explorando este camino, el de producir sentidos al pensar con otros (apartado 5).

3. LA CONFIGURACIÓN DE RELACIONES ENTRE CÁLCULOS COMO OBJETO DE ENSEÑANZA

La tensión entre dar lugar a las elaboraciones de los niños y lograr que se apropien de lo socialmente establecido aflora permanentemente en las discusiones. Los docentes parecen considerar que a lo largo del primer ciclo los niños despliegan una variedad de recursos que deberían ser "superados" al recorrer el segundo ciclo de la escolaridad. Sin embargo, se preocupan al constatar que son unos cuantos los alumnos que al llegar a 6º grado continúan utilizando recursos similares a los que fueron elaborados en el primer ciclo. Expresan la necesidad de que los chicos dominen los algoritmos convencionales y al mismo tiempo manifiestan la intención de que los nuevos recursos preserven un alto nivel de comprensión. Una encrucijada parece atravesarlos: que los chicos resuelvan "como puedan" pero que sepan las cuentas convencionales. En el debate de esta cuestión surge una segunda tensión, entre comprensión y velocidad. Efectivamente, los maestros plantean que el despliegue de recursos propios –si lleva tiempo– va en desmedro de la posibilidad de insertarse con éxito en la escuela secundaria. Una vez más, la presión de las instituciones se entrama con el posicionamiento didáctico de los maestros condicionando sus decisiones (Robert, 2003).

En este contexto se empieza a plantear de qué manera se "arma" la disponibilidad de los niños:

> Directora N: Yo creo que hay un montón de cosas dentro de las tablas de multiplicar, (...) como la del 5, que sabemos que son los números terminados en 5 y en 0, con las que el chico puede adquirir cierta velocidad, razonándolas y encontrando la manera de llegar al resultado a partir de un punto de apoyo. (I encuentro)

Esta idea de apelar a las relaciones para disponer de los resultados empieza a emerger, en principio, para abordar el problema de la memoria; como iremos viendo, poco a poco este primer objetivo se va enriqueciendo y las discusiones permiten ir instalando que esta *misma práctica*[6] lleva a producir o a recuperar relaciones aritméticas relevantes que fortalecen el sentido de lo numérico.

Estos debates impulsan a los docentes a ensayar con sus alumnos diferentes actividades, cuyo análisis junto con el de las producciones de sus chicos, ingresan en la mesa de trabajo y estructuran las discusiones que organizamos en los siguientes parágrafos.

3.1 La construcción de la intencionalidad didáctica en el marco del análisis de las tareas y de las producciones infantiles

El análisis de las tareas que los maestros van proponiendo se ve enriquecido por la consideración de las estrategias que los niños ponen en juego para resolverlas. Efectivamente, a lo largo de las discusiones, el contacto con lo que los chicos hacen permite apreciar potencialidades que no necesariamente fueron identificadas originalmente. La dialéctica *análisis de la tarea –análisis de las producciones infantiles* configura en el espacio nuevos sentidos que permiten a los maestros ampliar la intencionalidad que inicialmente habían atribuido a la tarea. Asimismo se hace visible la complejidad del trabajo interpretativo toda vez que se pone de manifiesto que los maestros ofrecen distintas miradas para una misma producción. Ambos asuntos –construcción de una intención y naturaleza de la tarea interpretativa– constituyen una producción del espacio colaborativo. A continuación, nos referiremos a ellos basándonos en algunos ejemplos.

[6] En tanto se modifica el sentido, no es estrictamente la misma práctica.

En la segunda reunión, una de las maestras comparte la propuesta que realizó en su aula.

> Maestra M: Porque el problema era encontrar cinco multiplicaciones de tres números que siempre den 48. No valía usar el 1 ni cambiarlos...no hacer la conmutativa, usar números distintos o al menos repetir uno solo. (II encuentro)

Se reflexiona sobre la posibilidad de establecer con los chicos relaciones entre distintos cálculos que den 48 –por ejemplo, 6 × 2 × 4 y 3 × 4 × 4. Esta actividad exige –por lo menos en potencia– que se consideren los factores de las correspondientes expresiones y se investigue cuáles son las *compensaciones* que conservan el resultado. En ese contexto, se reconoce la diferencia entre ensayar desde cero cada vez para obtener una multiplicación y arribar a la solución a partir de la transformación de los factores. En esta última opción, se hace necesario concebir el número como un producto y poner en juego un abanico de relaciones posibles (por ejemplo, duplicar un factor y dividir otro entre 2). La maestra relata entonces que una sola nena se apoya en un cálculo para obtener otro. Más allá de lo efectivamente sucedido en esa ocasión en el aula de la maestra, el episodio hace posible analizar que un mismo enunciado puede dar lugar a actividades con diferente grado de complejidad y que su despliegue depende, en parte, de la potencialidad que el maestro le haya podido atribuir al considerarlas para su proyecto. La idea de concebir como objeto de enseñanza la práctica de apoyarse en un cálculo para obtener otro, a partir de transformaciones aritméticas, se fortalece con esta discusión.

La maestra aporta un segundo ejemplo –probablemente influida por la discusión anterior– donde apela más explícitamente a la realización de transformaciones de un cálculo conservando el resultado. A medida que se analizan las respuestas de un niño a raíz de esta situación, otros docentes comienzan a reconocer que sus alumnos apelan a estrategias similares. Es así como una maestra, a la luz de un problema en el cual los niños debían armar de diferentes maneras una misma cantidad de dinero con *billetes* de distintos valores, reconoce que los niños arman primero una cantidad y después, tomando esa cantidad inicial como referencia, van haciendo cambios de billetes de manera de conservarla. El análisis realizado, a raíz del problema que trajo su colega, le permite atribuir una nueva significación a una práctica que despliegan sus alumnos a la cual, probablemente, hasta este momento no le había otorgado el valor que le asigna después de la discusión. Es decir, el espacio de trabajo habilita a que cada docente resignifique sus prácticas al participar de los análisis que se hacen sobre el trabajo de sus compañeros.

En relación con la naturaleza del trabajo interpretativo, resulta novedoso –e impactante– para los maestros que se pongan sobre la mesa diferentes interpretaciones para una misma producción. Veamos un ejemplo:

> Investigador: O sea, la lógica de la actividad es la siguiente. Sabiendo que 30 - 20 es 10, ¿cómo hago para encontrar 30 menos 19, 30 menos 18; 30 menos 17; 30 menos 21...? Y para el primero esta alumna pone como resultado 9. Tratemos de identificar primero qué está pensando esta nena para poner ahí un 9, ¿de dónde sacará el 9? ¿Pudimos hablar un poco con ella?
> Maestra C: Sí, según ella 30 menos 19 es 9; ella intentó a este 19 agregarle para que le dé 30, eso es lo que hizo ella...
> Investigador: Pero después escribe "30 menos 18, 8" y "30 menos 17, 7"...
> Maestra M: Tuvo presente que iba disminuyendo el número...
> Maestra C: ¿Qué? Como este bajaba, ¿también tenía que bajar?...
> Investigadora: Otra posibilidad puede ser que, cuando ella lo hizo, identificó que el resultado era el mismo número que las unidades, entonces podríamos pensar que repite esa regularidad. Ahí ella está intentando buscar o agarrarse de algo que sucede... **no sabemos bien cuál es**.

La existencia de diferentes interpretaciones pone de manifiesto la necesidad de interactuar con los alumnos para conocer las relaciones que subyacen a los elementos "visibles" de su producción (orales o escritos). Entender lo que los niños producen se transforma en una nueva exigencia para el trabajo del docente, quien deberá orientar sus intervenciones tratando de coordinar la perspectiva de los alumnos con las ideas que quiere enseñar. Se subraya de esta manera el carácter orgánicamente interactivo de la acción docente (Sensevy y Mercier, 2007), sobre todo si se asume la postura de incluir con carácter de conocimiento los aportes genuinos de los niños.

3.2 El análisis de las producciones de los alumnos: una vía para concebir las relaciones entre cálculos como objeto de enseñanza

La interpretación de las producciones de los alumnos recogidas en las aulas y que los docentes aportan al espacio colaborativo fue adquiriendo, a lo largo de los encuentros, distintos sentidos y valor. La tarea en un principio se centró en intentar "entender" lo que los alumnos hacen, lo cual en sí mismo dio lugar a una intensa actividad de reconstrucción del trabajo intelectual de los niños. La complejidad de las relaciones matemáticas utilizadas, en algunos casos, sorprende a los maestros y les permite tomar contacto con las implicancias de concebir una práctica de este tipo con toda la clase.[7]

Veamos, por ejemplo, el diálogo que tiene lugar a partir de la producción de un alumno (figura 1) frente a la propuesta de encontrar cuánto hay que restarle a 1000 para llegar a 273.

> Maestro Ar: Armó el 1000 por este lado, el 200 acá, y de estos 100 sacó los 73
> Investigador: Y le quedaron los 27...
> Maestro Ar: Y después sumó lo que le iba quedando.........
> Investigador: A ver...400, 300...
> Directora N: Hizo así, 400, 300, 200, 100...sumó 1000. El 400 lo deja igual, el 300 lo deja igual...y el 200 como es 273, le saca los 200 o sea que no los considera, y del 100, saca 73... (II encuentro)

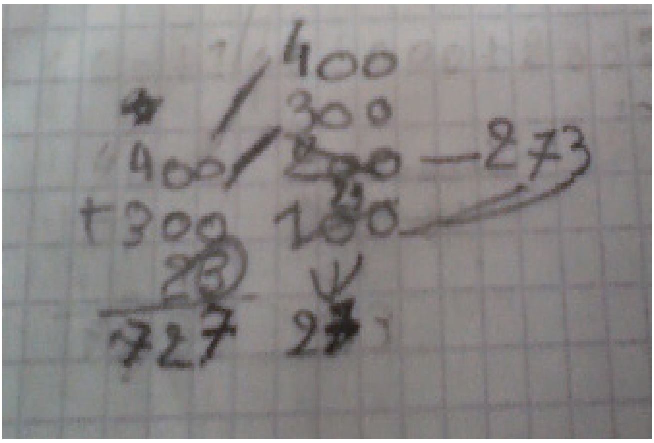


Figura 1

[7] Si bien queremos subrayar aquí el impacto en los docentes del análisis de una producción infantil original, toda esta discusión también permite avanzar en la configuración de nuevas intenciones didácticas con relación al trabajo sobre las producciones infantiles, en el mismo sentido que analizamos en el parágrafo anterior.

Todos los integrantes nos involucramos en la interpretación de un procedimiento tan original. Se nos hace claro el trabajo de reconstrucción que requiere formular hipótesis sobre el razonamiento del niño a partir de la traza de sus cálculos. Reconocemos en primer lugar que el alumno advierte que, aunque el problema no cuestiona, explícitamente, cuánto es 1000 menos 273, este cálculo resuelve el problema. Para poner en evidencia las relaciones que parece movilizar, apelemos a expresiones algebraicas:

el problema que se le plantea es $1000 - x = 273$;
para eso el niño descompone el 1000 en $273 + x$
y luego "quita" a 1000 el 273 para obtener x es decir, hace $1000 - 273 = x$.

Podríamos suponer que, de alguna manera, el niño está jugando con la equivalencia entre las siguientes relaciones:

$1000 = 273 + x$; $1000 - x = 273$ y $1000 - 273 = x$.

Al mirar sus anotaciones, interpretamos que reemplaza el cálculo 1000 - 273 por $(400 + 300 + 200 + 100) - 273$ y que piensa el 273 como $200 + 73$, recién ahí "tacha" el 200 y le resta 73 a 100, finalmente compone el resultado con el 27 de esta última resta y con el 400 y el 300 que no han sido afectados por su operación. Las flechas que vemos en la foto son consistentes con esta interpretación. La elaboración del niño entusiasma al grupo.

¿Cómo ubicamos esta producción en el contexto de lo que se viene discutiendo? La estrategia de este niño supone, también –como en los ejemplos referidos en el parágrafo anterior–, transformar el cálculo para hacerlo posible. Pero el grado de elaboración que tiene hace visible que su autor ha tenido un alto nivel de anticipación y de toma de decisiones. El ejemplo es referenciado en lo que queda de esa reunión varias veces para analizar otros casos, lo cual nos lleva a interpretar que este caso "difícil" ilumina los análisis –las anticipaciones y decisiones involucradas– de otros que se ven más sencillos.

Los distintos ejemplos trabajados en la reunión, reorganizados ahora a partir de éste, que resulta más destacado, alimentan la idea de que una práctica basada en el análisis y transformación de los cálculos es viable e interesante por tres razones fundamentales: porque puede ser proyectada por los docentes, porque los niños pueden enfrentar los problemas y porque es posible imaginar interacciones a raíz de sus resoluciones.

3.3 Las relaciones entre cálculos como vía para explorar "la resta" como problema de enseñanza

Los maestros proponen trabajar específicamente sobre estrategias para restar, dado que les preocupa el desempeño de los alumnos al respecto. Frente a este planteo, los investigadores retomamos la idea de relaciones entre cálculos para explorar este problema y lo hacemos con la intención de ampliar el universo de relaciones vinculadas a la resta, sin abordar de entrada un trabajo con el algoritmo convencional. Nuestra intención era expandir la base relacional de los alumnos respecto de la resta bajo el supuesto de que esto los posicionaría mejor para controlar en un segundo momento los cálculos convencionales. Así, las relaciones entre cálculos, de ser un recurso que algunos niños utilizan por propia iniciativa, se transforman en un recurso para la enseñanza, como veremos a continuación.

Se elaboran en el grupo problemas en los cuales los chicos tienen que resolver varios cálculos ligados por alguna regularidad. La idea es que se puedan apoyar en la realización de algunos que les resultan más "fáciles" para inferir los resultados de otros, sin necesidad de hacer todas las "cuentas". Por ejemplo, 56 − 23; 56 − 24; 56 − 25; 56 − 26; 56 − 27; 56 − 28; 56 − 29. Un maestro se entusiasma con la posibilidad de ofrecer varios cálculos juntos para que unos actúen como punto de apoyo de otros:

> Maestro Ar: Yo creo que si les damos los cálculos juntos vamos a tener más posibilidades de que ellos expliquen qué relaciones hay (...) Van a poder explicar mejor si ven los cálculos juntos. (II encuentro)

La regularidad entre estas cuentas apunta a que se reconozca y se movilice la relación "uno más en el sustraendo, uno menos en la diferencia" para anticipar los resultados. Esta idea, según la cual se puede acceder al resultado sin hacer la cuenta, resulta nueva en el grupo y su reconocimiento genera inquietud y expectativas para explorar su funcionamiento en las aulas.

> Maestro Ar: Yo quiero trabajar eso, la relación entre los cálculos.... ese problema quiero ver, si usan el que saben hacer para el otro. ¿Con qué salen? Y a partir de ahí empezar a trabajar.

Podemos señalar dos cuestiones que emergen de este análisis a los ojos de los docentes: la relevancia de considerar como objeto de enseñanza la práctica de *apoyarme en lo que sé para resolver lo que no sé* y, en íntima relación con lo anterior, el establecimiento de esas relaciones entre cálculos como insumo para el control de las cuentas. Es decir, la identificación del poder anticipatorio de una relación y su valor como herramienta de control de las producciones.

El mismo maestro recién citado trae la producción de una alumna que permite inferir que toma en cuenta esta regularidad para su resolución. Efectivamente, el docente propuso la siguiente serie de cálculos: 56 - 23, 56 - 24, 56 - 25, 56 - 26, 56 - 27, 56 - 29. Notemos que se "saltea" el 56 - 28. Esta niña incluye ella misma este último cálculo y escribe: *le resto uno menos y me da uno más*. A raíz de esto, en el grupo de docentes, se señala

> Directora N: En éste, Ariel no les da el 56 menos 28, salta al menos 29, y ella [refiriéndose a la alumna] hace menos 28, aunque no estaba y dice: ***la hice para estar segura que seguía así***. Y agrega *le resto uno menos y me da uno más*, imirá! (IV encuentro)

Aunque no queda claro cómo está considerando la alumna la regularidad –para ello hubiera sido necesario interactuar con ella, cuestión que se tematiza luego en el grupo–, sí podemos interpretar que "algo" le decían esos resultados seriados y que necesitó introducir "el que faltaba" para verificar la continuidad que había detectado. En otros términos, la alumna capta la regularidad y le otorga un sentido anticipatorio que necesita confirmar de alguna manera. El ejemplo resulta interesante por dos razones: la posición de autonomía que la acción de la niña pone de manifiesto lleva a hipotetizar sobre posibles relaciones entre el tipo de tarea que se propone y la actividad intelectual que habilita al menos potencialmente y confirma la existencia de una "sintonía" entre la intención con la que se incluyó la regularidad y el uso que la niña hace de la misma. Esta última cuestión resulta muy significativa –y muy gratificante– para los maestros que no tienen muchas oportunidades de tomar contacto con los lazos que se entablan entre las intenciones que imprimen a sus propuestas y las interpretaciones que los niños hacen de las mismas.

Las ideas discutidas con respecto al valor didáctico de las relaciones entre cálculos comienzan a reconocerse como insumos para gestionar ayudas a los niños por parte de los docentes.

> Directora N: Claro, ayudarlos a ver que ya tienen un resultado y ver si pueden usarlo para buscar el otro, esa es la ayuda. (II encuentro).

Los maestros, en esas ayudas, hacen explícitas las relaciones y las transformaciones a las cuales se recurre y el aula se nutre de nuevas relaciones que ayudan a controlar los resultados. En síntesis, la tematización de las relaciones entre cálculos llega al espacio a partir de interpretar las estrategias de los chicos, se transforma en objeto de enseñanza y luego en estrategia de intervención para ayudarlos a avanzar.

Vale la pena destacar que aquello que se elabora en el espacio colaborativo es un *tipo de problema* y *ciertas condiciones* que se transforman en un referente sobre la base del cual cada docente reconstruye la actividad que propondrá a sus alumnos. Este señalamiento resulta relevante de cara a nuestro proyecto en tanto permite precisar la diferencia entre *elaborar fundamentos para las situaciones de enseñanza* y *construir guiones a recorrer más o menos textualmente*.

4. LAS EXPLICACIONES EN LA CLASE COMO OBJETO DE ENSEÑANZA

La cuestión de considerar la producción de explicaciones como asunto de enseñanza, *nace* en las discusiones del grupo, ligada a la necesidad de comprender las relaciones que hacen posible las transformaciones para encontrar los resultados de los cálculos. Las discusiones a raíz de los análisis de los materiales del aula que aportan los maestros, delinean la potencia, desde el punto de vista de la comprensión, que tiene tanto para los alumnos como para los docentes la producción de explicaciones en la clase. Esto se desarrolla en el apartado 4.1.

A lo largo de las discusiones en el grupo, basadas en los análisis de episodios de las clases, se va reconociendo que la elaboración de explicaciones por parte de los chicos está estrechamente relacionada con las intervenciones que hace el docente orientadas por una cierta intención. Es así como se van identificando un conjunto de condiciones que, en principio, favorecerían la producción de explicaciones por parte de los alumnos, así como su evolución en cuanto a la complejidad, nivel explicativo y elaboración que tienen. Estas consideraciones se tratan en el apartado 4.2.

La caracterización de aquello que constituye una explicación satisfactoria es inicialmente diversa para distintos maestros: por una parte, valoran de modo diferente algunas formulaciones que proponen los alumnos; por otra, ellos mismos proponen explicaciones de diferente tipo cuando se analizan algunos problemas en el grupo colaborativo. La confrontación entre diferentes explicaciones da lugar a diferenciar entre *descripción* –entendida básicamente como enumeración de pasos que se siguen para realizar una tarea– y *explicación* –que se interpreta como encadenamiento deductivo de propiedades que dan cuenta de la condición necesaria de una relación (Lerner, 2012; Sadovsky, 2010). Esta distinción se reconoce también en algunas producciones de los niños y éstas se ligan al trabajo realizado en las clases. El proceso de emergencia de esta distinción como así también su consideración como idea didáctica constituyen el objeto del apartado 4.3

4.1 La producción de sentidos para las explicaciones en el marco de las discusiones del grupo colaborativo

A lo largo de los encuentros se van configurando en el grupo distintos sentidos para la producción de explicaciones, por parte de los niños en la clase. Desde el punto de vista de los alumnos, se analiza que: amplía su comprensión, profundiza la confianza en sus posibilidades y contribuye a conquistar una posición de autonomía (apartado 4.1.1). Desde la perspectiva de los maestros: habilita un modo de acceder a las ideas que sustentan las estrategias de sus chicos, permite tomar contacto con relaciones que no habían propuesto a los niños y ofrece elementos para gestionar las interacciones en la clase tomando en cuenta las relaciones concebidas por los alumnos (apartado 4.1.2). Consideramos que estas elaboraciones se inscriben en la producción de conocimiento matemático-didáctico, objeto de nuestra investigación.

4.1.1 Los sentidos de la elaboración de explicaciones en la clase desde la perspectiva de los alumnos

a) Explicaciones y comprensión

Los docentes empiezan a tomar conciencia de que la producción de explicaciones permite a los chicos comprender mejor el asunto que están tratando, toda vez que se ven exigidos a elaborar fundamentos para lo que proponen y para ello explicitan las relaciones que subyacen a sus estrategias.

> Maestro Ar: Yo les di la posibilidad de que me expliquen, y a partir de lo que me explican ellos aparece el por qué... van a tener que debatir y convencerse. (IV encuentro)

b) Explicaciones y confianza

No habíamos pensado nunca que la producción de explicaciones puede llegar a ser para un niño una oportunidad de ganar confianza, porque le permite mostrar cómo pensó, es una ocasión de hacerse entender, de autorizarse a hacer, porque su producción se va a completar con lo que pueda decir, aunque no lo haya podido escribir. Fue la directora de la escuela –desde una posición atenta y cercana a las vivencias de los chicos– la que lo subraya de este modo:

> Directora N: Yo creo que el hecho de que puedan explicar, los hace sentir cómodos en decir *bueno, lo voy a hacer, total puedo explicar cómo lo hice, me van a entender.* (IV encuentro)

A la vez, los niños encuentran en la explicación un espacio de producción original: aunque todos hayan llegado al mismo resultado, no todos tienen la misma explicación y esto da sentido a compartir la tarea.

c) Explicaciones y autonomía

La producción de explicaciones en la clase fue –desde la perspectiva de algunos maestros– fundamental en la posibilidad de que los alumnos logren mayor autonomía y se vayan independizando de la evaluación del docente para confirmar sus resultados (Margolinas, 1993).

> Maestro Ar: Esto de que ellos expliquen cómo hicieron las cosas y que llegan al resultado de una u otra manera, dejó de lado la dependencia de si estaba bien o estaba mal. Ya no preguntan si está bien o está mal. Te llevan la hoja o te comentan desde el banco lo que hicieron.[...] Yo lo que busco es que defiendan su trabajo, al explicarme lo que hicieron, que defiendan lo que están haciendo... (IV encuentro)

Esta última expresión reafirma la estrecha relación entre construcción de autonomía por parte de los niños e intencionalidad didáctica del docente. Las tres dimensiones consideradas (comprensión, confianza y autonomía), lejos de ser independientes, se alimentan unas a otras y nos llevan a establecer un lazo

–su exploración deberá profundizarse– entre producción de explicaciones e inclusión educativa.

4.1.2 Los sentidos de la elaboración de explicaciones en la clase desde la perspectiva de los docentes

a) Las explicaciones de los alumnos como vía para acceder a sus elaboraciones

A lo largo de las discusiones en los encuentros se hace visible que apelar a que los niños expliquen cumple una doble función desde el punto de vista del conocimiento de los docentes. Por un lado, les permite acceder a las relaciones que los niños establecen tanto para asegurarse de que comprenden, como para tomarlas en cuenta al interactuar con ellos.

Por otro lado, pero en el mismo movimiento, los maestros encuentran novedades en tanto acceden a explicaciones que no habían visto anteriormente en los niños:

> Maestro Ar: Por ejemplo, me quedo con lo anterior, esa descomposición del número, eso es algo nuevo, nunca lo había visto. La explicación de Leonel. [leyendo la producción de Leonel]: Le saqué 10 números al 56, lo dejé en 46 y los 10 se los puse al 6 y quedan 16, al 16 le saqué 9 que quedó en 7 y al 4 le saqué 2 y queda en 2 y el resultado fue 27. Consideró el 56 como un todo, no el 5... Es una explicación que yo antes no había visto. Porque te dicen lo mismo, pero te dicen *al 5 le saco 1 y estoy pasando 10*. (IV encuentro)

Ampliar el panorama de lo posible para los niños es enriquecedor para el docente: lo fortalece en la confianza de que *abrir el juego* vale la pena y ofrece alternativas posibles de intervención con distintos alumnos.

Se analiza en el espacio que los intercambios que se producen entre los niños y el docente, cuando éste quiere comprender los modos en que los alumnos pensaron, cobran autenticidad. En tanto el docente no conoce de antemano aquello que el alumno tiene para decir y entabla un diálogo en el que retomará las ideas de los chicos. Esto constituye una diferencia importante con una modalidad de intercambio históricamente instalada en la escuela, según la cual el maestro pregunta lo que ya sabe y lo hace para constatar que el niño es capaz de producir una respuesta (Perrenoud, 1990).

b) La anticipación de intercambios en la clase a partir de las explicaciones de los alumnos

El proceso de interpretación de las producciones infantiles que se desarrolla en el grupo de trabajo, va instalando cada vez más la necesidad de que los docentes interactúen con las relaciones que subyacen a las explicaciones que proponen los niños. En este sentido, la interpretación de las explicaciones se transforma en una herramienta para anticipar las interacciones en la clase:

> Directora S: Y eso que explican es lo que te permite después poder guiarlos si hay un error, que esa sería nuestra función. (IV encuentro)

> Investigadora: Creo que lo que también salió acá es que las explicaciones de los chicos nos permiten saber para dónde tenemos que seguir. Nos ubica mejor en relación con lo que sí pueden y con lo que no. (VI encuentro)

c) Las interacciones entre los niños a raíz de las explicaciones que producen

Varios maestros deciden promover intercambios entre sus alumnos, a raíz de distintas explicaciones que se elaboran en sus clases y traen al grupo las reacciones de los niños. Se establecen entonces lazos entre la dimensión comunicacional de una explicación dirigida, a un otro –que la tiene que entender– y la comprensión en términos de organización de relaciones subyacente a la explicación. Se identifican en estos análisis diferentes *costados* que contribuyen a conceptualizar los vínculos entre comunicación y conceptualización.

Las explicaciones que proponen sus compañeros pueden tener, para algunos niños, un papel clarificador potente; tomar conciencia de esto permite apreciar que el intercambio de explicaciones constituye, para algunos alumnos, una oportunidad para recuperar asuntos que tal vez no pudieron captar en un momento anterior.

> Maestra M: Me sucedió que pasaran al pizarrón por grupo y uno me dice *Ah, ya entendí ahora, como lo hizo él, yo lo pude entender porque yo lo buscaba de otra forma y no lo podía resolver*. Entonces la explicación del compañero le resultó más entendible. (V encuentro)

Se reconoce además en el equipo que la circulación de explicaciones en la clase puede enriquecer la perspectiva de todos los chicos –también la de quienes comprendieron de entrada– ya que se trata de producciones originales y diferentes entre sí.

En varias ocasiones los maestros traen ejemplos en los que la *comunicabilidad* de una explicación se utilizó como *prueba* para aceptarla o intentar mejorarla.

> Maestra M: Y les digo, ¿no era que ustedes no entendían esa explicación cortita? Hicimos oralmente la lectura para que vieran que si realmente queríamos que la otra persona que tome la hoja entendiera, teníamos que ir detalladamente. [...]. Cuando volvimos a leer lo que ellos habían puesto les digo: ¿Con cuál de estas explicaciones les parece que otra persona, si toma esta hoja, va a entender más? (VIII encuentro)

Entendemos que la consideración de *otro,* que tiene que entender, actúa sobre la comprensión de la explicación en tanto esta última es analizada en sus detalles, en sus conexiones, en su organización y es modificada en consecuencia.

4.2 Identificación de condiciones para la producción de explicaciones

Desde el inicio de este proyecto, una preocupación de los maestros se identificaba con la falta de autonomía por parte de los alumnos y el trabajo intencional hacia la producción de explicaciones, poco a poco, se va concibiendo como posible respuesta a este problema.[8]

En el espacio colaborativo, se discuten condiciones –de la tarea, de las interacciones de los maestros con los alumnos– para la emergencia de tales explicaciones, o la transformación de las primeras producciones de los alumnos, en dirección de aquellas que constituyen el horizonte de intenciones de los docentes. En otros términos, esas condiciones se muestran subsidiarias del tipo de explicaciones que desean suscitar los maestros, de la interpretación que hacen de las producciones de los alumnos, de la concepción de recorridos posibles entre esas producciones y las que se busca alcanzar. A la vez, muchas de las ideas que surgen provienen de decisiones que se han tomado *sobre terreno* y cuya identificación, conceptualización y validación abren la posibilidad de una exploración

[8] Durante el año anterior (2012), el grupo había discutido el tipo de trabajo docente que podría promover mayor autonomía por parte de los alumnos. Esta preocupación es retomada, una y otra vez, en los análisis que se realizan en el 2013, bajo el supuesto general de que existen relaciones de mutua dependencia entre la propuesta didáctica y la conquista de una posición autónoma por parte de los niños.

más sistemática –no realizada en el marco de este proyecto– en el camino de transformar el *saber práctico (docente)* en *saber sobre la práctica (docente)* (Sztajn, 2013).

Entre las condiciones de la tarea que se identificaron, mencionemos la posibilidad de:

a) Considerar las producciones erróneas como un punto de partida (o punto de apoyo) que permite generar más fácilmente explicaciones.

Una idea que se discute al respecto es que los niños –por medio de confrontaciones entre ellos, de constataciones con la calculadora o de algún tipo de relación que ponen en juego– tienen recursos para conocer si su resultado es o no correcto. Con ese *dato* buscan, de manera más dirigida, una explicación que les permita entender por qué algo es erróneo. En algún sentido, la explicación sobre un resultado *que está mal* se elabora *contra* el saber de su incorrección, en tanto que lo correcto exige apelar a relaciones cuya presencia se hizo *natural* y que, por ese motivo, son menos visibles. Esta interpretación se apoya en el reconocimiento sobre el papel de la contradicción en la producción de conocimientos en el aula (Arsac, Chapiron, Colonna, Germain, Guichard y Mante, 1992; Balacheff, 1982, 2000)

b) Partir de explicaciones orales que –este es un supuesto que se explora– resultan más accesibles a los alumnos para colaborar con ellos en la elaboración de una explicación escrita.

> Maestra Ad: Para ellos, al no poder escribirlo, es como que no saben explicar. Pero si yo lo traigo al escritorio y le pido que me lo cuente, me lo dice.
> Maestra K: Se puede empezar por la oralidad, después escribir, leerlo, volver a escribir, es como que hay que trabajar con eso. (VI encuentro)

Notemos que las afirmaciones de estas maestras ponen en cuestión la identificación –muchas veces instalada en el sentido común de la institución escolar– entre no escribir y no saber. Retomando la dificultad que supone para los niños la escritura, la última maestra citada se propone recuperar en este contexto –y desde una perspectiva exploratoria– la productividad de la práctica de revisión de textos. Se esboza en esta idea un asunto que requiere ser indagado más sistemáticamente.

c) Promover en el espacio colectivo de la clase la confrontación sobre diferentes reflexiones.

Esta propuesta es considerada a partir de una intervención del investigador que algunos docentes toman con entusiasmo: organizar un debate en torno a explicaciones diferentes, una vez que los niños han elaborado cada uno su propia explicación.

> Investigador: Dejar que cada uno arme su explicación, luego organizar grupos que sostengan cosas diferentes y que se pongan de acuerdo.
> Maestro Ar: Van a tener que debatir y convencerse.
> Maestra M: Eso me encantó, lo voy a hacer.

El supuesto que sostiene el planteo del investigador es que la comparación de la propia perspectiva –que actúa como marco de referencia–, con otras posibilidades *contra y con* las cuales se puede entablar un diálogo de ideas, lleva a nuevas elaboraciones (Arsac y otros, 1992; Balacheff, 2000; Sadovsky, 2010). Algunos maestros aprecian esta idea apoyados en su experiencia que los lleva a valorar positivamente los intercambios entre los niños. Notemos que el investigador ofrece una "idea" –la del intercambio entre los niños–, plasmada en un dispositivo concreto –seleccionar dos producciones diferentes y promover un debate–. De alguna manera, la idea viene ya resumida en un formato que permite concebir cómo llevarla a cabo, lo cual orienta la acción de la docente que acepta con interés la propuesta.

4.3 La distinción entre descripción y explicación

Explicación y descripción son casi indistinguibles –ya lo mencionamos– en las conversaciones iniciales del espacio de trabajo. Sin embargo, a poco de andar y a la luz de los análisis sobre las explicaciones de los niños, estas dos ideas comienzan a diferenciarse. De la evolución de este *par* en la mesa de debate, de las implicancias que tuvo en las prácticas del aula haberlos distinguido, hablaremos en este punto.

¿Cómo lo hiciste?, preguntan los maestros intentando promover una explicación pero las respuestas de los niños no siempre permiten acceder a los motivos por los cuales han desplegado un cierto procedimiento; en algunas ocasiones, ellos responden enumerando los pasos realizados. Las relaciones matemáticas que conectan los pasos –podríamos alojarlas en el terreno de la explicación– no se explicitan. Es recién cuando se trabaja sobre un ejemplo que claramente no constituye una explicación para los maestros –*lo hice mentalmente*– que empieza a ser posible plantear la cuestión de la diferencia.

> Investigador: Cuando un chico dice "lo hice mentalmente", ¿nos resulta suficiente?, ¿estamos conformes? [...] ¿Qué explicaciones nos gustaría que los pibes hagan?
> Ar: Yo apuntaría a la definición de los pasos realizados, como una consigna más [...] "Resuelve. Describe los pasos realizados".
> Investigador: ¿Hay alguna diferencia entre una explicación y una descripción? (IV encuentro)

La pregunta inquieta. Para avanzar en clarificarla apelamos a la comparación entre las producciones de dos alumnos, a partir de una actividad que se les había propuesto, resolver los siguientes cálculos: $56-23$; $56-24$; $56-25$; $56-26$; $56-27$; $56-28$; $56-29$ (anotados en el formato de cuentas "paradas"). Luego tenían que escribir cómo lo habían pensado. Veamos los diálogos en los que se habla de estos procedimientos.

> Directora N: Mira este (lee una producción de un alumno a raíz de la resta $56-29$), el 6 le pide uno al 5 y queda en 16, y el 5 queda en 4. Le resté el 9 al 16 y me dio el primer resultado. La segunda resta era 4 menos 2, digo 4 porque el 6 le había pedido un número al 5 y quedó en 4. Al 4 le resté 2 y el resultado es 2. Junté el 2 y el 7 y se forma 27...
> Vice directora S: Te digo, para texto instructivo el chico ya tiene un diez, ja, ja.
> Investigador: Había uno, creo, del nene que escribió *fui sacando de a uno, en las cuentas que hacían... la primera 56 − 23 = 33 y a las otras cuentas les fui restando 1 y la cuenta 56-28 no estaba pero me iba a dar 28 y así pude hacer 56 - 29*. Lo que pone, este chico, como explicación no es cómo hizo la cuenta; es distinta la explicación que vimos antes (*le saqué 1, le pedí al compañero...*), o sea algunos describen los pasos de cada cuenta y otros explican la relación entre las cuentas. ¿**Para dónde queremos ir nosotros? ¿Y** cómo se hace? (IV encuentro)

Es claro que el primer alumno responde a la pregunta ¿*cómo lo hiciste*?; sin embargo, se limita a describir el algoritmo, poco podemos saber acerca de su comprensión a partir de su respuesta.

La producción que se reseña, en el segundo diálogo, permite hacer un poco más explícita la diferencia entre una descripción y una explicación. Interpretamos que, en este último caso, el alumno analiza la sucesión de cuentas, identifica la presencia de una cierta regularidad (si se resta uno más, la diferencia es uno menos) y se apoya en ella para obtener los resultados. Los maestros aprecian las diferencias y éstas resultan insumos sustanciales que ponen en el centro el problema de la intencionalidad.

Se comienza a reconocer la necesidad de negociar con los alumnos el tipo de explicación a la que se aspira. A la vez que se subraya que esa expectativa no se puede trasmitir de manera directa. El debate sobre este tema se sostiene a lo largo de varios encuentros y para su tratamiento se planifican diferentes actividades que los docentes utilizan como medio de exploración en sus aulas.

Apoyada en una idea trabajada en el grupo, según la cual, se hipotetizó que es más fácil explicar lo erróneo que lo correcto (ver apartado 4.2), una docente propuso a sus alumnos dos cuentas (figuras 2 y 3) ya resueltas para que determinaran si estaban bien o mal hechas.

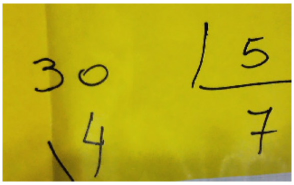


Figura 2

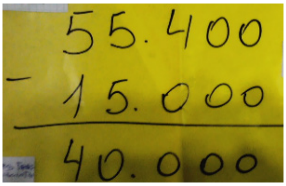


Figura 3

La comparación entre las explicaciones que los niños proponen para la resta y las que elaboran para la división, pone de manifiesto que se trata de elaboraciones de calidades diferentes. Para la resta, los niños apelan a "corregir" la cuenta o bien a realizarla en su cuaderno y cotejar si el resultado presentado coincide con el que obtuvieron. Se reconoce que la explicación que elaboran está más asociada a una descripción de pasos: *la cuenta está mal porque donde está el 0 va un 4; está mal porque 0 − 0 es 0; 0 − 0 es 0; 4 − 0 es 4, 5 − 5 es 0*, son algunas de las frases elaboradas por los niños. En cambio, las explicaciones que sugieren los niños para la cuenta de división pueden interpretarse en términos de relaciones matemáticas: *Está mal porque 5 × 6 es 30 y donde dice 7 va el 6 y donde va el 4 da un 0; no se puede dividir más por lo tanto se cierra la división; está mal* *porque 7 × 5 es 35 y el número que tenía que dividir era 30 y se pasa... ; la cuenta está mal porque 5 × 7 = 35 y le pusieron un 4, por eso está mal.*

Es decir, en el primer caso, los niños apelan a un discurso asociado al algoritmo, con poco involucramiento de relaciones matemáticas, en tanto que las explicaciones sobre el error en la división se apoyan en las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto. La docente comenta que estas últimas relaciones han estado presentes en el trabajo del aula lo cual explicaría que alumnos recurran a ellas.

Un docente comparte en el espacio la consigna que propuso a sus alumnos y que, desde nuestro punto de vista constituye una *vuelta de tuerca* en consonancia con las discusiones que se venían desarrollando en el grupo:

> Maestro Ar [refiriéndose a una consigna que dio a sus alumnos] Les doy una cuenta que está mal hecha. El primer punto que tienen que hacer es explicar qué hizo esta persona, en el segundo punto indicar si están de acuerdo y justificar si es sí, por qué y si es no, por qué. (VIII encuentro).

En el primer ítem, el docente busca, de alguna manera, que los alumnos describan y en el segundo ítem aspira a que los alumnos expliquen. Más allá de los efectos potenciales, la consigna da cuenta del modo en el que el maestro recoge las discusiones del grupo para plasmarlas de algún modo en su proyecto.

5. A MODO DE CONCLUSIÓN

Queremos volver una vez más –ahora para concluir– a la dinámica que se ha instalado en el espacio colaborativo, centrada en el análisis de lo que los niños iban haciendo en las aulas a instancias de maestros que les proponían cuestiones para explorar nuevos horizontes de enseñanza.

Habíamos concebido la planificación compartida como modo principal de intercambio en el espacio. Sin embargo, los maestros nos llevaron a hacer foco en el análisis de los trabajos de sus alumnos. Las discusiones en el grupo alimentaron sus proyectos de enseñanza pero las relaciones entre lo que se discutía y lo que hacían en las aulas quedó centralmente a cargo de cada maestro y pensamos que esto contribuyó a un clima de confianza en el cual se fortaleció la posición productora de los maestros.

Hacer eje en el análisis de las producciones infantiles hizo posible desentrañar las relaciones que subyacían a las propuestas de los niños, y entablar diálogos hipotéticos con ellos para retomar esas relaciones. *¿Qué hacemos con esta idea que los chicos tienen?*, fue una pregunta que se planteó una y otra vez y que –pensamos– contribuyó a proyectar la clases en términos de ideas matemáticas a discutir con los chicos y a despertar el deseo de ir a las aulas a ver qué pasaba.

Al ponerse de manifiesto que los maestros tenían distintas posturas sobre la estrategia de algún alumno, se pudo subrayar el carácter interpretativo que tiene la mirada sobre el trabajo de los niños. Asimismo, al organizar los intercambios sobre la base de cuestiones específicas –como por ejemplo el modo de interpretar la estrategia de un niño– salen a la luz diferencias sobre las que es interesante trabajar y que muchas veces quedan disueltas cuando se habla en general.

La tarea de interpretar las elaboraciones de los niños, fue también, una vía para problematizar el conocimiento matemático. El análisis de las relaciones allí implicadas quitó obviedad a algunas ideas muy naturalizadas y permitió ir configurando nuevos objetos de enseñanza. Vemos así un proceso dialéctico entre problematización y elaboración de un marco de análisis. Tal vez, también, haya una clave para ubicar una posición productora para los maestros.

Algo del orden de la reparación personal –que entusiasmaba– sucedía cada vez que los maestros podían tejer argumentos para muchas de las cuestiones que enseñan hace años como "reglas" que "se cumplen". Efectivamente, el trabajo implicado en la búsqueda de fundamentos permitió a los maestros tomar contacto con sus propias posibilidades de "hacer matemática". Esto los ubicó en una perspectiva según la cual es posible y potente concebir ese trabajo de fundamentación en las clases.

Los docentes coincidieron en señalar que la apertura de las tareas y la apelación a las explicaciones, fortalecieron la autonomía de los niños. Se establecieron relaciones entre comprensión, confianza, autonomía y tipo de tarea. Englobando estas relaciones se abre una puerta vinculada a la inclusión educativa, una puerta en la que el conocimiento es una vía central para la inclusión.

El intercambio con un grupo de docentes y directivos que miran a los niños con atención, con afecto y con intención, nos dejó ver costados en los que nunca habíamos pensado, como por ejemplo la producción de explicaciones como oportunidad para los niños de hacerse entender, de expandir su pensamiento hacia otro y tener más chances de ser comprendido.

Al acceder a los análisis que se hacen sobre las experiencias que los colegas relatan en las reuniones, los maestros resignifican sus propias prácticas otorgándoles nuevos sentidos en los que no habían pensado al plantearlas en sus aulas. En muchos momentos surgieron ideas para responder a alguna cuestión –por ejemplo relacionar cálculos para apoyar su memorización– pero en el proceso de discusión ese primer sentido se fue transformando y enriqueciendo.

Orientados por la intención de que los niños pusieran en juego determinadas estrategias, que produjeran una cierta calidad de explicaciones, de que reconocieran algunas relaciones matemáticas, los maestros tomaron muchísimas decisiones sobre terreno (*que me dicten en el pizarrón, primero les doy esta consigna y después esta otra, que discutan de a dos, revisamos todos juntos,* ...) que el trabajo en el espacio colaborativo permitió identificar. Contra la invisibilidad que suelen tener en la "normalidad" de una institución que históricamente no ha previsto un tiempo para la reflexión sobre la acción. Como hemos dicho, el grupo colaborativo constituye una oportunidad de transformar el saber práctico en saber sobre la práctica. Por las características de nuestro espacio –enmarcado en las exigencias del tiempo escolar que demanda permanentemente resolver hacia adelante– no nos hemos detenido a explorar más sistemáticamente cada una de esas decisiones. Matizarlas, conceptualizarlas, enmarcarlas en las condiciones en las que han resultado potentes. Tal vez sea momento –torciendo la lógica del tiempo en la escuela– de retomar el trabajo conjunto con maestros y directivos para asumir esa tarea. Esta perspectiva reafirma –por si hiciera falta– la potencia de la colaboración para fortalecer el trabajo de todos aquellos que entendemos que el trabajo de enseñar está inherentemente ligado al derecho de aprender.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. y Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège. Une suite de situations permettant l'appropiation des règles du débat mathématique.* Lyon: Presses Universitaires de Lyon.

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques, 3*(3), 261-304.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* (P. Gómez, Trad.) Bogotá: Universidad de los Andes. Una empresa docente.

Becerril, M., García, P., Itzcovich, H., Quaranta, M. y Sadovsky, P. (en prensa). Producción matemático-didáctica en el marco de un trabajo colaborativo entre docentes, directores de escuela primaria e investigadores en didáctica. En *Publicación de la Universidad Pedagógica (UNIPE).* La Plata: Unipe. Editorial Universitaria.

Charles-Pézard, M., Butlen, D. y Masselot, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques? Quelle formation?* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P. y Poirier, L. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation [En red]. *Revue des sciences de l'éducation, 27*(1), 33-64.

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? En M. Borba, *Pesquisa qualitativa em educaçãmatemática.* (Vol. 9). Pesquisa qualitativa em educação matemática: Autêntica Editora.

Lerner, D. (2012). Hacia la comprensión del valor posicional. Avances y vicisitudes en el trayecto de una investigación didáctica. En C. Broitman, *Matemáticas en la escuela primaria [I]. Números naturales y decimales con niños y adultos* (págs. 173-201). Buenos Aires: Paidós.

Margolinas, C. (1993). *De l´importance du vrai et du faux.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

McClain, K. y Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*, 236-266.

Perrenoud, P. (1990). *La construcción del éxito y del fracaso escolar.* Madrid: Morata.

Robert, A. (2003). De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques: le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée). Didaskalia, 22.

Robert, A. (2004). Que cherchons-nous à comprendre dans les pratiques des enseignants? Quelles analyses menons-nous? En M.-L. Peltier-Barbier, *Dur pour les élèves. Dur pour les enseignants. Dur d´enseigner en ZEP* (págs. 15-32). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Robert, A. y Rogalski, J. (2002). Le système complexe et coherent des pratiques des enseingnats des mathématiques: une double approche. *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies, 2*(4), 505-528.

Robert, A. y Vanderbrouk, F. (2003). Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en clase de seconde. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(3), 389-424.

Robert, A., Roditi, E. y Grugeon, B. (2007). Diversités des offres de formation et travail du formateur d'enseignants de mathématiques du secondaire. *Petit X, 74*, 60-90.

Roditi, É. (2011). *Apports d´une intégration de diverses approches et perspectives. Note de synthèse présentée pour l´habilitation à diriger des recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques.* Paris: Université Paris Descartes.

Sadovsky, P. (2010). Explicar na aula de matematica, um desafio que as crianças enfrentam com prazer. En Escola da Vila, *30 olhares para o futuro* (págs. 233-241). San Pablo: Escola da Vila. Centro de Formação.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir.* Bruselas: De Broeck.

Sensevy, G. y Mercier, A. (2007). *Agir ensemble: l'action didactique conjointe du professeur et des élèves.* Rennes: PUR.

Sztajn, P. (2013). Mathematics professional development researchers as stakeholders. *SISYPHUS. Journal of education, 1*(3), 246-269.

DATOS DE LOS AUTORES

Patricia Sadovsky
patsadov@gmail.com

María Emilia Quaranta
memiliaquaranta@gmail.com

Horacio Itzcovich
yayohiz@gmail.com.ar

María Mónica Becerril
monicabece@gmail.com

Patricia García
patgarcia41@speedy.com.ar

Institución de adscripción de los autores:
Universidad Pedagógica de la Provincia de Buenos Aires, UNIPE

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Análisis del proceso de acoplamiento entre las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento matemático en el contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones

Analysis of the coupling process between the epistemic and cognitive facets of mathematical knowledge in the context of an exploratory-investigative task about patterns

Luis R. Pino-Fan, Adriana Assis y Juan D. Godino

Resumen: En este trabajo exploramos el proceso de acoplamiento entre los significados pretendidos e implementados por los profesores, y los significados que logran los estudiantes, en un contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones, implementada en una clase de 7º año de Enseñanza Básica en Brasil. Para ello, utilizamos el modelo teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, el cual nos permitió describir e interpretar los procesos de interacción en el aula y establecer las relaciones entre las facetas que, según este modelo, componen el proceso de enseñanza y aprendizaje. Como resultado resaltamos la complejidad del trabajo del profesor, quien debe ser capaz de reconocer y negociar los significados producidos por los estudiantes –no siempre contemplados en su planeación inicial– tomando decisiones sobre el tipo de actuación que debe adoptar momento a momento a lo largo del proceso de estudio para garantizar la optimización del aprendizaje.

Palabras clave: Análisis de procesos de instrucción. Patrones. Interacción en el aula. Enfoque Onto-Semiótico.

Abstract: In this paper, we explore the coupling between the intended and implemented meanings by the teachers and the meanings achieved by the students in the context of an exploratory-investigative task on patterns, implemented in a class of the 7th grade of the basic education in Brazil. For this, we use the theoretical model known as Onto-Semiotic Approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction, which allowed us to describe and interpret

Fecha de recepción: 2 de enero de 2015; fecha de aceptación: 13 de abril de 2015.

the interaction processes in the classroom and establish relations between the facets that, according to this model, compose the process of teaching and learning. As a result, we emphasize the complexity of the teacher's work, which should be able to recognize and negotiate the meanings produced by the students –not always contemplated in her initial planning– making decisions about the type of performance that should be adopted, moment-to-moment, throughout the process of study to ensure the optimization of learning.

Key words: Instructional process analysis. Patterns. Classroom interaction. Onto-semiotic approach.

INTRODUCCIÓN

El estudio de los aspectos necesarios para gestionar idóneamente los aprendizajes de los estudiantes de tópicos matemáticos específicos, es un tema que ha ido cobrando relevancia en la comunidad científica de Didáctica de la Matemática. Una de las principales problemáticas que se tiene en las investigaciones sobre las interacciones en el aula, las cuales intervienen en el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas, es ¿cómo analizar las intervenciones de los docentes y de los discentes? Varias investigaciones focalizan su atención en el estudio de las prácticas matemáticas que realizan los alumnos en clase, enfatizando los aprendizajes logrados por los estudiantes respecto de los aprendizajes pretendidos por la institución. Esto ayuda a identificar conflictos semióticos potenciales y contribuye a la toma de decisiones sobre qué enseñar y cómo enseñar, y así potenciar buenas prácticas (Robles, Del Castillo y Font, 2012). Otras investigaciones, de acuerdo con Coll y Sánchez (2008), se centran en la actividad de los profesores, focalizando su atención en cómo enseñan: el discurso que utilizan, la motivación en clase, las representaciones que potencian, los objetos matemáticos y procesos que movilizan (Planas e Iranzo, 2009; Pochulu y Font, 2011; Contreras, García y Font, 2012; Badillo, Figueiras, Font y Martínez, 2013).

Existen modelos y pautas, presentados desde diversos marcos teóricos, para el análisis de las interacciones que se suscitan en un proceso de instrucción (Coll y Sánchez, 2008; Planas e Iranzo, 2009; Font, Planas y Godino, 2010). Sin embargo, las investigaciones que se han realizado con estos modelos se centran en aspectos parciales de las interacciones. Esto es señalado por Planas e Iranzo (2009) de la siguiente manera "...cualquier modelo de análisis sobre la interacción en el aula es necesariamente un modelo que prioriza algunos puntos que conforman la complejidad asociada a los fenómenos de comunicación, participación e interacción social" (p. 209).

En este trabajo exploramos el acoplamiento entre los significados pretendidos e implementados por el profesor, *faceta epistémica del conocimiento*, y los significados que logran los estudiantes, *faceta cognitiva del conocimiento,* mediante el análisis de las configuraciones epistémica y cognitiva, respectivamente. Este análisis tiene lugar en un contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones, implementada en una clase de 7º año de Enseñanza Básica. A partir del análisis, y de la identificación y descripción de los objetos y procesos matemáticos movilizados por las profesoras y alumnos en dicha actividad, se establecen las relaciones entre las seis facetas que propone el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007), modelo teórico que adoptamos como base de este estudio.

En nuestra propuesta metodológica para el análisis de procesos de instrucción cobra especial relevancia la *faceta interaccional*, puesto que es a partir de ella que se puede describir y comprender la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje, en nuestro caso, relacionado con una actividad que involucra el uso de patrones.

Hemos organizado este trabajo en cinco apartados. Los primeros tres refieren, respectivamente, a los antecedentes, marco teórico y metodológico, y a la contextualización de la tarea implementada, la cual ha sido usada para otros fines en Assis, Godino y Frade (2012). En el cuarto bloque se presenta el análisis epistémico del conocimiento, es decir, los significados pretendidos o planificados, por dos profesoras. En el quinto bloque se analiza la interacción entre las distintas facetas del conocimiento, y se estudia el acoplamiento entre los aprendizajes pretendidos por las profesoras y los aprendizajes logrados por los estudiantes. Finalmente, se presentan las conclusiones y consideraciones finales, enfatizando potencialidades y limitaciones de nuestra propuesta metodológica.

MARCO TEÓRICO

Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos

El EOS es un sistema teórico-metodológico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Con dicho fin, se adopta una perspectiva global que tiene en cuenta seis dimensiones, o facetas, y las interacciones entre las mismas, implicadas en los proceso de enseñanza y aprendizaje de temas concretos de matemáticas: epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica. Para cada una de estas facetas se proponen cinco niveles de análisis: *prácticas matemáticas* (personales e institucionales), *configuración de objetos y procesos* involucrados en las prácticas matemáticas, *normas y metanormas* que regulan los *procesos de interacción* en el aula, e *idoneidad didáctica* (Godino, 2011; Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007). La figura 1 ilustra tanto las dimensiones como los niveles de análisis de dichas facetas, involucrados en los procesos de estudio, y que dan cuenta del carácter relacional de la enseñanza. Los profesores, los estudiantes y el contenido sólo se pueden comprender unos en relación a los otros. El profesor trabaja para orquestar el contenido, las representaciones del contenido y las interrelaciones de las personas que intervienen en la clase. Los modos de estar de los estudiantes, sus formas de participación y su aprendizaje, emergen de estas relaciones mutuamente constitutivas. La enseñanza es también *multidimensional* (Frankle, Kazemi y Battey, 2007, p. 227).

En Font, Planas y Godino (2010, p. 91), se conjugan estas facetas y niveles de análisis didáctico, en la propuesta de cinco niveles para el análisis de procesos de instrucción:

Nivel 1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
Nivel 2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
Nivel 3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
Nivel 4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
Nivel 5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Dichos autores señalan que, para un proceso de instrucción, la aplicación del nivel 1 lleva a describir la secuencia de prácticas matemáticas. La realización de dichas prácticas moviliza elementos distintos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica y un medio donde se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.). Puesto que el agente realiza prácticas orientadas a la resolución de situaciones-problema, es necesario considerar, entre otros aspectos, objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (nivel 2). Dado que el estudio de las matemáticas tiene lugar bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros aprendices, el análisis debiera progresar, según estos autores, desde la situación-problema y las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (nivel 1) a las configuraciones de objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (nivel 2) y de ahí hacia el estudio de las interacciones entre profesor y alumnos.

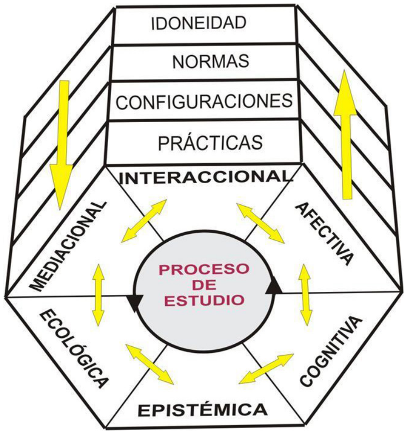


Figura 1. Facetas y niveles de análisis didáctico (Godino, 2009)

Para esta investigación, el estudio de las interacciones (nivel 3) que se suscitan en torno a un proceso de instrucción entre el profesor y los alumnos, e inclusive con los medios y recursos utilizados para el aprendizaje, cobran especial relevancia. Esto es así ya que es a partir de dichas interacciones que se pueden analizar las prácticas matemáticas realizadas para la resolución de una situación-problema (nivel 1), las configuraciones didácticas de objetos y procesos que emergen de dichas prácticas (nivel 2), las normas y metanormas que regulan las interacciones (nivel 4) y las mejoras potenciales del proceso de instrucción (nivel 5). En otras palabras, las interacciones son centro de los procesos de instrucción, siendo que a partir de ellas podemos estudiar los fenómenos vinculados a factores clave que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el apartado 4 se ejemplifica el uso de los niveles 1 y 2 desde el punto de vista epistémico, es decir, lo que pretende el profesor como parte de la institución; mientras que en el apartado 5 se utilizan los cinco niveles para el análisis del proceso de instrucción implementado, el cual se describirá en el apartado 4.

Actividades exploratorio-investigativas

El aprendizaje basado en la investigación (*inquiry learning*) es un modelo de instrucción inspirado en las prácticas de investigación científica, que enfatiza el hecho de proponer a los estudiantes cuestiones o problemas relevantes, producir y analizar datos y construir argumentos basados en las evidencias (Hmelo-Silver, Duncan y Chinn, 2007). Ponte, Fonseca y Brunheira (1999) utilizan el término "investigación matemática" para denominar el "inquiry learning" y lo diferencian de la resolución de problemas de la siguiente manera:

> En la resolución de problemas, tal como es entendida inicialmente, el objetivo es encontrar el camino para llegar a un punto no inmediatamente accesible. Es un proceso convergente. En una investigación matemática, el objetivo es explorar todos los caminos que surgen como interesantes, a partir de una situación dada. Es un proceso divergente. Se sabe cuál es el punto de partida, más no se sabe cuál será el punto de llegada (pp. 94-95).

En este trabajo utilizamos el término *actividades exploratorio-investigativas* para referirnos al tipo de tarea en la que los alumnos se dedican tanto a la exploración como a la investigación matemática. Pensamos que el término "exploratorio-investigativas" es más propicio para describir lo que ocurre con alumnos de Enseñanza Básica que por primera vez se enfrentan a este tipo de actividades.

CONTEXTUALIZACIÓN DE LA CLASE ANALIZADA

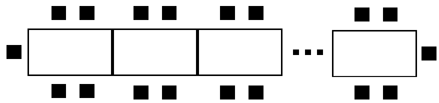
El episodio didáctico considerado tuvo una duración aproximada de 1 hora y 10 minutos, y se desarrolló en una clase de 7º año de Enseñanza Básica de una escuela pública, situada en una región urbana de Belo Horizonte, Brasil. La clase estaba conformada por 15 alumnos de aproximadamente 12 años. La actividad fue implementada por dos profesoras, la segunda autora de este artículo y la profesora titular de la clase. En este artículo nos referiremos a ellas como Prof. 1 y Prof. 2, respectivamente.

Los alumnos se organizaron libremente en tres grupos. La tarea que aquí se analiza (figura 2) fue la séptima actividad implementada con estos alumnos, de un total de nueve actividades exploratorio-investigativas sobre diversos temas. Al momento de la implementación, los alumnos aún se encontraban en una fase de transición entre la "clase tradicional", a las que estaban habituados, y el trabajo de investigación en el aula.

Tarea investigativa: ¿Álgebra en el banquete de boda?

La tarea propuesta:

En determinado banquete de boda, se colocan mesas para seis personas. Esperando que hubiese una mayor aproximación entre los invitados para la confraternización, decidieron juntarlas en la siguiente disposición:



¿Será que hay álgebra en un banquete de boda? A ver... Siguen algunas cuestiones para nuestra investigación.

(¡Recuerda! Todas las respuestas deben ser justificadas, con cálculos o dibujos).

a) Construye una tabla que relacione la cantidad de mesas y la cantidad de sillas utilizadas. Encuentra el número de sillas utilizadas con, por lo menos, seis sillas. Observe las posibles relaciones entre mesas y sillas.
b) Utilizando 15 mesas, ¿cuántas sillas son necesarias? Justifique.
c) Si hubiera 42 sillas, ¿cuántas mesas serían necesarias? Justifique.
d) ¿Es posible formar una hilera de mesas que tenga 100 sillas? Si es posible, ¿cuántas mesas serían necesarias? ¿Por qué?
e) Investigando la secuencia, a partir del dibujo y/o de la tabla construida en el apartado a), explica cómo está constituida, ¿Cuál es el patrón existente?
f) Escribe una expresión matemática que relacione el número de mesas y el número de sillas. Es importante el uso de un lenguaje más elaborado, un lenguaje que se aproxime a una fórmula. ¿Qué letras podrían ser usadas?

Figura 2. Tarea exploratorio-investigativa implementada[1]

A pesar de haber estudiado el tema de ecuaciones de primer grado, los alumnos participantes no habían trabajado con secuencias, patrones o actividades similares. A cada grupo se le proporcionó una hoja con instrucciones para el desarrollo de la tarea (figura 2), varios rectángulos recortados en lona del mismo tamaño, para simular las mesas, y una bolsa con corchos para simular las sillas, tal y como se muestra en la figura 3. Así mismo, cada grupo recibió una hoja de

[1] La tarea investigativa ¿Álgebra en el banquete de boda? fue adaptada de Fernández (2010)..

papel y varios lápices de colores para hacer sus anotaciones. Se les pidió a los alumnos que, utilizando el material para simular las mesas y las sillas, desarrollasen, en grupos, la investigación propuesta.

En este artículo, analizamos el trabajo realizado por un equipo de cuatro estudiantes a los que hemos nombrado Marcelo, Paulo, Vanderlei y Valter. Este equipo, a pesar de presentar dificultades en matemáticas, se mostró bastante motivado y comprometido con la actividad, demostrando persistencia cuando no conseguían progresar. Con esta tarea se pretendía que los alumnos: 1) explorasen la relación y variación entre las magnitudes involucradas; 2) tuvieran la necesidad de utilizar una letra, como variable, para representar una de las magnitudes involucradas; 3) comprendieran la noción de término general de la secuencia numérica obtenida a partir del dibujo o de la tabla construida; 4) formularan y comprobaran conjeturas matemáticas en la exploración de la tareas propuesta; y 5) obtuvieran la fórmula o expresión matemática, que representa la relación entre las magnitudes o término general de la secuencia, es decir, el enésimo término.

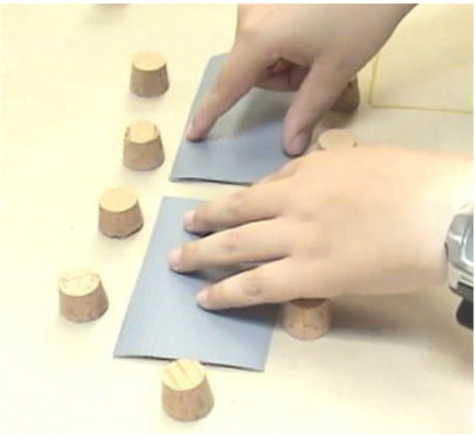


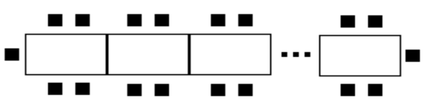
Figura 3. Manipulación de los materiales concretos por un estudiante

En lo que respecta a la realización de la tarea, vemos que está en juego una correspondencia, o función, que relaciona el número de sillas (variable dependiente) y el número de mesas (variable independiente). Los conjuntos inicial y final son las cantidades de mesas y sillas, y sus respectivas medidas. Consideramos que la emergencia o manifestación del pensamiento algebraico no está en que el alumno maneje, reconozca o aplique objetos particulares, en casos particulares, tales como número, cantidad, medida, multiplicación o adición. En el caso de la solución de tareas sobre patrones, dicho pensamiento se manifiesta cuando se identifica la regla o criterio de correspondencia que sigue el patrón. Esta regla, o proposición, puede ser expresada de diversas maneras, por ejemplo, "se obtiene el número de sillas multiplicando por cuatro el número de mesas y sumando las dos sillas que están en las cabeceras". De acuerdo con el modelo de niveles de algebrización de Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), un nivel superior de razonamiento algebraico es logrado cuando el alumno es capaz de generalizar dicha proposición escribiendo, por ejemplo, $y = 4x + 2$, utilizando x e y para indicar cualquier valor numérico.

DESCRIPCIÓN DE LA CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA

A continuación presentamos en detalle la configuración epistémica que emergió de la actividad de planeación de los conocimientos pretendidos por las dos profesoras. Como parte de esta planeación, las profesoras señalaron que proporcionarían poca o ninguna ayuda a los estudiantes, pero que los estudiantes en definitiva sí requerirían algún tipo de soporte. Las tablas 1 a 5, presentan los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos) que conforman la configuración epistémica que las profesoras utilizaron para la planeación de la puesta en marcha de la actividad. Se presentan, también, los significados que las profesoras confirieron a dichos objetos matemáticos primarios dentro de su planeación.

Tabla 1. Configuración epistémica de la tarea: elementos lingüísticos

Elementos lingüísticos	
Objetos	**Significados**
Previos	
	Indica de manera icónica la forma en que las mesas y sillas deben ser ordenadas.

Elementos lingüísticos	
Objetos	**Significados**
Previos	
"Observe las posibles *relaciones* entre mesas y sillas..."	Asociación entre las magnitudes. En este caso, entre el número de mesas y el número de sillas.
"¿Cuál es el *patrón* existente?"	Regularidad que permite identificar el próximo término de una secuencia.
"*Es importante el uso de un lenguaje más elaborado, un lenguaje que se aproxime a una fórmula*"	Sentencia que refiere a la búsqueda de una expresión matemática que represente el patrón de una forma genérica.
Emergentes	
Explicación de la relación entre las magnitudes involucradas (finalizando en una sentencia matemática).	$4 \,.\, n + 2$ $1 + 2n + 1 + 2n$ $n \,.\, 2 \,.\, 2 + 2$ $2 \,.\, (2n+1)$

Conflictos potenciales:

- Escritura parcial o incorrecta de la expresión que relaciona las magnitudes.

Tabla 2. Configuración epistémica de la tarea: conceptos/definiciones

Conceptos/definiciones	
Objetos	**Significados**
Previos	
Álgebra	Parte de la matemática que trata de aritmética generalizada, funciones, ecuaciones y estructuras.
Número	Objeto de la matemática usado para describir cantidades, orden o medida.
Secuencia matemática	Lista ordenada de números o figuras cuyo orden es definido por una regla.

Conceptos/definiciones	
Objetos	**Significados**
Expresión matemática	Combinación de números, letras, símbolos y operadores, agrupados de forma significativa.
Emergentes	
Magnitud	Rasgo cuantificable de un objeto.
Función	La relación/variación entre las magnitudes es obtenida por medio del concepto de función. Están implícitamente involucrados, por lo tanto, los conceptos de variable dependiente e independiente.
Variable independiente	En la expresión general esperada, la variable independiente es x, o bien, el número de mesas.
Variable dependiente	En la expresión general esperada, la variable dependiente sería y, o bien, el número de sillas.

Conflictos potenciales:

- Los alumnos pueden no conseguir construir los conceptos presentados, aunque se trate de una primera aproximación.

Tabla 3. Configuración epistémica de la tarea: propiedades/proposiciones

Propiedades/Proposiciones	
Objetos	**Significados**
Previas	
62 sillas. 10 mesas	Soluciones obtenidas a través del conteo, para los apartados *a)* y *b)*, respectivamente.
Emergentes	
P1: $4n + 2$ ó $2(2n + 1)$	Solución esperada para el apartado *f)* de la tarea.

Conflictos potenciales:

- No determinar la proposición P1.

Tabla 4. Configuración epistémica de la tarea: procedimientos

Procedimientos	
Objetos	**Significados**
Previos	
Describir la "próxima" situación, incrementando en una mesa, al total de mesas de la situación anterior, y determinando el número de sillas (uso recursivo).	Conteo del número de sillas. Refiere a un proceso de particularización. Se realiza el conteo de las sillas a partir de un determinado número, no tan grande, de mesas.
Expresar de manera oral y escrita los razonamientos desarrollados.	Saber expresar sus razonamientos.
Emergentes	
Explorar las relaciones y variaciones entre las variables involucradas.	Se usa para responder las preguntas propuestas en la tarea.
Reconocer la regularidad de la secuencia de modo que se pueda obtener una expresión matemática para el término general.	Proporciona la solución para la tarea. Proceso de generalización de los casos particulares.

Conflictos potenciales:
- Dificultad en dar sentido a una letra;
- Los alumnos pueden no descubrir la relación/variación entre las magnitudes;
- Dificultades en el proceso de generalización.

Tabla 5. Configuración epistémica de la tarea: argumentos

Argumentos	
Objetos	**Significados**
Previos	
Realización exhaustiva del conteo del número de sillas.	Proporciona una solución ineficaz para la tarea.
Emergentes	
A1: Pensando en que para cada mesa, al no considerar las sillas que ocupan los lugares de los dos extremos, se requieren 4 sillas; entonces el número de sillas estará definido por el número de mesas por cuatro. Si el número de mesas es denominado x, por ejemplo, el número de sillas sería $4x$. Como no se consideraron las sillas de los extremos, debemos sumar dos a la expresión anterior. Por lo tanto, la expresión final sería $4x + 2$.	Una de las posibles justificaciones para la solución de la tarea.

Conflictos potenciales:
- No formular correctamente el argumento A1 o similar.

ANÁLISIS DE LAS CONFIGURACIONES COGNITIVAS QUE EMERGEN DE LAS INTERACCIONES DIDÁCTICAS

A lo largo de una trayectoria didáctica, en nuestro caso concreto la implementación de la actividad en un tiempo *t* determinado, es posible observar que el proceso de enseñanza-aprendizaje se desarrolla mediante la interacción en el aula de los agentes educativos profesor-alumno, alumno-alumno, alumno-medios, etc. De esta forma, para el análisis de un proceso de enseñanza y aprendizaje, o de una trayectoria didáctica, es necesario, primeramente, analizar las *prácticas* (del profesor y los alumnos) que se desarrollan en el aula, mediante las *interacciones* que se suscitan y de las cuales emergen dichas prácticas (análisis paralelos de los Niveles 1 y 3 propuestos por Font, Planas y Godino, 2010). A partir de estos análisis es plausible analizar y describir el uso y significado que se les confiere a los *medios y recursos* (Faceta mediacional) y las *normas y metanormas* (Assis, Godino y Frade, 2012) que regulan las interacciones, y en general, el proceso de enseñanza y aprendizaje dentro del aula. A partir de los análisis anteriores es posible determinar la *configuración de objetos matemáticos primarios y procesos* que, como parte de las facetas cognitiva y afectiva, emergen de las prácticas que desarrollan los estudiantes a lo largo de la trayectoria didáctica. La figura 4 muestra la interacción entre las facetas y los niveles de análisis que se proponen para el estudio de procesos de instrucción.

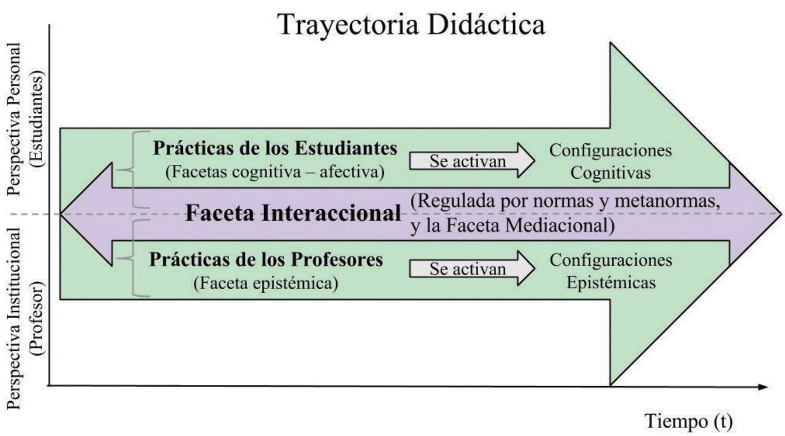


Figura 4. Interacciones entre las Facetas y Niveles de análisis de los procesos de instrucción

A continuación, se presenta el análisis del proceso de instrucción de la actividad "¿Álgebra en el banquete de boda?" considerando las facetas y los niveles, y sus relaciones, que se proponen en la figura 4. Se describe de esta manera, las prácticas de los estudiantes y las dos profesoras, por medio de la interacción que se suscita en el aula, y el vínculo de estas prácticas con el estudio de las otras facetas involucradas en el proceso. Al final de este análisis presentamos la reconstrucción de la configuración de objetos y procesos matemáticos movilizados por los alumnos de nuestro estudio.

Faceta interaccional: Prácticas ↔ Faceta mediacional

En la implementación de la actividad, los alumnos inicialmente utilizan el material concreto, las lonas y los corchos, y después cambian de artefacto pasando a utilizar una hoja de papel en la cual construyen una tabla de datos. Los significados producidos son distintos debido a los medios. En el primer caso piensan en el número de sillas que se pierden al juntar las mesas y en el segundo caso en el número de sillas que aumenta una línea, de la mesa, al juntar otra mesa (ver figura 3). Los procedimientos utilizados, en ambos casos, son distintos también. En el primer caso el procedimiento que prevalece es el de recuento y en el segundo caso el de algoritmización: los alumnos intentan construir una expresión matemática que pueda ser aplicada para conseguir los valores que fueron obtenidos a través del recuento reiterativo.

Las profesoras implementan el taller pensando que los estudiantes llegarían rápidamente a la expresión $4x + 2$. Sin embargo, lo que realmente ocurrió fue que el grupo de alumnos seleccionados, al utilizar el material concreto –y considerar el número de sillas que se pierde cada vez que se junta una mesa más–, producen significados diferentes de los inicialmente pretendidos por éstas. Esto no sería un problema si no fuera por el hecho de que las profesoras, como veremos en los extractos de las transcripciones de las interacciones que se suscitan en el aula, no reconocieron la posibilidad de encaminar el desarrollo del razonamiento y avances de los estudiantes, para ayudarlos a llegar a la expresión $6x - 2(x - 1)$. Este episodio es, por tanto, un ejemplo del "no acoplamiento" de los significados pretendidos e implementados por las profesoras y los significados declarados y logrados por los estudiantes.

Al inicio de la actividad, los alumnos, manipulando los materiales concretos, tratan de establecer un patrón a partir de la observación del número de sillas que *se pierden* cada vez que se agrega otra mesa. La idea parte del alumno Valter, al declarar que, cuando se ponen en fila 3 mesas, 2 sillas se pierden, es decir, una silla junto con cada mesa agregada (considera que se pierde sólo una silla por mesa agregada). Poco después Paulo, manipulando mesas y sillas (ver figura 3), también afirma que se perdieron 2 sillas para dos mesas:

> Paulo: Cuando hay 2 mesas, también se quitan 2 [sillas]. [57[2]]

En ese momento se genera un *conflicto semiótico de tipo interaccional*, ya que ocurre en la interacción, alumno-alumno, entre Valter y Paulo. Una de las profesoras (Prof. 1), al principio, no valida el discurso de Paulo:

> Prof. 1: ¿Sí? ¡A ver! [61]

Sin embargo Paulo usa el material concreto para confirmar su argumento, separa las dos mesas y apunta, indicando el lugar en que las sillas deberían estar (figura 3).

> Paulo: *Porque si unimos estas dos mesas, vamos perder los dos lugares que estarían aquí! [Paulo señala el espacio "donde se juntan" las mesas].* [68]

La profesora 1, pasa entonces a incentivar la exploración de este patrón, preguntando por el número de sillas que se pierde cuando se unen tres mesas y, luego, cuando se unen cuatro. El diálogo que se presenta a continuación muestra cómo Valter reestructura su pensamiento, y por tanto, el conflicto semiótico se resuelve.

> Valter: *[a partir de los elementos proporcionados por Paulo en la línea 68, figura 3]¡Ah!, acumulas dos [sillas] más y con 4 [mesas]...* [83]
> Valter y Paulo: ¡*Se van a perder 6! [sillas].* [84]
> Valter: *Aquí tenía 2 [mesas] y voy a añadir una mesa más y se pierden... 2, 4, [sillas] ...* [89]
> Prof. 1: *Con cada mesa que agregas pierdes 2 sillas.* [90]
> Marcelo: *Eso.* ¡*Más 2 [Enfatiza la expresión "más 2"]!* [91]

[2] El dígito al final de cada extracto refiere a la línea, por ejemplo la 57, de la transcripción del episodio didáctico.

Valter: *van a ser 2, 4, 6, 8, 10, 12... [contando las sillas que se tienen al juntar 3 mesas].* [92]
Prof. 1: *Vamos a hacer una tabla para tratar de alcanzar el término general.* [93]

Prof. 1 pide a los alumnos construir una tabla [línea 93], en un intento de llevarlos a generalizar el patrón obtenido a partir del material concreto. No considera, sin embargo, que este patrón, y en general la expresión que define la relación entre sillas y mesas, al utilizar otro tipo de artefacto como lo es la tabla de valores, podría ser otro. De hecho, como veremos, el patrón que emerge de la construcción de la tabla es otro. En otras palabras, Prof. 1 perdió la oportunidad de explorar la construcción de una expresión que podría describir el patrón descubierto por los alumnos con el uso de los materiales concretos. A saber (considerando x como el número de mesas):

$$6 \cdot x - 2 \cdot (x - 1)$$

En la expresión anterior, se considera que el número de sillas por mesa es de seis, por lo tanto se tiene $6 \cdot x$, y a continuación, se tiene en cuenta la necesidad de substraer el número de sillas que se pierden con cada "unión" (2 sillas por unión). Ahora bien, como el número de uniones –que con el uso de los materiales concretos se representa como el "segmento de línea" que se forma al unir dos mesas–, entre las mesas es siempre uno menos, $x - 1$, que el número de mesas, x, hay que substraer $2 \cdot (x - 1)$ de $6 \cdot x$.

Continuando con el desarrollo del trabajo, Prof. 1 orienta al grupo en la construcción de la tabla de valores. En este momento, los estudiantes exploran no sólo el número de sillas que se pierden con cada unión, sino también el número de sillas que *son añadidas* con cada mesa que se agrega a la fila de mesas. Paulo señala que se necesitan 12 sillas en el caso de la unión de dos mesas, ya que aparentemente él considera seis sillas por mesa. Sin embargo, Marcelo y Valter afirman que sólo se requieren 10 sillas. Paulo hace el conteo de las sillas, a petición de Prof. 1, y regresa a su respuesta, tal y como se muestra en el siguiente extracto:

Prof. 1: [...] *Cuando tengo una mesa, ¿cuántas sillas hay?* [107]
Paulo: ¡seis! [108]
Prof. 1: *Póngalas allí para mí [refiriéndose a que anote su respuesta en la tabla de valores], en frente, 6.* [109]
Prof. 1: *[Paulo anota 6 en la tabla]¡Eso es! Ahora con 2 mesas.* [110]

Paulo: *Son 12.* [111]
Prof. 1: *Vamos a contar [enfatizando el uso del material concreto].* [112]
Marcelo y Valter: ¡*Son 10!* [113]
Prof. 1: *Cuenta para mí,* ¡*Paulo!* [114]
Valter: *Hay 10, porque se perdieron 2 sillas.* [115]
Paulo: *1, 2, 3..., 10 [utilizando el material cuenta silla por silla].* [116]
Prof. 1: ¡Eso es! ¡Ahora cuenta con 3 (mesas), Paulo! Ponlas *allí para mí, por favor [nuevamente enfatizando el uso de los materiales].* [117]
Paulo: *1, 2, 3,..., 14 [cuenta silla por silla].Va a ser 14.* [118]
Valter: *Es lo que ya había hecho antes.* [119]

Es claro que existe una desvinculación, por parte de Paulo, entre los significados que se tienen del procedimiento de contar las sillas que se pierden y el procedimiento exigido por Prof.1 de encontrar un patrón para el número de sillas por *x* mesas, a través de la tabla de valores. Hay un conflicto cognitivo en Paulo que se origina por la instrucción de la profesora "Vamos a hacer una tabla para tratar de alcanzar el término general [93]", instrucción que 'rompe' con el procedimiento y avances que habían logrado los estudiantes al exigir que cuenten el número de sillas que se pierden por cada mesa agregada y explorar, en una tabla de valores, el número de sillas que se tienen por mesa agregada. Vemos cómo la profesora, Prof. 1, intenta hacer que Paulo supere dicho obstáculo con normas de tipo imperativo "Vamos a contar" [112], "Cuenta para mí, ¡Paulo!" [114], etc., que involucran el uso de los materiales concretos.

La profesora, Prof. 1, cuestiona a Paulo sobre el número de sillas necesarias al juntar cuatro mesas en fila. Valter, después de afirmar que se perderían seis sillas (dos por unión) afirma, equivocadamente, que el número total de sillas es de 16. Prof. 1 pide a los alumnos llevar a cabo el recuento y Paulo confirma que serán 18.

Cuando los alumnos son cuestionados por Prof. 1, sobre la diferencia entre los valores encontrados, Valter trata de relacionar la diferencia de cuatro unidades (número de sillas *añadidas*), que percibe entre el número de sillas encontradas para tres y cuatro mesas, con el número de sillas *perdidas* por unión.

Valter: ¡*Ahhhh! Las 4 que llevamos aquí, han vuelto.* [150]
Prof. 1: ¿Cuáles? [151]
Valter: *Aquí, hemos perdido 4 sillas [refiriéndose a las 4 sillas perdidas con las 2 uniones o articulaciones que se tienen cuando se juntan 3 mesas].* [152]

Valter: *Cuando ponemos otra [mesa], ganamos... Tomamos las 4 de vuelta.* [154]

Como vemos, nuevamente Prof. 1 no valida ni explora esta justificación, sino que pide al grupo que traten de descubrir el número de sillas necesarias para cinco mesas alineadas. Así mismo le pide también a Valter que, como en el caso de Paulo, haga una tabla en una hoja aparte (figura 5).

El hecho de que Prof. 1 piense que a partir de la tabla sea posible inferir más fácilmente el número de sillas que se *añaden* por la unión de cada mesa, hace que el conflicto establecido cuando se intenta relacionar el *número de sillas perdidas* con cada unión con el *número de sillas que se añaden*, permanezca abierto. A continuación, Marcelo, viendo las anotaciones de Valter (figura 5), comienza a inferir un nuevo patrón para la secuencia.

Marcelo: ¡*Valter!, hay un incremento de 4 cada vez,* ¡*aquí! [señalando la tabla auxiliar de valores de la figura 5].* [159]

Marcelo intenta comunicar su descubrimiento a la profesora, poco después de tratar de comunicarlo a Valter. Sin embargo, en lugar de explorar y

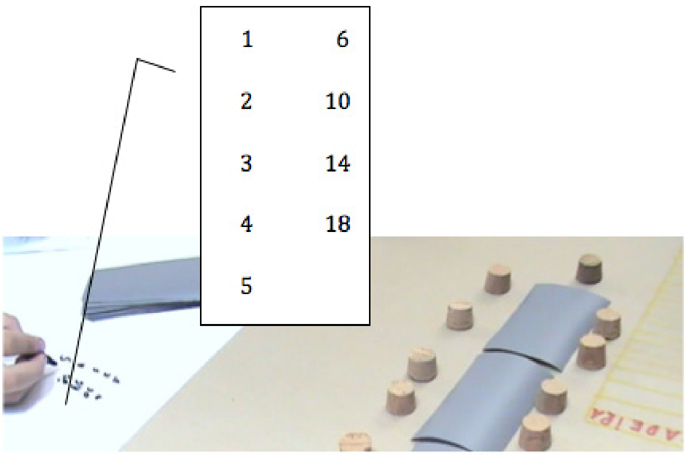


Figura 5. Registro de la actividad desarrollada por Valter

validar el discurso de Marcelo, Prof. 1 pide que examine con cinco mesas utilizando el material.

Marcelo: *Siempre aumenta 6 y disminuye más... menos 2 [dirigiéndose a Prof. 1].* [160]
Prof. 1: *¡Vamos a hacer más para ver si es lo mismo! Pon una mesa más para nosotros. Una mesa más... ¡Ahora con 5!* [161]

Marcelo insiste en su argumento y Prof. 1 finalmente explora su razonamiento:

Marcelo: *Profesora, siempre aumenta 6 y quitas 2.* [163]
Prof. 1: *¿Siempre aumenta 6?* [164]
Marcelo: *No, y quitas 2. De estos 6, quitas 2.* [165]
Prof. 1: *Entonces, vamos intentar, por ejemplo, con 18...* [166]

Aun cuando Paulo afirma que sólo tiene que añadir 4 a 18, Prof. 1 no valida la respuesta de Paulo y anima a Marcelo a explicar cómo está pensando.

Paulo: *18, ¡aumentas 4!* [167]
Prof. 1: *No, espérate [dirigiéndose a Paulo]! Marcelo, está bien. Habla de nuevo. 18...* [168]
Marcelo: *18... Va a dar 34* [equivocado]. *A continuación quitas 2 y va a dar 32* [equivocado]. [169]
Prof. 1: *Habla de nuevo Marcelo. [Marcelo hace una carita de "¡como así no me entienden!"]* ¿Cómo? [170]
Marcelo: *18* [más seis] *va a dar 24. Quitas 2, ¡va a dar 22! ¡4 más que el anterior!* [171]

Prof. 1 pide a los alumnos comprobar si el resultado es en realidad 22 y, a continuación, valida el razonamiento de Marcelo.

Prof. 1: *¡Genial! [Dirigiéndose a Marcelo]* [175].

No obstante, la profesora no aprovecha el momento para encaminar a los estudiantes al desarrollo de una expresión que pueda describir el patrón encontrado.

Faceta interaccional: Prácticas ↔ Faceta cognitiva

Teniendo en cuenta la tarea propuesta, los alumnos demostraron tener el conocimiento necesario, en la medida en que han logrado mediante la interacción con sus compañeros y las profesoras, progresar en la resolución de la tarea llegando a la generalización, lo que difícilmente habrían hecho solos. Como parte fundamental de los análisis involucrados en esta sección, se encuentra la identificación de las *configuraciones cognitivas de objetos matemáticos primarios* (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) movilizados por los alumnos. Esta configuración cognitiva dará cuenta de los significados finalmente logrados por los estudiantes (sección 5.2.2). Para conseguir esto primeramente nos centramos en el estudio del acoplamiento que se va dando, a lo largo de la trayectoria didáctica, entre los significados pretendidos e implementados por las profesoras (ver sección 4) y los significados que van logrando gradualmente los estudiantes (configuraciones cognitivas "parciales").

Al comparar los conocimientos pretendidos que se movilizaron con la configuración epistémica implementada (sección 4), fue constatado que el grupo alcanzó los objetivos propuestos, desarrollando la tarea hasta al final. Todos los integrantes del grupo evidenciaron comprensión de la situación propuesta y permanecieron motivados durante toda la actividad. Hay que destacar la manera en que las profesoras interactuaron con los estudiantes, buscando, siempre que fue posible, incentivar su participación intentando mostrarles que eran capaces de desarrollar la actividad, ya que los estudiantes presentaban dificultades en matemáticas y esto se reflejaba en su autoestima. La interacción asertiva y afectiva por parte de las profesoras, a lo largo de todo el trabajo tanto de las actividades anteriores como en esta, hizo que el grupo adquiriera, gradualmente, cada vez más confianza en sus habilidades para enfrentar los problemas y perseverancia ante las dificultades.

Acoplamiento entre la faceta epistémica –configuración epistémica implementada– y la faceta cognitiva –significados que van logrando los estudiantes–

El episodio que a continuación se presenta, ejemplifica uno de los momentos en que las profesoras sintieron la necesidad de apremiar más la interacción con los estudiantes con el objetivo de profundizar en los significados que éstos iban logrando. En este evento, referente al apartado *c* de la tarea, los alumnos han registrado “42 - 2 ÷ 4”, que fue el significado que lograron, y la profesora intenta hacerlos comprender que no está listo ya que necesitan todavía indicar al lector qué operación hacer primero. A través de la interacción, la maestra trata de “imponer” los significados institucionales haciendo “surgir” la necesidad de los paréntesis.

Vanderlei registra la expresión $42 - 2 \div 4$, dictada por Marcelo y Paulo (figura 6), y la Prof. 2 conduce el grupo a la necesidad de utilizar paréntesis (figura 7) argumentando que, si alguien intentase resolver la expresión, debería ser capaz de alcanzar el mismo resultado encontrado por el grupo.

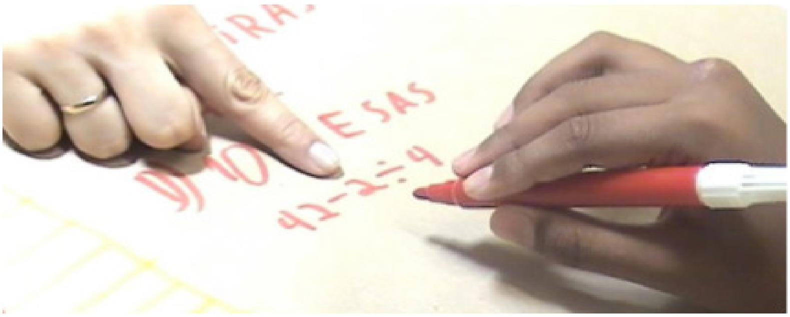


Figura 6. Registro de la sub-tarea *c* (parte 1)

Prof. 2: *Vamos a volver aquí, la expresión, rápidamente. Si la profesora [refiriéndose a Prof. 1] pasa aquí y mira, ¿ella va a llegar al mismo resultado que ustedes?* [329]
Paulo: *Va a llegar.* [330]
Prof. 2: ¿Va a llegar? [331]
Vanderlei: ¡*Espera!* [332]
Prof. 2: *En una expresión, ¿qué debo hacer primero?* [333]
Marcelo: *La división.* [334]
Prof. 2: *Entonces, lo primero que ella haría [refiriéndose a Prof. 1 y a la expresión de la figura 6] aquí seria la división. Entonces, ¿qué tengo que poner aquí?* [335]
Valter: (inaudible) [337]

Prof. 2: *Ustedes están diciendo que [en la expresión de la figura 6] esta cuenta se hace primero, ¿verdad? [señalando a la división en la expresión]* [338]
Vanderlei: *Es el número de sillas, menos el número de sillas en la punta dividido por...* [339]
Prof. 2: *No, gente...* cálmense. [Sonríe] Retrocedamos. La expresión es casi cierta. Ustedes me dijeron que tengo que resolver aquí [señalando la sustracción en la expresión] *primero, ¿no? ¿Qué elementos debo utilizar en la expresión para resolver aquí primero?* [340]
Marcelo: *Los paréntesis.* [341]
Prof. 2: Ahh, ¿así que esto tiene que ir [la operación 42−2] entre que? [342]
Todos: *Paréntesis.* [343]
Prof. 2: ¡Muy bien! [344]

Figura 7. Registro de la sub-tarea ***c*** (parte II)

Configuración cognitiva final

A continuación, se destacan los significados que lograron los estudiantes al final de la trayectoria didáctica, a partir del soporte que recibieron de las profesoras. Para ello describimos los objetos matemáticos primarios que se movilizaron en las diversas prácticas, operativas y discursivas, que desarrollaron a lo largo de la trayectoria didáctica. Así, en las prácticas matemáticas llevadas a cabo por los estudiantes, podemos destacar los siguientes tipos de objetos matemáticos primarios:

1. Los *elementos lingüísticos* incluyen interpretaciones de representaciones icónicas: la disposición de las mesas y sillas. Los elementos lingüísticos también incluyen gestos, expresiones verbales, representaciones simbólicas (x para describir la variable independiente, símbolos para la suma, sustracción, multiplicación y división, y símbolos indicativos de expresiones y ecuaciones tales como paréntesis y el signo de igualdad) y representaciones gráfico simbólicas (figuras 8):

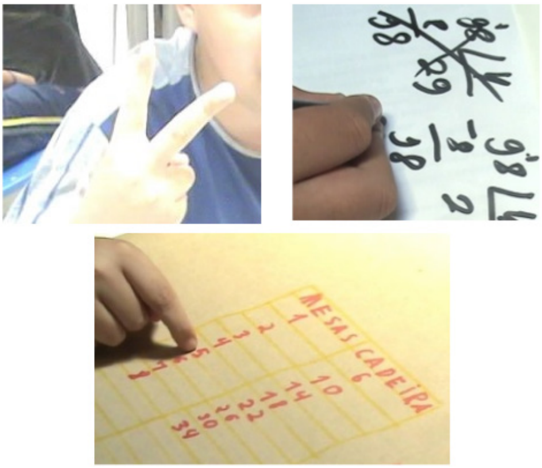


Figura 8. Ejemplos de elementos lingüísticos gestuales y gráfico-simbólicos

2. Entre los *conceptos/definiciones* podemos encontrar las nociones de secuencia matemática, patrones y relación entre magnitudes.
3. Las *proposiciones* evidenciadas, que a su vez son soluciones para los apartados de la tarea, fueron las siguientes: **P1** (ítem a), "El número de sillas es 4 veces el número de mesas más 2"; **P2** (ítem b), "62"; **P3** (ítem c), "10"; **P4** (ítem d), "No"; **P5** (ítem e), "Para descubrir el término siguiente de la sucesión se debe sumar 6 (al término anterior) y sustraer 2"; y **P6** (ítem f), "(x + 4)+2". También fueron identificadas las siguientes *propiedades*: **P7** "Las operaciones en una expresión tienen un cierto orden para ser resueltas (jerarquía de las operaciones básicas)"; **P8** "Utiliza paréntesis si es necesario resolver la expresión en un orden distinto del establecido por la propiedad anterior".

4. Como *procedimientos* podemos destacar el reconocimiento de regularidades, el conteo (de las sillas cuando el número de mesas era pequeño), la generalización (la cual también es un proceso) y la construcción de una expresión matemática para representar el enésimo término y/o para expresar la regularidad encontrada.
5. Los *argumentos* evidenciados, fueron los siguientes: **(A1)** Comprobación empírica a partir del recuento y la construcción de una tabla; Para el ítem a de la tarea, es utilizado como *argumento* la comprobación empírica a partir del recuento y la construcción de una tabla; **(A2)** Para obtener el número de sillas para 15 mesas (ítem b), multiplicamos 15 por 4 y añadimos 2; **(A3)** Para obtener el número de mesas debemos hacer lo contrario [se refiere a P1], lo contrario de la suma es la sustracción y lo contrario de la multiplicación es la división, entonces tenemos que calcular el número de sillas menos 2 dividido por 4 (ítem c). La solución se obtiene mediante la simplificación de la expresión $(42 - 2) \div 4$; **(A4)** (ítem d) Resolución de la ecuación $4x + 2 = 100$. Puesto que $x = 24.5$, entonces no es posible; **(A5)** (ítem e) Cada nueva mesa que añadimos “viene” con 6 sillas. Sólo necesitamos quitar 2 que perdemos en las uniones; **(A6)** (ítem f) Utilizando “*x*” para representar el número de mesas podemos escribir “$x \cdot 4$”. Como también es necesario tener en cuenta las sillas de las cabeceras, añadimos “+2”. El número de sillas, entonces, está dado por $x \cdot 4 + 2$.

Durante las actividades, varios *procesos* matemáticos fueron “puestos en juego”, como los definidos por Font, Planas y Godino (2010). En general, el análisis del episodio ha evidenciado una serie de procesos entre los cuales podemos destacar el de *problematización*, cuyo objetivo fue que a partir de procesos de *particularización* se lograra uno de *generalización*. Las profesoras y estudiantes movilizaron procesos de valoración, suportados por normas y metanormas (Assis, Godino y Frade, 2012) y procesos de *significación*.

Faceta interaccional: Normas y metanormas

Debemos destacar la importancia del papel de las profesoras, en el sentido de gestionar las normas, para garantizar la optimización del aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, en esta tarea, los alumnos, principalmente Paulo, insisten en hacer el procedimiento del recuento a pesar de la persistencia de la profesora para que intenten generalizar. Esto ocurre porque los alumnos están movilizados por la norma metaepistémica *el procedimiento de conteo es un proceso que tiene más éxito*. Fue necesario que las profesoras se esforzaran para convencer a los alumnos de la necesidad e importancia del procedimiento y proceso de generalización, proceso sin el cual los estudiantes se quedarían satisfechos con los resultados obtenidos, sin dar solución a todos los ítems de la actividad propuesta.

CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo hemos presentado el análisis de un episodio didáctico el cual consistió en la implementación de una actividad exploratorio-investigativa sobre patrones. Para ello, y basándonos en las ideas fundamentales del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), hemos resaltado la *faceta interaccional*, como eje central para el análisis de un proceso de instrucción, pues es a partir de dicha faceta que se puede explorar, analizar y describir la gestión de los aprendizajes en el aula mediante la descripción de las prácticas didáctico-matemáticas que llevan a cabo el profesor y los estudiantes en torno a la resolución de una tarea.

En la primera parte de nuestro estudio hemos caracterizado la configuración epistémica que emerge de la actividad de planeación por parte de las profesoras, lo cual en el EOS se conoce como significados pretendidos. Estos significados pretendidos, forman una parte de los significados de referencia que tendrá el profesor al momento de la implementación, que da paso a la exploración de los significados efectivamente implementados, y que serán relevantes en el estudio del acoplamiento de los significados implementados respecto de los significados pretendidos.

En un primer momento podríamos considerar que, en caso de haber un acoplamiento 'perfecto' entre las configuraciones epistémicas y las configuraciones cognitivas, estaríamos delante de un proceso de enseñanza 'ideal'. Lo que ocurre, no obstante, es que el aprendizaje es situado y, siendo así, no puede ser del todo determinado el momento en que se da dicho aprendizaje. En general, los significados pretendidos no pueden ser implementados –o replicados de otra práctica– siguiendo de forma 'rígida' un planeamiento previo. En otras palabras, el profesor necesita establecer inicialmente las posibles soluciones de las situaciones-problemas que propone a sus alumnos, identificando posibles objetos matemáticos, sus significados y procesos que pudieran emerger durante la implementación de la actividad (i.e., configuraciones epistémicas). No obstante, es fundamental que interprete dichas configuraciones epistémicas, esencialmente como *referencia* para que no se corra el riesgo de –frente a un posible *no acoplamiento* entre los significados pretendidos inicialmente y los significados que van logrando los estudiantes– dejar de reconocer los significados producidos por los estudiantes, 'impidiendo' o no favoreciendo la emergencia de otros significados.

Este hecho nos lleva a destacar la complejidad del trabajo del profesor, quien debe tener un amplio conocimiento de las configuraciones epistémicas de referencia, de las plausibles configuraciones cognitivas de los estudiantes en relación a los contenidos matemáticos pretendidos, ser capaz de identificar en los momentos críticos los conflictos semióticos y tomar decisiones sobre el tipo de actuación que debe adoptar momento a momento a lo largo del proceso de estudio.

RECONOCIMIENTO

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores: R02/15 y R04/15 (Universidad de Los Lagos), EDU2012-32644 (Universidad de Barcelona) y EDU2012-31869 (Universidad de Granada).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Assis, A., Godino, J. D. y Frade, C. (2012). As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 171-198.

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V. y Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(3), 207-225.

Coll, C. y Sanchez, E. (2008). Presentación. El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. *Revista de Educación*, 346, 15-32.

Contreras, A., García, M., y Font, V. (2012) Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *Bolema*, 26(42B), 667-690.

Fernándes, F. L. P. (2010). Letramento algébrico em um contexto de aulas exploratório-investigativas. In: *XIV EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática*, Campo Grande. Educação Matemática: Diversidades e Particularidades no Cenário Nacional.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Franke, M. L., Kazemi, E. y Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. En F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-256). Charlotte, NC: NCTM y IAP.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME).* Recife, Brasil.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in Mathematics Education. *The International Journal on Mathematics Education. ZDM,* 39(1-2), 127-135.

Hmelo-Silver, C. Y., Duncan, R. G. y Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: a response to Kirschner, Sweller and Clark. *Educational Psychologist*, 42(2), 99-107.

Planas, N. y Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para el análisis de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 12(2), 179-213.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de Matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(3), 361-394.

Ponte, J. P., Fonseca, H. y Brunheira, L. (1999). As atividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat99 (APM),* 91-101.

Robles, M. G., Del Castillo, A. G. y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción de la derivada. *Educación Matemática*, 24(1), 5-41.

DATOS DE LOS AUTORES

Luis R. Pino-Fan
Departamento de Ciencias Exactas
Universidad de Los Lagos, Chile
luis.pino@ulagos.cl

Adriana Assis
Direção de Educação a Distância
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Brasil
adriana.assis@ufvjm.edu.br

Juan D. Godino
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada, España
jgodino@ugr.es

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Una aproximación al sistema de creencias matemáticas en futuros maestros[1]

An overview of the mathematical beliefs system of pre-service teachers

Santiago Hidalgo Alonso,[2] Ana Maroto Sáez y Andrés Palacios Picos

Resumen: El estudio de los factores afectivos ha dado respuesta a incógnitas presentes en algunos procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En este trabajo nos proponemos estudiar uno de los componentes del dominio afectivo: las creencias matemáticas; en particular, nos interesa realizar una categorización del sistema de creencias matemáticas de los futuros maestros y conocer las asociaciones verbales que realizan sobre las matemáticas.

A una muestra de más de mil estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria de diez centros universitarios públicos de España, se les aplicó una escala tipo Likert sobre creencias matemáticas. El análisis estadístico nos indica que las asociaciones que los futuros docentes realizan sobre las matemáticas se sitúan en lo cognitivo y metacognitivo (estrategias de conocimiento). Sin embargo, en lo relativo a sus vivencias con las matemáticas, manifiestan un fuerte componente afectivo, mayoritariamente negativo, respecto *al autoconcepto, al gusto y a las atribuciones de causalidad* y una valoración positiva de su conexión social: *utilidad y necesidad*.

Palabras clave: maestros, dominio afectivo, sistema de creencias matemáticas, rendimiento académico, análisis estadístico.

Abstract: The study of affective factors has responded to uncertainties present in some processes of teaching and learning mathematics. In this paper we propose to study one of the

Fecha de recepción: 6 de junio de 2014; fecha de aceptación: 7 de febrero de 2015.

[1] Agradecimientos y financiación: Proyecto I+D+i EDU2009-12063.

[2] Nota de los autores: Santiago Hidalgo Alonso falleció el 11 de diciembre de 2013. Con su prematura e inesperada muerte se quedaron zanjados numerosos proyectos e inquietudes que tenía dada su responsabilidad como docente investigador implicado en la mejora de la calidad de la enseñanza de la formación inicial de maestros. El trabajo que dio pie a este artículo se inició con su participación, por ello quisimos reconocer su aportación manteniendo su nombre entre los autores.

components of the affective domain: mathematical beliefs; in particular, we are interested in making a categorization system of mathematical beliefs of future teachers and knowing the verbal associations engaged on mathematics.

In a sample of more than a thousand students of the Degree of Master of Primary Education of ten public universities in Spain, we applied a Likert scale of mathematical beliefs. Statistical analysis indicates that the associations that future teachers do about maths are at the cognitive and metacognitive (knowledge strategies). However, regarding their experiences with mathematics, the students show a strong, mostly negative, with respect to the self-concept, the tasting to mathematics, the affective component and the causal attributions and the positive assessment of their social connection: usefulness and necessity.

Keywords: pre-service teachers, affective domain, mathematical beliefs system, academic performance, statistic analysis.

INTRODUCCIÓN

Desde hace ya algunas décadas, el paradigma de la psicología cognitiva viene trabajando sobre la tesis de que el funcionamiento cognitivo de las personas y su sistema afectivo y motivacional guardan una estrecha relación de mutua interacción e influencia, abandonándose, por tanto, las concepciones anteriores en las que los aspectos cognitivos se consideraban separados de los emocionales (p.e.: la teoría de la autoeficacia de Bandura (1986), y la teoría de las atribuciones de Weiner (1974)).

En una de sus obras más conocidas dedicada a la inteligencia emocional, Goleman asegura que todos tenemos dos mentes, una para pensar y otra para sentir, y que estas dos formas fundamentales de conocimiento interactúan para construir nuestra vida mental (Goleman, 1997, pp.29). En esta misma línea de pensamiento, Gardner comenta: "si queremos que los estudiantes lleguen a aprender, dominar y aplicar algo con criterio, debemos procurar envolver ese algo en un contexto que haga intervenir las emociones" (Gardner, 2000, pp. 89).

El sistema educativo ha dedicado sus esfuerzos de forma más exhaustiva al desarrollo de la mente racional, del conocimiento lógico y reflexivo. No obstante, en los últimos años asistimos a un incremento de investigaciones en lo que se ha dado en llamar *dominio afectivo matemático*. Ha sido difícil encontrar una definición mayoritariamente aceptada de *afecto* o *dominio afectivo*. En nuestro caso, en sintonía con McLeod (1992), lo entendemos como un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo), que son generalmente considerados algo diferentes de la pura cognición y abarca emociones, creencias y actitudes hacia la matemática.

Pensamos que el análisis de estos factores afectivos es especialmente relevante en los estudiantes de magisterio, por cuanto van a ser los docentes del mañana. Su papel en el futuro no se va a limitar a reproducir de forma aséptica las líneas que emanen de los decretos correspondientes, ni siquiera aunque lo intenten, pues sus actitudes, sus creencias, sus teorías ingenuas sobre qué son y cómo se enseñan las matemáticas van a estar presentes en todo momento (Mason, L. y Scrivani, L., 2004; Op't Eynde, P., De Corte, E. y Verschaffel, L., 2006; Hodgen, J.y Askew, M., 2007; Barrantes y Blanco 2004; Ernest, 2000; Blanco, 1998; Flores, 1998). Esta constelación de creencias, actitudes, miedos y demás emociones relacionadas con las matemáticas se van adquiriendo desde muy temprano, posteriormente se estabilizan y se hacen resistentes a los cambios condicionando el uso que se hará de ellas en el futuro como docentes o como ciudadanos (Gómez-Chacón, 2000). Las referencias que los futuros maestros tienen en cuanto fueron alumnos en la disciplina de matemáticas aparecen casi siempre con fuerte influencia (generalmente negativa) en el proceso de aprender a enseñar (Ernest, 2000; Barrantes y Blanco, 2004). Recientemente, Sakiz, Pape & Hoy (2012) han encontrado que un elemento importante para el devenir escolar del estudiante de matemáticas es el modo en el que los profesores les apoyan emocional y afectivamente. Este apoyo del profesor determina la percepción de eficacia matemática del estudiante y el gusto por las matemáticas, elemento –este último– que actuaría como motor de esfuerzo e, indirectamente, de rendimiento escolar.

En este artículo queremos centrarnos en las creencias matemáticas de los futuros docentes y proponer *una categorización del sistema de creencias de los futuros maestros* que nos permita conocer sus concepciones sobre la propia matemática y el papel del profesor.

ANTECEDENTES

Las creencias matemáticas se considera que forman parte del conocimiento perteneciente al dominio cognitivo y están compuestas por elementos afectivos, evaluativos y sociales, con una fuerte estabilidad. Dicho conocimiento se refiere a las matemáticas y a su enseñanza y aprendizaje, y está basado en la experiencia. Las creencias pueden mantenerse con distintos grados de convicción y no son consensuales. A diferencia del conocimiento, la creencia tiene la connotación de la disputabilidad (cada uno puede tener una creencia); mientras que el conocimiento debe satisfacer una condición de verdad, la creencia es independiente de su validez.

El estudiante, al aprender matemáticas, recibe continuos estímulos asociados con las matemáticas que le generan tensiones. Su reacción emocional ante tales estímulos es positiva o negativa. Además, tales reacciones están condicionadas por sus creencias respecto a su propia persona y a las matemáticas, y producen ciertas actitudes y emociones que influyen en sus creencias y formación (Gómez-Chacón, 2000).

Entendemos que una creencia nunca se sostiene con independencia de otras, por ello se suele hablar de *sistemas de creencias*. Un sistema de creencias no consiste en una suma o yuxtaposición de las mismas, sino en una red organizada. El importante papel que juega un sistema de creencias puede ser valorado a partir de las consideraciones de Schoenfeld (1992), que describe cuatro categorías de conocimiento y comportamiento involucrados en la actividad matemática: los *recursos*, las *heurísticas*, los *aspectos metacognitivos y los sistemas de creencias*. Estos últimos son una particular visión de la matemática, la perspectiva con la cual cada persona se aproxima a ella, y pueden determinar la manera en que se enfrenta a un problema, los procedimientos que serán usados o evitados, el tiempo y la intensidad del trabajo que se realizará, etcétera. En síntesis, las creencias establecen el contexto en el cual los recursos matemáticos y metacognitivos y las heurísticas operarán.

En este sentido, Schoenfeld (1983, 1985) afirma que la cognición de las personas está modelada por su sistema de creencias que establece el contexto psicológico dentro del cual estas son evaluadas. Por tanto, desempeñan un papel importante en la ejecución cognitiva y, aunque no constituyen necesariamente determinantes conscientes de la conducta, tienen que ver con los conocimientos, creencias y valores sobre uno mismo, las matemáticas, el entorno y la tarea.

No nacemos con nuestras creencias, sino que estas son el resultado de un largo proceso evolutivo en el que el autoconcepto, la confianza en uno mismo y la autoeficacia percibida juegan un papel fundamental. Ahora bien, el sistema de creencias puede ser modificado. Consideramos que las creencias de tipo negativo para el alumno (y el profesor) son susceptibles de cambiarse positivamente y, en este sentido, se investiga con el objetivo de implementar algunos instrumentos pedagógicos que puedan servir para abrir nuevas puertas.

Nos encontramos con un buen número de trabajos relativos a las creencias matemáticas de estudiantes en enseñanza obligatoria, entre otras, Corica y Otero

(2007); **Gómez-Chacón,** Op 't Eynde y De Corte (2006); Gómez-Chacón (2005); Warfield, Wood y Lehman (2005); Gill, AShton y Algina (2004); Chen y Zimmerman (2007); House (2007); Barrantes (2008). Sin embargo, existen menos estudios respecto a las creencias matemáticas de los futuros docentes. Este será el objeto de nuestro estudio.

Llinares y Sánchez (1990), y Sánchez (2000) realizan estudios sobre las creencias matemáticas de los futuros docentes; sus conclusiones ratifican las afirmaciones mencionadas de Schoenfeld (1983, 1985) y detectan una diversidad de perfiles profesionales y de visiones sobre las matemáticas y su aprendizaje.

Azcárate (1998) asegura que los futuros docentes no llegan con sus mentes vacías respecto a cómo se enseña y cómo se aprende la matemática. En su recorrido como estudiantes de niveles inferiores, los futuros profesores han acumulado una experiencia que les permite hacerse hipótesis y esquemas sobre el que hacer profesional del docente. Además, asegura Azcárate que estas hipótesis suponen un obstáculo en los procesos de formación que intenta superar los parámetros tradicionales de la Educación Matemática. En esta línea, Blanco y Barrantes (2003) confirman que la experiencia acumulada como escolares no sólo forma parte de sus creencias sino que repercutirá en cómo actuarán durante su actividad profesional docente. En particular, sus recuerdos como estudiantes, junto a las propuestas teórico-metodológicas de la educación matemática recibidas en su formación universitaria, conforman un conjunto de creencias que no son sólo coherentes entre sí, sino que lo son con el entorno escolar (Parra, 2005).

Los futuros profesores conceptualizan las matemáticas como un conjunto de reglas asociadas lógicamente, dando un enfoque formalista que se sustenta en la idea de concebir las matemáticas como un sistema formal, consistente y sin contradicciones (Parra, 2005, Gascón 2001). Gámez, Moreno y Gil (2003) destacan la importancia que dan los futuros profesores al estudio de las matemáticas, ya que es una herramienta útil para resolver problemas y para aplicar, en general, a sus vidas cotidianas (Parra, 2005). En su idea de aprendizaje consideran planteamientos constructivistas, entendiendo que la mejor forma de aprender matemáticas es construyéndolas. Además, manifiestan la necesidad de tener una formación didáctica prolongada a lo largo de su vida profesional; toman conciencia de la importancia de la cualificación profesional y de la influencia que esta tiene en el diseño y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. También es generalizada la importancia que dan a la colaboración con otros compañeros, la eliminación de actividades rutinarias, así como la valoración del esfuerzo del alumno.

En cuanto a los modelos de enseñanza, las planificaciones que hacen los futuros maestros suelen estar centradas en tópicos numéricos, orientadas a la transmisión de habilidades por repetición (Parra, 2005, Gascón, 2001).

Un campo de estudio especialmente relevante ha sido las investigaciones que han relacionado los cambios en *las creencias matemáticas* con modificaciones en las actitudes hacia las matemáticas producto de la realización de cursos de formación. Un resultado común en estas investigaciones ha sido la correlación positiva entre la mejora de las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y los cambios hacia actitudes más positivas tras la realización de cursos de formación en los que se han utilizado estrategias de aprendizaje creativas y diversas (Dogan, 2012; Lutovac & Kaasila, 2011; Kargara, Tarmiziab, & Bayat, 2010; Charalambous, Panaoura & Philippou, 2009; Schackow, 2005). Así, por ejemplo, An, Ma & Caparro (2011) obtienen cambios positivos en las actitudes hacia las matemáticas y una mejora clara en las creencias sobre su naturaleza y sobre su enseñanza y aprendizaje a partir de una experiencia de integración de música y matemáticas. Charalambos, Panaoura & Philippou (2009) comprueban que mediante el estudio de la historia de las matemáticas se pueden cambiar las actitudes hacia esta disciplina y las creencias de los futuros maestros. Schackow (2005) encuentra, también, diferencias significativas en las actitudes de futuros docentes de matemáticas antes y después de realizar un curso basado en las teorías constructivistas; los mayores cambios se encuentran en la percepción de utilidad matemática, el gusto por su estudio, la motivación y la autoconfianza. Estos resultados van en la misma línea que los obtenidos por Harkness, D'Ambrosio & Morrone (2007), quienes demuestran los efectos positivos sobre la motivación tras la realización de un curso semestral de matemáticas de tipo constructivista-social en estudiantes para maestros de primaria.

Las creencias del estudiante se categorizan en términos del objeto de la creencia: creencias acerca de la matemática (el objeto); acerca de uno mismo; acerca de la enseñanza de la matemática y acerca del contexto en el cual la educación matemática acontece (contexto social) (McLeod, 1992). Destacamos dos categorías que parecen tener influencia en los estudiantes de matemáticas: las *creencias acerca de las matemáticas* entendida como disciplina que los estudiantes deben cursar (involucran poco componente afectivo, aunque son una parte fundamental del contexto en el que se desarrolla el afecto) y las *creencias del estudiante* (y profesor) acerca de sí mismo y su relación con las matemáticas; tiene un fuerte componente afectivo y está muy relacionado con las creencias relativas a la confianza, al autoconcepto y a las atribuciones de causalidad del éxito o fracaso escolar.

McLeod (1992) y Op't Eynde, De Corte & Verschaffel (2002) han distinguido tres tipos de creencias del estudiante: 1) creencias sobre sí mismo en lo referente a aprender y resolver problemas matemáticos (se refieren a lo que en la investigación en motivación se denomina creencias de motivación Pintrich y Schrauben, 1992); 2) creencias sobre el contexto social (por ejemplo, la clase), y 3) creencias sobre matemáticas y sobre el aprendizaje de la matemática.

En los trabajos de De Corte, Op't Eynde & Verschaffel (2002) se presenta un marco unificador para las investigaciones en creencias de los estudiantes. Estos autores señalan, como elementos constitutivos para el análisis de la naturaleza y la estructura del sistema de creencias, el contexto social, el yo (*self*) y el objeto (las matemáticas).

En este contexto, proponemos una categorización del sistema de creencias de los futuros maestros sobre la base de las respuestas a dos preguntas del tipo asociación de ideas: ¿con qué asocias la palabra matemáticas?, ¿qué son para ti las matemáticas?, las cuales forman parte de una escala que mide la afectividad matemática. Esta categorización nos permitirá analizar sus concepciones respecto de la matemática (el objeto) y de su papel como profesores de matemáticas (el yo). Adicionalmente, avanzamos un estudio que requerirá trabajos posteriores de la relación entre el rendimiento matemático y el sistema de creencias matemáticas del futuro maestro.

OBJETIVOS

Concretamente, nuestros objetivos son:

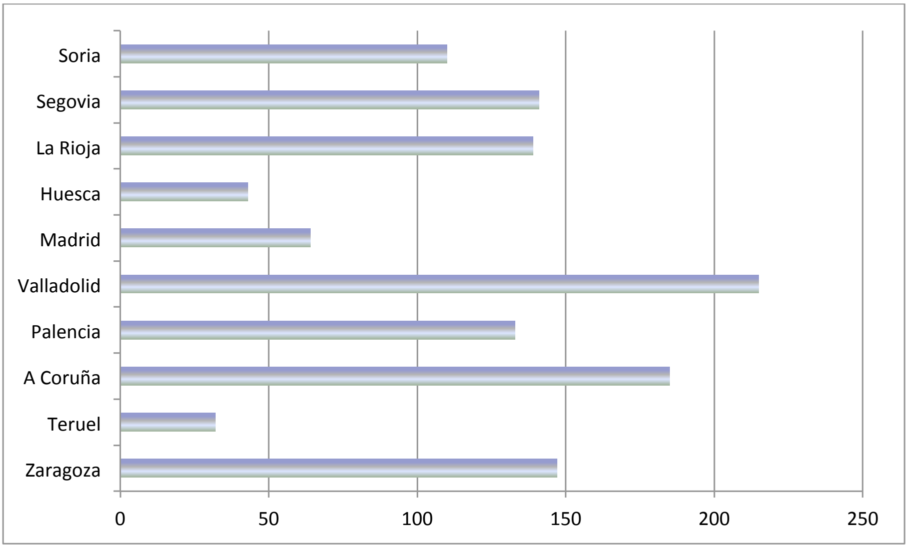
- Categorizar el sistema de creencias matemáticas del futuro maestro.
- Analizar e identificar las posibles concepciones del futuro maestro sobre la matemática y su enseñanza.

METODOLOGÍA

Muestra

El análisis de datos se realizó con base en una muestra de 1209 alumnos y alumnas, estudiantes de Grado en Educación Primaria pertenecientes a 10 centros universitarios públicos españoles. (Figura 1).

Figura 1. Distribución de la muestra por centros universitarios



Fuente: Elaboración propia

Los datos fueron obtenidos durante los cursos escolares 2009-2010, 2010-2011 y 2011-2012. 54% de los participantes cursaban el primer curso; 32% el segundo y 14% restante el tercer curso de Grado en Educación Primaria. La nota media en matemáticas de este alumnado presenta un valor de 6.36 (en una escala de 0 a 10).

Los muestreos probabilísticos suelen ser inviables si el número de sujetos participantes es elevado debido al costo que pueden suponer. Por esta razón, en nuestro caso el proceso metodológico seguido para la selección de la muestra ha sido un muestreo no probabilístico por conveniencia (o incidental). Los sujetos que han participado en el estudio han sido seleccionados por su accesibilidad y adecuación al estudio. En concreto, la selección de los participantes se realizó por accesibilidad a los centros universitarios de los investigadores-profesores participantes en el Proyecto I+D+i EDU 2009-12063. Podemos afirmar que las características de los centros participantes en este estudio se asemejan a la población de referencia.

Instrumentos

A pesar de existir instrumentos de medida del dominio afectivo matemático (Fennema & Sherman, 1976; Auzmendi, 1992; Tapia & Marsh, 2004; Muñoz & Mato, 2008; Alemany & Lara, 2010), el equipo investigador consideró elaborar instrumentos propios que se ajustaran al contexto en el que se enmarca el proyecto de investigación del que forma parte este artículo.

Uno de los instrumentos elaborados en dicho proyecto fue la Escala Afectivo Emocional Matemática (EAEM). En ella se consideran cinco dimensiones específicas de los distintos factores que constituye el dominio afectivo matemático, y el objetivo es medir el dominio afectivo matemático en estas cinco dimensiones: gusto, ansiedad, autoconcepto, utilidad y dificultad. La escala consta de 40 ítems con cinco opciones de respuesta (desacuerdo total, en desacuerdo, de acuerdo, bastante de acuerdo y acuerdo total). Además, consta de un ítem cerrado con el que se pregunta a los estudiantes sobre la percepción de su rendimiento en matemáticas teniendo seis opciones para responder, que van desde muy malo hasta muy bueno. Se completa dicha escala con una entrevista semi-estructurada mediante dos preguntas abiertas relacionadas con las asociaciones verbales que los entrevistados hacen ante la palabra matemáticas, así como lo que representa para ellos dicha materia. Precisamente, las respuestas obtenidas en estas dos preguntas son las que se analizan en este trabajo (Tabla 1).

Tabla 1. Preguntas bases del análisis de datos

Número de la pregunta	Enunciado
Núm 40	*Con qué asocias la palabra "matemáticas"*
Núm 41	*Qué son las matemáticas para ti*

Fuente: Elaboración propia

Esta Escala Afectivo-Emocional hacia las Matemáticas (EAEM) ha sido utilizada en investigaciones anteriores con los correspondientes análisis de fiabilidad y validez (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2005).

Procedimiento

La administración de los cuestionarios se realizó por parte del equipo de investigación y de profesores colaboradores durante las primeras semanas de los cursos académicos citados. Los cuestionarios tenían un carácter anónimo (para los estudiantes) y fueron auto-cumplimentados por los sujetos de la muestra.

Análisis de la información

Los datos obtenidos fueron analizados mediante el paquete estadístico SPSS 18.0. Con el objeto de poder interpretar el sentido de los datos, se han calculado las frecuencias relativas de cada una de las posibles respuestas. No obstante, atendiendo a la necesidad de síntesis del presente trabajo, estas frecuencias no serán presentadas ni analizadas.

RESULTADOS

Teniendo en cuenta los trabajos de McLeod (1992) y Op't Eynde, De Corte & Verschaffel (2002) y De Corte, Op't Eynde & Verschaffel (2002), anteriormente citados, proponemos una categorización de las respuestas de los futuros maestros a las dos preguntas abiertas que se plantean (Tabla 3). Clasificamos las respuestas a partir de las asociaciones que los entrevistados realizan ante la palabra "matemáticas" (el objeto) y ante lo que representa dicha materia para el alumnado (el yo), y las agrupamos en cuatro categorías: *Cognición matemática*, *Afectividad del alumno*, *Epistemología* y *Enseñanza*.

La cognición matemática hace referencia a los constructos matemáticos (números, operaciones, geometría, medida, probabilidad, estadística), y a las estrategias matemáticas de aprendizaje y resolución de problemas; por esta razón, esta categoría se subdivide en *Contenidos matemáticos* y *Metacognición*.

La afectividad del alumno se refiere a las asociaciones verbales de tipo afectivo-emocional que pudieran hacer los alumnos con el *gusto* por la matemática, la *utilidad* de las matemáticas, la *dificultad* de las matemáticas, el *autoconcepto* que tengan y la percepción de *ansiedad*. También se incluyen en esta categoría los resultados contradictorios obtenidos llamados *ambivalentes*.

La epistemología en el sentido de teoría del conocimiento. Diferenciamos las asociaciones verbales referidas en este sentido al objeto (la matemática como ciencia) a la que denominamos *Epistemología Matemática,* y las asociaciones verbales referidas al alumno, que denominamos *Aptitudes del alumno*.

La última categoría es la de enseñanza, en la que consideramos las asociaciones verbales que hacen los alumnos referidas a los métodos de enseñanza y que denominamos *Actitudes hacia el profesor.*

Además, tenemos en cuenta que las posibilidades de respuestas vienen expresadas en términos positivo, negativo, neutro y ambivalente (varias respuestas contradictorias y/o complementarias). En la Tabla 2 se muestran las distintas categorías y algunos ejemplos obtenidos en las dos preguntas abiertas planteadas en la escala.

Tabla 2. Categorías de clasificación con ejemplos de las dos preguntas propuestas en la escala

Categorías de clasificación		Ejemplos de respuestas de la pregunta ¿con qué asocias la palabra matemáticas?	Ejemplos de respuestas de la pregunta ¿qué son para ti las matemáticas?
COGNICIÓN MATEMÁTICA	1 Contenidos matemáticos	Números, formas (N) Bien con números, mal con áreas (ambivalente)	Números (N)
	2 Metacognición	Problemas (N) Problemas, nervios (-)	Operaciones, problemas matemáticos (N)
ALUMNO AFECTIVIDAD	3 Gusto	Diversión(+) Aburrimiento(-)	Una asignatura que me gusta(+)
	4 Utilidad	Asignatura necesaria(+) poco útil(-)	Asignatura necesaria para la vida(+)
	5 Dificultad	Fácil(+) Dificultad (-)	Asignatura complicada(-)
	6 Autoconcepto	Mi mejor asignatura(+) suspenso(-)	Algo que no entiendo, no se me da bien(-)
	7 Ansiedad	Reto(+) agobio, nervios(-)	Algo que me hace pasarlo mal(-)

Categorías de clasificación		Ejemplos de respuestas de la pregunta ¿con qué asocias la palabra matemáticas?	Ejemplos de respuestas de la pregunta ¿qué son para ti las matemáticas?
ALUMNO AFECTIVIDAD	8 Ambivalencia	Entretenimiento, dificultad, estrés	Difíciles aunque importantes
EPISTEMOLOGÍA	9 Epistemología matemática	Ciencias Tics	Ciencia que te enseña a ver el mundo, comprender el mundo
	10 Aptitudes del alumno	Ingenio, pensar, razonar, inteligencia	Desarrollar la mente de forma individual
ENSEÑANZA	11 Actitudes hacia el profesor	Malas explicaciones(-) Buenos	Me las explicaron mal y por eso no me gustan. No se imparten bien (-)

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados. Entre paréntesis el valor de la valencia

Resultados de la primera pregunta *¿con qué asocias la palabra matemáticas?*

En la Figura 2 se muestra el porcentaje de las valoraciones (positivo, neutro, negativo o ambivalente) en las categorías establecidas.

Como se observa, la asociación más frecuente que realizan los alumnos de Grado en Educación Primaria con la palabra matemáticas posee un valor claramente neutral, como queda representado en la Figura 2. Son respuestas que no manifiestan ningún tipo de emoción, respuestas asépticas; un ejemplo de estas son números, formas, problemas matemáticos, cuentas. Podemos comprobar, igualmente, el bajo porcentaje de valoraciones negativas (4%); a modo de ejemplo mencionamos algunas de las asociaciones: *aburrimiento, suspenso, incapacidad, inseguridad y dificultad.* El porcentaje de la valencia positiva también es bajo (11%),

Al analizar los resultados por grandes categorías, sin distinguir entre valencias, las frecuencias mayores confirman la tendencia de estos alumnos de asociar las matemáticas con aspectos relacionados con la metacognición y los contenidos matemáticos (Figura 3).

Figura 2. Porcentaje de las valoraciones asignados a las respuestas a la pregunta *¿Con qué asocias la palabra matemáticas?*

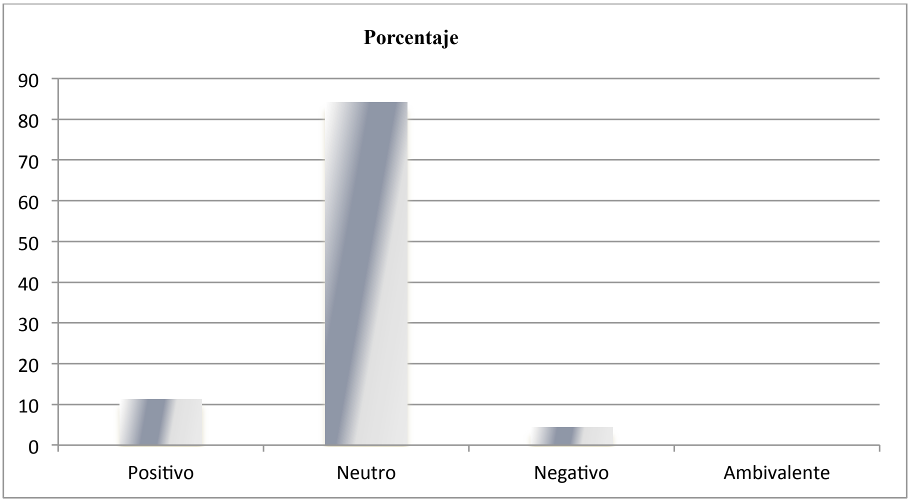
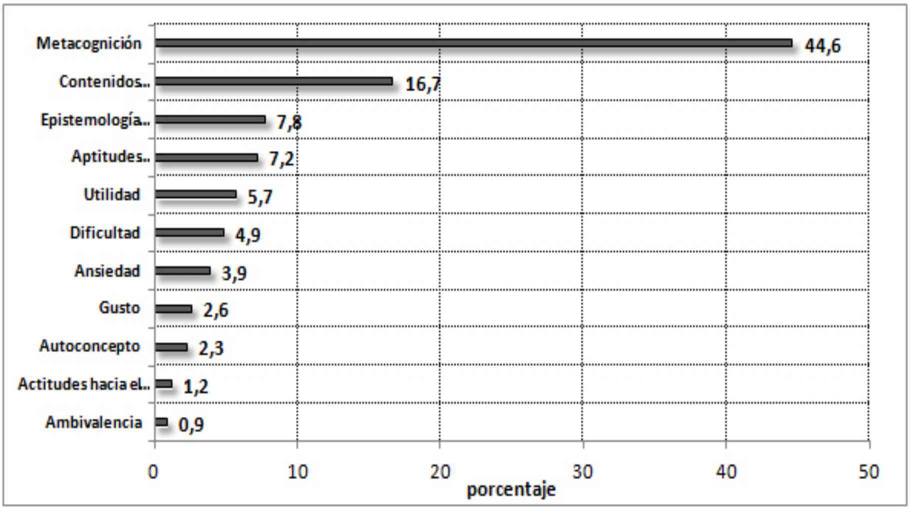


Figura 3. Frecuencia de etiquetado por categorías



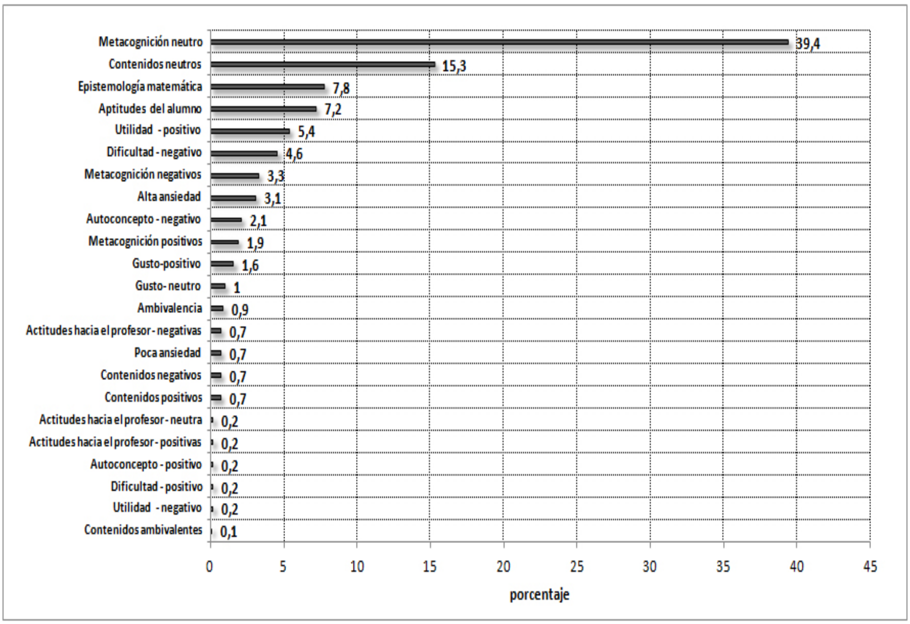
Fuente: Elaboración propia

Como se observa, casi la mitad de los estudiantes asocian las matemáticas con la categoría que hemos designado metacognición: con problemas y estrategias de resolución de problemas. Los contenidos matemáticos son otro de los aspectos con los que relacionan las matemáticas, principalmente los números y operaciones. Un peso menor son las asociaciones que hacen de las matemáticas con los aspectos afectivos como el gusto, la ansiedad, el autoconcepto y las actitudes hacia el profesor.

Analizamos a continuación los resultados obtenidos en la pregunta ¿con qué asocias la palabra matemáticas?, cruzando dos aspectos, categoría y valencia (Figura 4).

Como se observa a partir de los dos resultados mostrados anteriormente, obtenemos con mayor frecuencia la categoría de metacognición con valencia neutra: *resolución de problemas, operaciones, fórmulas y cálculo*, expresados de una manera aséptica, sin ningún tipo de calificación. La segunda categoría en orden

Figura 4. Porcentajes de las categorías de clasificación con la valencia obtenida en la pregunta *¿con qué asocias la palabra matemáticas?*



Fuente: Elaboración propia

de frecuencia se corresponde con los contenidos matemáticos también con valor neutro: principalmente *números*, *geometría*, *trigonometría*, *signos*, *lógica*, *figuras*, *polinomios*. En cierto sentido, podemos decir que la asociación verbal más repetida de los futuros maestros con la palabra matemáticas es número, operaciones y resolución de problemas, manifestados de una manera neutra.

Es difícil establecer fronteras claras entre algunas de las categorías utilizadas para la clasificación de las respuestas de los sujetos; situación que es especialmente patente en la que hemos denominado *epistemología matemática*, con muchos puntos en común con los aspectos analizados anteriormente. En esta categoría hemos englobado palabras tales como *ciencia exacta, lógica universal, naturaleza, orden, verdad* y, sobre todo, *razonamiento tanto inductivo como deductivo*. Este tipo de asociaciones está presente en 8 de cada 100 alumnos entrevistados y supone la tercera categoría por el número de respuestas.

Cercano igualmente a 8% están las respuestas relacionadas con las capacidades o aptitudes personales necesarias en las tareas matemáticas. Encuadramos dentro de este apartado aspectos tales como *discurrir, esfuerzo, estudio, agilidad mental, inteligencia, capacidad* y, sobre todo, *pensar*.

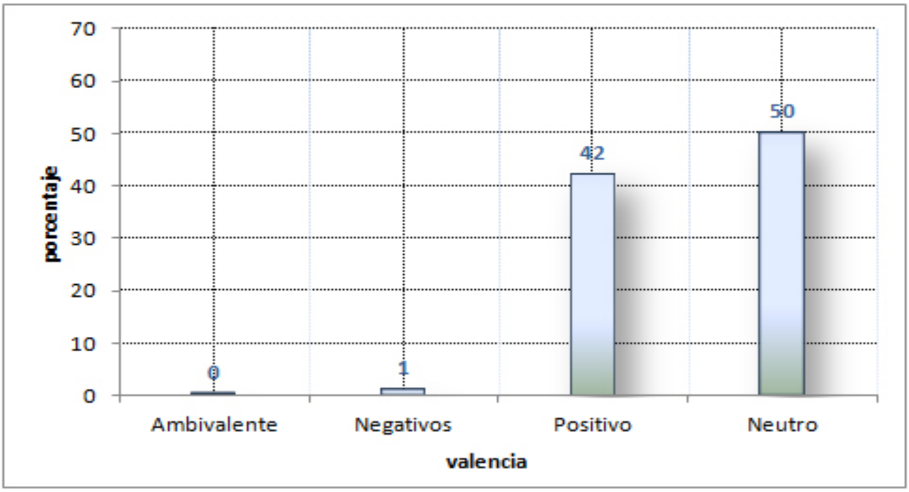
Reseñamos, así mismo, respuestas que asocian claramente las matemáticas con la *utilidad* (5.4%) y la *dificultad* (4.6%). Es interesante apuntar el porcentaje tan bajo que en estas asociaciones tienen aspectos relacionados con el profesor de matemáticas, tanto para bien (0.2%), como para mal (0.7%), en expresiones del tipo: *los profesores son muy importantes, malos profesores, intransigencia del profesor, malas estrategias didácticas, profesores aburridos*, etcétera, así como la escasa presencia de aspectos relacionados con el autoconcepto matemático con etiquetas tales como: *fracaso asegurado, incapacidad mental* y, sobre todo, *suspenso*.

Resultados de la segunda pregunta *¿Qué son para ti las matemáticas?*

Análogamente a como se mostraron los resultados de la primera pregunta, comenzamos este apartado presentando el porcentaje de las valoraciones (positivo, neutro, negativo o ambivalente) obtenidos en la segunda pregunta en las categorías establecidas (Figura 5).

Como se observa, los estudiantes de Grado en Educación Primaria valoran las matemáticas con elevados porcentajes de asociaciones de carácter neutro (50%) y también aparece un buen número de las valoraciones positivas (42%). Resulta llamativo 1% de valoraciones de carácter negativo que establecen (Figura 5).

Figura 5. Porcentaje de las valoraciones asignadas a las respuestas a la pregunta *¿Qué son las matemáticas para ti?*



Fuente: Elaboración propia

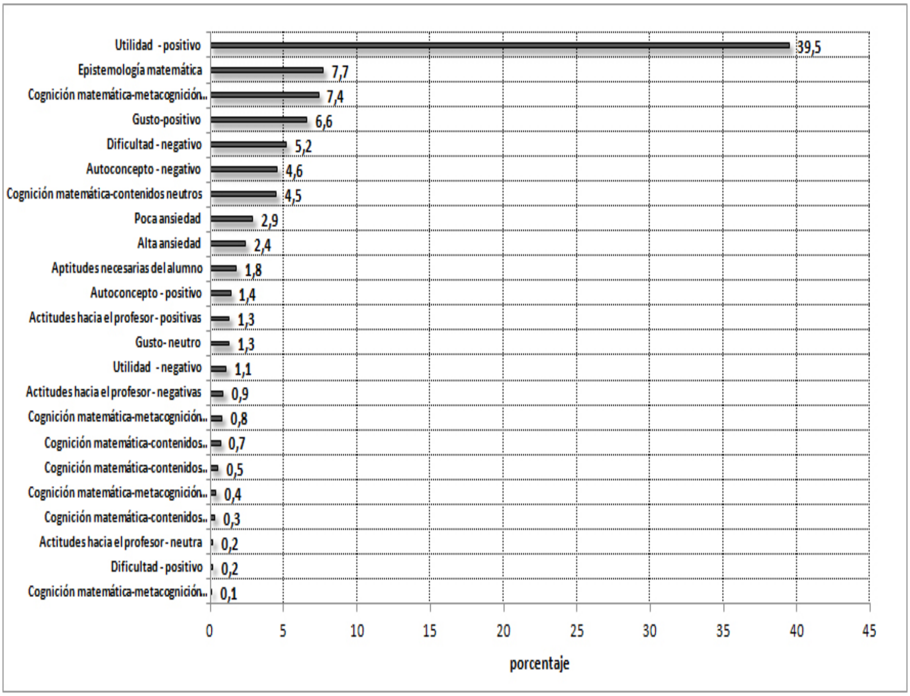
Si comparamos los resultados obtenidos en las categorías establecidas teniendo en cuenta las valoraciones asignadas, observamos que es la utilidad valorada en sentido positivo la que obtiene un porcentaje mayor (Figura 6).

En esta segunda pregunta, la etiqueta más repetida ha sido la de utilidad. Señalamos algunas de las respuestas prototípicas relacionadas con esta categoría: *fundamentales e imprescindibles, parte fundamental del desarrollo personal, una asignatura muy importante, ciencia base del conocimiento, la solución de muchos campos, un instrumento útil para la vida cotidiana* y, sobre todo, *necesarias.*

En línea con la pregunta anterior, se observa la presencia de respuestas relacionadas con la naturaleza epistemológica de las matemáticas: *ciencia que permite cuantificar la realidad, un método de estudio, ciencia* y *progreso, descubrimiento*, etcétera. Los contenidos propios de la materia: *geometría, números, cálculo, aritmética*, etcétera, tienen poca presencia en las asociaciones verbales que hacen los alumnos respecto a lo que significan las matemáticas para ellos.

También se contemplan respuestas relacionadas con la afectividad del alumno: *gusto, autoconcepto, ansiedad,* y con la enseñanza: *actitud del profesor.*

Figura 6. Porcentajes de las categorías al contestar a la pregunta *¿Qué son las matemáticas para ti?*, teniendo en cuenta las valoraciones.



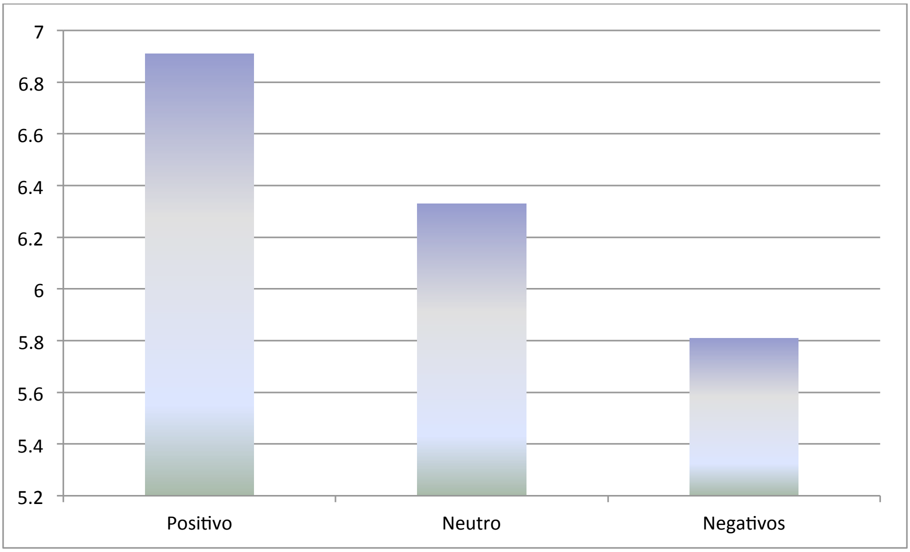
Fuente: Elaboración propia

Cabe reseñar las diferencias obtenidas en las respuestas a las dos preguntas planteadas. En este sentido, podemos decir que los futuros maestros han sabido diferenciar la vivencia de las matemáticas, fuertemente marcada por su pasado escolar, del valor más o menos objetivo que tiene esta materia no sólo en su formación sino en la sociedad en general.

Resultados obtenidos al relacionar las asociaciones verbales con el rendimiento

De manera tangencial comentamos los primeros hallazgos obtenidos al relacionar las asociaciones verbales que hacen los estudiantes de la palabra matemáticas

Figura 7. Nota media en matemáticas y valoración de las asociaciones con la palabra matemáticas



con el rendimiento final que han obtenido en esta materia; medimos este rendimiento a partir de la última nota obtenida.

Como cabría esperar, la media de las últimas calificaciones en matemáticas es mayor en aquellos sujetos que han categorizado las matemáticas con valencias positivas (Figura 7).

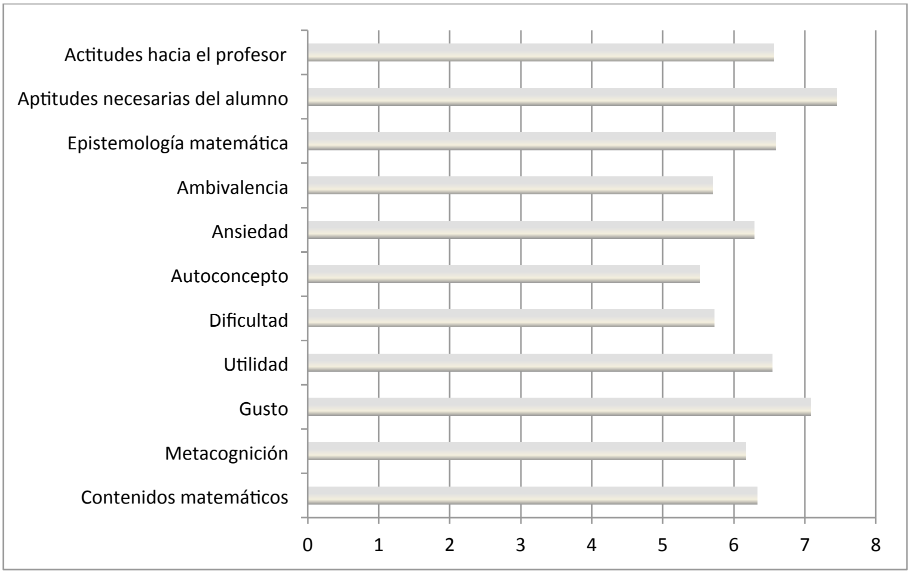
En los primeros análisis, obtenemos además que los estudiantes con nota media próxima al notable relacionan la palabra matemáticas con la utilidad de las mismas y con el gusto hacia ellas, y sobre todo con las aptitudes o capacidades del individuo (Figura 8).

Estos primeros resultados nos servirían como prospectiva para un nuevo trabajo.

CONCLUSIONES

Un primer análisis de nuestros resultados confirma la categorización inicialmente planteada por McLeod (1992) y las unificaciones posteriores; por ejemplo,

Figura 8. Nota media en matemáticas y categorías de las asociaciones con esa palabra



Fuente: Elaboración propia

como las presentadas por Op't Eynde, De Corte y Verschaffel (2002). Así, las asociaciones que los futuros maestros realizan ante la palabra "matemáticas" están vinculadas predominantemente "al objeto" y, por tanto, se sitúan en el dominio cognitivo y metacognitivo: *números, operaciones y resolución de problemas*. Involucran poco componente afectivo aunque, previsiblemente, será una parte fundamental del contexto en el que se desarrolle el afecto. Sin embargo, las asociaciones ante la pregunta: ¿qué son para ti las matemáticas? (el yo), manifiestan un fuerte componente afectivo (relacionado a con las creencias relativas a la confianza, al autoconcepto, al gusto y a las atribuciones de causalidad), y de conexión social (utilidad y necesidad).

La asociación más frecuente que realizan los alumnos del magisterio con la palabra matemáticas posee una valencia mayoritariamente neutral y asociada a números y operaciones, lo que podría alinear, de entrada, a estos futuros docentes en el enfoque platónico o absolutista (Ernest, 1988; Lerman, 1983), mediante el cual las matemáticas son un monolito, un producto estático, cerrado e inmutable. Adicionalmente, sus frecuentes asociaciones hacia lo metacognitivo puede apuntar a que el enfoque anterior se complemente con una visión instrumentalista en la que las matemáticas se contemplan como una caja de herramientas y constituidas por una acumulación de hechos, reglas y habilidades que puede emplear el artesano para conseguir algún fin externo. En todo caso, estas asociaciones no apuntan hacia un enfoque dinámico de las matemáticas en el que la creatividad y la invención humanas formen parte de él.

Los destacables porcentajes que alcanzan las asociaciones que etiquetamos como epistemología matemática con palabras del tipo: *ciencia exacta, lógica universal, naturaleza, orden, verdad, vida, razonamiento inductivo y deductivo,* y como aptitudes o capacidades personales con palabras del tipo: *discurrir, esfuerzo, estudio, agilidad mental, inteligencia, capacidad, pensar* hacen pensar que para los futuros maestros las Matemáticas son una "ciencia con mayúsculas" a la que tienen en alta consideración. Sin embargo, esa elevada valoración y las capacidades a las que se la asocia puede enmascarar una peligrosa creencia de poca accesibilidad o de coto reservado a unos privilegiados.

La alta consideración de las matemáticas tiene una clara consecuencia en las asociaciones sobre la otra pregunta: ¿qué son para ti las matemáticas?, en las que la utilidad, con mucho, es la etiqueta más repetida. Esa percepción parece como "obligar" a los futuros docentes a tener una necesaria relación con las matemáticas y pone en funcionamiento la dimensión afectivo-emocional con asociaciones relativas al gusto, dificultad, autoconcepto, ansiedad, etcétera.

La escasa relación entre las asociaciones verbales de las dos preguntas que formulan los estudiantes, hace pensar que los futuros maestros han sabido diferenciar la vivencia de las matemáticas, marcada por su pasado escolar (yo) del valor objetivo que tiene esta materia no solo en su formación, sino también en la sociedad (objeto).

La etiquetación tanto de las asociaciones con la palabra matemáticas, así como lo que estas representan, va acompañada de un rendimiento escolar acorde con estas valoraciones a la luz de las diferencias significativas que se encuentran en las notas medias para cada una de estas categorías. Así, encontramos que los futuros maestros que realizan asociaciones con valencia positiva tienen una nota media en matemáticas sensiblemente superior a los que lo hacen en negativo o neutro. Adicionalmente, aquellos con asociaciones relativas a las capacidades pertinentes para las matemáticas o con gusto hacia ellas resultan ser alumnos cuya nota media en matemáticas supera el notable (puntuación 7). Este aspecto sería objeto de estudio para un nuevo trabajo que dejamos aquí planteado.

La formación inicial del futuro maestro parece ser el marco adecuado para la identificación y consolidación de sus distintos sistemas de creencias matemáticas. Téngase en cuenta que, por una parte, las creencias adquiridas en el periodo de formación (Azcárate, 1998; Gómez-Chacón, 2000; Ernest, 2000; Blanco y Barrantes, 2003) son difíciles de modificar con la experiencia o la formación permanente. Por otra, los cambios detectados en las creencias matemáticas con modificaciones en las actitudes hacia esa ciencia, son producto de la realización de cursos específicos de formación (Dogan, 2012; Lutovac & Kaasila, 2011; Kargara, Tarmiziab, & Bayat, 2010; Charalambous, Panaoura & Philippou, 2009; Schackow, 2005). Una progresiva alfabetización emocional matemática (Gómez-Chacón, 2000; Hidalgo, Maroto y Palacios, 2004, 2005) y la transmisión a los futuros docentes de un entusiasmo hacia las matemáticas y hacia su enseñanza podrían ser unas buenas directrices para su consecución.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alemany, I. & A. I. Lara (2010). Las actitudes hacia las matemáticas en el alumnado de la ESO: un instrumento para su medición. *Publicaciones*, *40*, 49-71.

An, S.A., T. Ma y M.M. Capraro (2011). Preservice Teachers' Beliefs and Attitude About Teaching and Learning Mathematics Through Music: An Intervention Study. *School Science and Mathematics, 111 (5)*, 236−248.

Auzmendi, E. (1992): Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitaria. Características y medición. Ediciones Mensajero. Bilbao, España.

Azcárate, P. (1998). La formación del profesor de matemáticas. Fundamentos, principios y estrategias. Seminario de doctorado dictado en la Universidad de Zulia, Venezuela (material mimeografiado).

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ. Prentice Hall.

Barrantes, H. (2008). Creencias sobre las matemáticas en estudiantes de la enseñanza media costarricense. En *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, número 4.

Barrantes, M. y L. Blanco. (2004). Recuerdos, Expectativas y Concepciones de los Estudiantes para Maestro sobre la Geometría Escolar. *Enseñanza de la Ciencias*, 2004, 22(2), 241-250.

Blanco, L y M. Barrantes (2003). Concepciones de los estudiantes para maestros en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6 (2) (pp. 107-132).

Blanco, L. J. (1998). Otro nivel de aprendizaje: perspectivas y dificultades de aprender a enseñar Matemáticas. *Cultura y Educación*, 9, 77-96.

Charalambous, Ch., A. Panaoura, y G. Philippou (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educ Stud Math 71*, 161–180.

Chen, P. y B. Zimmerman (2007) A cross-national comparison study on the accuracy of self efficacy beliefs of middle-school mathematics students. *Journal of Experimental Education*, 75(3), 221-244.

Corica, A. R. y Ma. R. Otero (2007). Las ideas de algunos estudiantes acerca de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática en Nivel Medio. *REIEC Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*. Año 2, núm. 1, julio 2007, 40-68.

De Corte, E., P. Op't Eynde y L. Verschaffel (2002). Knowing what to believe: The relevance of students' mathematics beliefs for mathematics education, en Hofer, B.K. y P.R. Pintrich (eds.). *Personal epistemology: The psychology of beliefs about knowledge and knowing*, 297-320. Lawrence Erlbaum Associates. Mahwah, NJ.

Dogan, H. (2012). Emotion, Confidence, Perception and Expectation. Case of Mathematics, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10, 49-69.

Ernest, P. (1988). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics. En *Mathematics Teaching: The State of the Art*, pp. 249-254. Falmer Press. London Disponible en http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/impact.htm.

Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica. *Uno*, 2, 9-27.

Fennema, E. & J.A. Sherman (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scale. Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by male and female. JSAS *Catalog of Selected Documents of Psychology*, 6 (31), 1-31

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Comares. Granada.

Gámez, P., M.F. Moreno y F. Gil F. (2003). Concepciones de los futuros profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Investigación en Educación Matemática: VII Simposio de la SEIEM, 213-226.

Gardner, H. (2000). *Mentes extraordinarias*. Kairos. Barcelona.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4 (2), 129-159.

Gill, M. G., P.T. Ashton y J. Algina (2004). Changing preservice teachers' epistemological beliefs about teaching and learning in mathematics: An intervention study. *Contemporary Educational Psychology,* 29(2), 164-185

Goleman, D. (1997). *Inteligencia emocional*. Paidós. Barcelona

Gómez-Chacón, I. Mª. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea. Madrid.

Gómez-Chacón, I. Mª. (2005). Affect, Mathematical thinking and intercultural learning: A study on educational practice. In Hannula, M., I.M. Gómez-Chacón, G. Philippou, R. Zan (2005) Thematic Working Group 2: Affect and Mathematical Thinking. In M. Bosh (ed.). *Proceedings of CERME 4*: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education 17-21. February 2004 in San Feliu Guix, Spain.

Gómez-Chacón, I.M., P. Op 't Eynde y E. De Corte (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las Ciencias*, 2006, 24(3), 309-324.

Harkness, S., B. D'Ambrosio y A. Morrone (2007). Preservice elementary teachers' voices describe how their teacher motivated them to do mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 65, 235-254.

Hidalgo, S.; A. Maroto y A. Palacios. (2004). Por qué se rechazan las Matemáticas. *Revista de Educación,* 32, pp. 75-95.

Hidalgo, S.; A. Maroto y A. Palacios. (2005). El perfil emocional matemático como predictor del rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Revista Educación Matemática.* 17(2), 89-116.

Hodgen, J. y M. Askew. (2007). Emotion, Identity and teacher learning: Becoming a Primary Mathematics Teacher. *Oxford Review of Education*, 33(4), 469-487.

House, J. D. (2007). Mathematics beliefs and instructional strategies in achievement of elementary-school students in Japan: Results from the TIMSS 2003 assessment. *Psychological Reports*, 100(2), 476-482.

Kargara, M., R.A. Tarmiziab y S. Bayat. (2010). Kargar, Relationship between Mathematical Thinking, Mathematics Anxiety and Mathematics Attitudes among University Students. *Procedia Social and Behavioral Sciences* 8, 537-542.

Kunter, M., Y.M. Tsai, U. Klusmann, M. Brunner, S. Krauss y J. Baumert. (2008). Students' and mathematics teachers' perceptions of teacher enthusiasm and instruction. *Learning and Instruction,* 18(5), 468-482.

Lerman, S. (1983). Problem solving or knowledge centered: The influence of philosophy on mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 14, núm. 1.

Llinares, S. y M.V. Sánchez. (1990): El conocimiento acerca de las Matemáticas y las prácticas de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 8(2), 97-102.

Lutovac, S. y R. Kaasila. (2011). Beginning a pre-service teacher's mathematical identity work through narrative rehabilitation and bibliotherapy. *Teachingin Higher Education,* 16(2), 225-236.

Mason, L., y L. Scrivani. (2004). Enhancing students' mathematical beliefs: An intervention study. *Learning and Instruction,* 14, 156-176.

Mcleod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education. A reconceptuaization. En *A. Gros Douglas (Ed) handbook of research on Mathematics teachings and Learning.* Macmillan. New York: NCTM, 575-596.

Muñoz, J. M. & M.D. Mato. (2008). Análisis de las actitudes respecto a las matemáticas en alumnos de la ESO. *Revista de Investigación Educativa*, 26 (I), 209-226.

Op't Eynde, P., E. De Corte y L. Verschaffel. (2002). Framing students' mathematics related beliefs: A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G.C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* 13-38. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands.

Op't Eynde, P., E. De Corte y L. Verschaffel. (2006). "Accepting emotional complexity": A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 193-207.

Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Relime* vol. 8, núm. 1, 69-90.

Pintrich, P. R., y B. Schrauben. (1992). Students' motivational beliefs and their cognitive engagement in academic tasks, en Schunk, D. y Meece, J. (eds.). *Students' perceptions in the classroom: Causes and consequences*, 149-183. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, NJ.

Sakiz, G., S.J. Pape y A.W. Hoy. (2012) Does perceived teacher affective support matter for middle school students in mathematics class rooms? *Journal of School Psychology* 50, 235-255.

Sánchez, V.: (2000) Representaciones y comprensión en el profesor de Matemáticas. *Actas IV Congreso* SEIEM. 51-63.

Schackow. J.B. (2005). "Examining the attitudes toward mathematics of preservice elementary school teachers enrolled in an introductory mathematics methods course and the experiences that have influenced the development of these attitudes". Thesis (Ph.D.)--University of South Florida, 2005. http://purl.fcla.edu/fcla/etd/SFE0001293

Schoenfeld, A. (1983): Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science*, 7, 329-363.

Shoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press. New York.

Shoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. En D. Grouws (Ed.) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan. New York.

Tapia, M. & G.E. Marsh. (2004). An instrument to measure mathematics attitudes. *Academic Exchange Quarterly*, 8 (2). Recuperado de http://www.rapidintellect.com/AEQweb/cho25344l.htm

Warfield, J., T. Wood y J.D. Lehman. (2005). Autonomy, beliefs and the learning of elementary mathematics teachers. *Teaching and Teacher Education*, 21(4), 439-456.

Weiner, B. (1974). *Achievement motivation and attribution theory. General learning*. Press Morristown, N.J.

Zimmerman, B.J., y D. Schunk. (EDS) (2011). *Handbook of self-regulation of learning and performance*. Routledge. New York.

DATOS DE LOS AUTORES

Santiago Hidalgo Alonso†
Depto. Didáctica de las C. Experimentales, Sociales y de la Matemática
Facultad de Educación de Segovia
Campus de Segovia
Universidad de Valladolid

Ana Maroto Sáez
Depto. Didáctica de las C. Experimentales, Sociales y de la Matemática
Facultad de Educación de Segovia
Campus de Segovia
Universidad de Valladolid
amaroto@am.uva.es

Andrés Palacios Picos
Depto. de Psicología
Facultad de Educación de Segovia
Campus de Segovia
Universidad de Valladolid
palacios@psi.uva.es

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Una modelización matemática como medio de detección de obstáculos y dificultades de los alumnos sobre el concepto de función: alargamiento de un muelle sometido a un peso

A mathematical modelling as a means to detection student's obstacles and difficulties related to the function concept: extension of a spring under a weight

Jose Benito Búa Ares, Teresa Fernández Blanco y Mª Jesús Salinas Portugal

Resumen: *En este trabajo se presenta una investigación sobre una actividad de modelización matemática en la Enseñanza Secundaria. Los alumnos generan experimentalmente una tabla de datos sobre el comportamiento de un muelle sometido a un peso. Partiendo de esos datos y utilizando GeoGebra, llegan a una expresión analítica que relaciona las dos variables presentes (masa y longitud del muelle). Una vez obtenido el modelo, los estudiantes responden a una serie de cuestiones relacionadas con el modelo matemático obtenido y con la situación extra-matemática origen de la modelización.*

Los objetivos principales de la investigación son, por un lado, mostrar hasta qué punto los alumnos integran los conocimientos adquiridos sobre funciones en el proceso de modelización. Y, por otro, mostrar hasta qué punto los alumnos interpretan el resultado matemático en la situación extra-matemática original.

Los resultados de investigación ilustran que es posible que los alumnos obtengan un modelo matemático sin integrar los conocimientos matemáticos implícitos y sin interpretar el resultado matemático en la situación extra-matemática, origen de la modelización.

Palabras clave: Modelización, Funciones, GeoGebra, Enseñanza Secundaria, Bachillerato.

Abstract: In this article we present a research about a mathematical modelling for the secondary school. Students start with a data table, it obtained experimentally by themselves, on the behavior of a spring subjected to a weight. From the data table and using the GeoGebra

Fecha de recepción: 30 de julio de 2014; fecha de aceptación: 28 de marzo de 2015.

program, students obtain an analytical expression that relates the two variables (mass and length of the spring). After they obtained the model, students have to answer questions related to the mathematical model and the original extramathematical situation.

The main objectives of the research are to show how students use their unserstanding about functions during the process to obtain the model and if students interpret the mathematical result in the context of the original extramathematical situation.

The investigation results show it is possible obtain a mathematical model without the use of implicit mathematical knowledge and without the interpretation of the mathematical result in the original extramathematical situation.

Keywords: Modelling, functions, GeoGebra, lower secondary education, upper secondary education.

INTRODUCCIÓN

La modelización utilizada en la enseñanza de las matemáticas constituye un campo de investigación desde hace más de 30 años y ha pasado a ser parte fundamental en la investigación actual en Didáctica de la Matemática. Así, los CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) incluyen el grupo de trabajo "Applications and modelling", entre los grupos de investigación. El ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) posee una sección afiliada, dedicada específicamente a la modelización (International Community of Teachers of Modelling and Applications, ICTMA); la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) y sus Principles and Standards for School Mathematics (2000) concede importancia a la modelización integrada, como parte de la resolución de problemas y el informe PISA (OCDE, 2012, p. 10) considera la construcción de modelos matemáticos como una piedra angular en la definición de competencia matemática.

Respecto a la enseñanza de las matemáticas en España, la mención sobre la inclusión de actividades de modelización no aparece de forma expresa, ni en el currículo de Enseñanza Secundaria obligatoria ni en el Bachillerato (Real Decreto1631/2006, Orden ESD/1729/2008). No obstante, sí aparecen menciones a la modelización en relación con las competencias matemáticas que los alumnos deben alcanzar, situando la modelización como una forma de "*abordar problemas de la vida real (...)*" de forma que el alumno combine "*diferentes herramientas y estrategias (...) para enfrentarse a situaciones nuevas*" (Orden ESD/1729/2008, p. 27606). Por tanto, la modelización se plantea, como un recurso o herramienta que permite enfrentarse a una situación nueva o problemática.

El objetivo central de la investigación es indagar si los alumnos integran la comprensión y el uso adecuado de conceptos y nociones asociados a las funciones, así como a sus operaciones en el proceso de obtención del modelo que realizan en la actividad planteada.

En la primera sección de este documento, se describe los fundamentos teóricos en los que se apoya la investigación. A continuación, se detalla la actividad y la metodología que se ha seguido para llevarla a cabo. Las siguientes secciones recogen el análisis de resultados y las conclusiones más relevantes. Finalmente, se realiza una breve reflexión sobre la puesta en práctica de este tipo de actividades de modelización.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En el contexto de la actividad, identificable con la construcción de un modelo matemático, realizaremos en primer lugar, una breve descripción del proceso asociado a la construcción de modelos matemáticos (ciclo de modelización). También se hará referencia a las praxeologías de Chevallard (1999).

El ciclo de modelización

El número de autores que se han ocupado de la modelización matemática en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es amplio (por ejemplo, Blum y Niss, 1991; Blum y Leiss, 2007; Blum y Borromeo, 2009; Kaiser, Sriraman y Blomhøj, 2007; Schmidt, 2010). Existen diferencias sobre lo que la modelización puede y debe aportar en el ámbito de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, lo que influye en la forma de definir qué es una modelización, qué procesos tienen lugar y qué fines debe alcanzar. Por ejemplo, Schmidt (2010, p. 2067) apunta que la definición depende de los objetivos que se le atribuyen a la modelización:

> Modelización matemática en general se refiere al uso de las matemáticas para resolver problemas reales y abiertos. Al mismo tiempo, la definición exacta varía en función de los objetivos, qué modelo en el proceso de modelado se está utilizando y la naturaleza del contexto asignado a la tarea de modelización.

Teniendo en cuenta esas diferencias, Kaiser, Sriraman y Blomhøj (2007, pp. 2037-2038) distinguen 5 perspectivas en relación con la modelización: modelización realista, contextual, educacional, socio-critica y epistemológica.

En general, se admite que la modelización es un proceso que puede dividirse en varios pasos. Dadas las diferencias al tratar el problema de qué es una modelización y cuáles son sus fines, hay una cierta variedad de esquemas descriptivos de los pasos, en que se puede dividir el proceso de modelización. Los pasos se ordenan de forma que, están fuertemente ligados entre sí, aunque son sucesivos, las relaciones entre los mismos pueden llevar a retomar pasos anteriores. Ese comportamiento cíclico lleva a denominar el proceso de modelización como "Ciclo de modelización".

Tomando como referencia el esquema descriptivo del ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007, p. 225 (Figura 1); se observa, en dicho esquema, la modelización situada en dos ámbitos diferentes: las *matemáticas* y el *resto del mundo*. Se parte de una situación o problema real −*Situación real y problema*− susceptible de ser planteada como una situación a modelizar −1 *Construcción*−. La situación a modelizar requiere de una simplificación y estructuración −2 *Simplificación/ Estructuración*−. La transformación de ese modelo o problema *real* en un problema que toma la forma de un modelo matemático, se realiza mediante un proceso de matematización −3 *Matematización* pasando en ese punto a trabajar en el seno de la matemática. El modelo matemático obtenido mediante el paso 4 (*Trabajo matemático*) permite disponer de una respuesta al problema matemático, que debe ser interpretado −5 *Interpretación*− en el contexto original −*Resto del Mundo*− para poder disponer de un resultado *real*. Por último, se inserta y contrasta el modelo obtenido con la situación y problema original, permitiendo dar respuesta a la cuestión o problema original −6 *Validación* y 7 *Exposición*−. Tanto la validación del modelo como su presentación, puede dar lugar a nuevas preguntas acerca del modelo obtenido, con lo que el proceso puede volver a ponerse en marcha. Los resultados, en forma de modelo, son *matemáticos* y *reales*, ambos se hallan fuertemente conectados entre sí por los procesos descritos anteriormente.

En una modelización podemos distinguir entre el proceso que se sigue, para responder a la pregunta inicial (modelización) y el producto de ese proceso, que tomará la forma de modelo matemático. Así, un modelo matemático podríamos definirlo como:

> Un modelo consiste en ciertos objetos matemáticos, correspondientes a "elementos básicos" de la situación original o del modelo real, y de ciertas relaciones entre

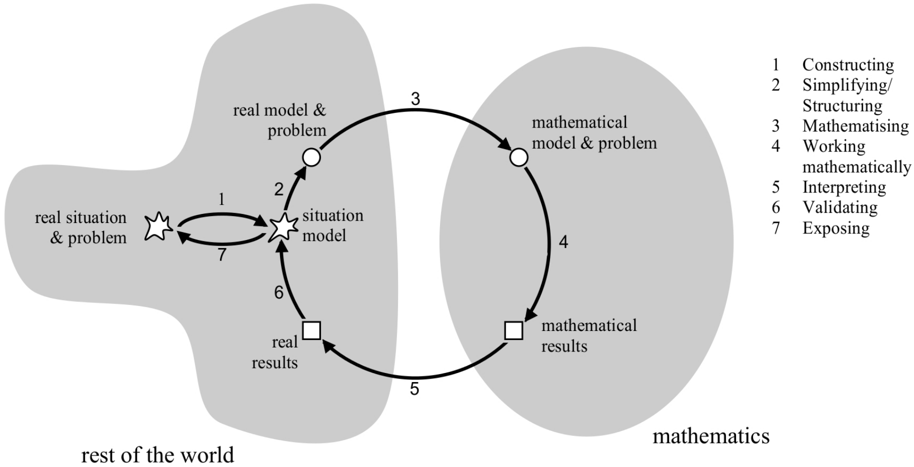


Figura 1. Esquema de Blum y Leiss (2007)

> estos objetos, que corresponden con relaciones entre los "elementos básicos". Para ser un poco más precisos, un modelo matemático puede ser visto como un triple (S, M, R), consistente en una situación problemática real S, una colección de entidades matemáticas M y una relación R entre los objetos y relaciones de S y los objetos y las relaciones de M. (Blum y Niss, 1991, p. 39).

Dicho de otro modo, la modelización matemática centrada en situaciones o fenómenos provenientes de la realidad es:

> (...) el proceso que traslada el mundo real a las matemáticas en ambas direcciones" (Blum y Borromeo, 2009, p. 45).

La modelización es un proceso complejo que se mueve entre lo extramatemático –identificado con el mundo real (S)– y lo intramatemático –identificado como el tratamiento desde las matemáticas de esa realidad (M)–. Esa complejidad conlleva que, ante una misma modelización, los alumnos establezcan relaciones diferentes entre los distintos elementos de S y M,y entre los puntos esenciales del proceso de modelización. Como consecuencia, esas relaciones que están vinculadas a un estilo de pensamiento matemático (Borromeo, 2006; Blum y Borromeo, 2009) conforman rutas diferentes de modelización, que pueden ser estudiadas de forma individual. Estas rutas individuales deben ser potenciadas por el profesor pero, al mismo tiempo, debe procurar controlarlas para que el proceso de modelización cumpla con su cometido fundamental de conseguir que el alumno aprenda. De este modo, el equilibrio entre la necesaria autonomía del alumno y la necesaria intervención del profesor provoca en el profesor dilemas y tensiones, motivadas porque la enseñanza se convierte en más abierta y menos predecible (Blum y Borromeo, 2009; Doerr, 2006).

Las praxeologías de Chevallard

Las construcciones praxeológicas fueron introducidas por Chevallard (1999), hacen referencia al conocimiento y enseñanza de las matemáticas en términos de praxeologías. Siguiendo a Barquero, Bosch y Gascón (2011) las praxeologías están compuestas por dos elementos: la praxis, que se identifica con *saber-hacer*, y el logos, que se identifica con *saber*. La praxis constituye un bloque práctico y técnico englobando el tipo o tipos de problemas, las cuestiones que pretenden estudiarse y las técnicas que se usan. El logos constituye un bloque tecnológico y teórico e incluye la descripción, explicación y la justificación de las técnicas que se usan, que recibe el nombre de *tecnología*, y la fundamentación de la tecnología, que recibe el nombre de *teoría*. Así, alrededor de una tarea problemática, T, se encuentra al menos una técnica, τ, una tecnología de τ, ϕ, y una teoría de ϕ, θ. El total, indicado por $[T/\tau/\phi/\theta]$, constituye una *praxeología puntual*, usando "puntual" como indicativo de que se trata de una praxeología relativa a un tipo de tareas, T. Desde este punto de vista, el saber hacer y el hacer forman parte de un bloque praxeológico, por lo que no tiene sentido la diferenciación entre ambas.

Para algunos investigadores, como por ejemplo Gascón (2011), las competencias PISA inciden en la praxis o capacidad de *saber hacer*:

> De hecho, la noción competencia pone el acento en la capacidad de actuación o saber hacer y en las prácticas orientadas hacia una finalidad. (Gascón, 2011, p. 25).

A continuación, se proporcionan algunos datos considerados relevantes para determinar si la obtención de un modelo (asociado al saber hacer) no involucra, necesariamente, el saber implícito en ese saber hacer. Dicho de otro modo, se intenta ilustrar que los alumnos pueden obtener un modelo matemático, sin que los conocimientos asociados a las funciones se hallen realmente presentes, tanto en el proceso de construcción del modelo como en su interpretación en el contexto real que dio lugar al modelo.

METODOLOGÍA Y DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN "MUELLE"

La actividad se presenta en forma de pregunta inicial: *¿De qué forma se relacionan entre sí el alargamiento de un muelle con el peso a que éste es sometido?* Dicha actividad fue propuesta a estudiantes de la asignatura Matemáticas I de 1º de Bachillerato Científico Tecnológico (16-17 años de edad) como una práctica voluntaria durante dos años consecutivos (Cursos 2010-2011 y 2011-2012) y en el segundo trimestre del curso académico (una vez que ya habían estudiado el bloque de Análisis Matemático). El total de la muestra estaba formada por 22 alumnos, distribuidos en seis grupos (A-F). La actividad de los alumnos del grupo A y D fue grabada en audio y vídeo.

La pregunta inicial lleva a la generación de un modelo matemático que permite establecer, en forma de expresión analítica, la relación entre dos variables: peso (masa en realidad) y longitud. La expresión analítica de dicha relación es una función lineal o afín ($f(x)=ax$; $f(x)=ax+b$), dependiendo de si se mide la longitud del muelle sin ser sometido a peso o si se mide dicha longitud.

En cuanto a los conocimientos previos de los alumnos, la función lineal y afín es conocida por ellos desde 3º de ESO (14-15 años de edad; Real Decreto, 1631/2006, pp. 751-756). Además, deben distinguir ya en 1º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-13 años de edad), si la relación existente entre dos magnitudes es de proporcionalidad directa, observando una tabla de valores. Los alumnos de esta etapa educativa (ESO) deben ir familiarizándose paulatinamente con el concepto o noción de función: en primer lugar con la obtención de la expresión algebraica que describe la relación entre variables provenientes o generadoras de una tabla de datos, posteriormente, con la representación gráfica de los puntos del plano a los que da lugar la tabla de valores y la representación gráfica de la expresión algebraica. Durante el primer curso de Bachillerato, los alumnos profundizan en la línea introducida ya en la ESO y estudian la expresión analítica de una función, su representación gráfica y sus propiedades (dominio, recorrido, continuidad, monotonía, extremos, asíntotas, etc.). Por lo tanto, los alumnos de la muestra parten de un conocimiento relativo a las funciones, bastante amplio para poder enfrentarse a la tarea propuesta.

La actividad se divide en tres fases claramente diferenciadas: (1) obtención de la tabla de datos, (2) Volcado de datos y función de ajuste y (3) cuestionario alrededor del modelo. Dichas fases se detallan a continuación.

- *1ª Fase: Obtención de la tabla de datos.* Los alumnos acuden al laboratorio del Instituto donde se les explica que deben colgar peso a un muelle y tomar los datos de alargamiento y del peso al que se ha sometido el muelle. Cuántos datos tomar y cómo hacerlo era parte de su responsabilidad, ejercida en forma de toma de decisiones de cada grupo de forma autónoma. Se le suministró un muelle a cada grupo, reglas, flexómetros, pesas y un soporte para las pesas. Los muelles suministrados eran diferentes en algunos grupos, lo que permitió que los alumnos obtuviesen el mismo tipo de función ($f(x)=ax+b$) pero con valores de a y b diferentes en cada caso. De esa forma, la función modelizadora del problema *real* tomaría claramente la forma de una función dependiente de parámetros (a y b).
- *2ª Fase: Volcado de datos y obtención de la función de ajuste*. Inmediatamente después de que los alumnos diesen por terminada la primera fase, se trasladaron al aula de Informática del Instituto para representar los datos obtenidos en los ejes cartesianos y obtener una función de ajuste para los puntos del plano observables en pantalla. Los alumnos utilizaron el programa de Geometría Dinámica GeoGebra, que permite la modificación de la gráfica de una función dependiente de parámetros mediante el uso de deslizadores. Se introducen los datos de la tabla de valores en forma de puntos del plano, que inmediatamente se ajustan los puntos mediante una función que depende de uno o varios parámetros.
- *3ª Fase: Cuestionario alrededor del modelo.* En esta fase se les entregó un cuestionario a los alumnos para contestar de forma individual y por escrito, indicándoles que dicho cuestionario no formaba parte del proceso de evaluación de la asignatura. Este cuestionario (Tabla 1) intenta incidir en algunos de los conocimientos, conceptos y nociones sobre funciones que se hayan involucrados en el modelo obtenido. La elección de las preguntas se apoya en la propuesta de Ursini y Trigueros (2006) y Ursini (2011) para trabajar exitosamente con problemas que involucran variables en relación funcional. Según estas autoras, las variables en relación funcional involucran los siguientes aspectos, correspondientes con distintos niveles de abstracción: (F1) Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas,

> problemas verbales, expresiones analíticas); (F2) Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente; (F3) Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente; (F4) Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas); (F5) Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra; (F6) Simbolizar una relación funcional, basada en el análisis de los datos de un problema. Los aspectos F2 y F3 se relacionan con la determinación del valor de una incógnita en una expresión pero que no son equivalentes, ya que: para determinar los valores de una variable en función de los valores de la otra, es necesario primero sustituir un valor en una de las variables y convertir de este modo una expresión que involucra una relación funcional en una ecuación. (Ursini y Trigueros, 2006, p. 7).

En este trabajo, todos los aspectos son tratados en una o varias fases. Por ejemplo, el aspecto F1 es tratado en las tres fases en cada una de las representaciones que los alumnos generan y utilizan (tabular, gráfica y como expresión analítica). Los aspectos F2 y F3 son tratados expresamente en las preguntas 4, 5 y 8 del cuestionario. El aspecto F5 debe ser utilizado en la pregunta 7, pues existe una diferencia de dominio y recorrido de la función matemática y de la función aplicada en el contexto concreto de un muelle. El aspecto F6 es desarrollado, en primera instancia, en la primera fase mediante la obtención de una primera representación funcional (tabla de datos) y volverá a aparecer en las sucesivas representaciones, en la interpretación y solución a las preguntas planteadas en esta última fase.

Las preguntas 2, 3, 4, 5 y 8 se centran en las variables, tanto reales como matemáticas, y en el uso de esas variables para calcular valores concretos no presentes en la tabla de datos. En concreto, las preguntas 2 y 3 inciden en la diferenciación entre variable dependiente e independiente y parámetro. Como Drijvers afirma (2003, p. 77), el concepto de parámetro ocupa una posición jerárquica de mayor nivel comparada con el concepto de variable. El parámetro posee, en ocasiones, como es el caso concreto de la modelización que proponemos, la condición de constante variable, condición más compleja que la de variable y que, por tanto, conlleva más dificultades en su uso y comprensión.

Si bien los enunciados de las preguntas 1, 6, 7 y 9 se relacionan expresamente con una interpretación del modelo o de un resultado concreto obtenido, los objetivos se vinculan a los elementos de la tripleta (S, M, R) y a los pasos del ciclo de modelización. Dicho de otro modo, el alumno debe considerar, en mayor o menor medida, la situación real, el modelo real y las relaciones entre ambas a la hora de contestar.

Tabla 1. Preguntas del cuestionario

Cuestionario Muelle sometido a un peso
1. ¿Qué tipo de función has obtenido? Interpreta el resultado.
2. ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente en la función?
3. En la función que has deducido, ¿aparece algún parámetro? Si es así, ¿qué significado tiene en el experimento que estás realizando?
4. ¿Cuánto se alarga el muelle con 370 g de peso?
5. ¿Qué peso se corresponde con 21cm de longitud del muelle?
6. ¿Qué longitud de muelle obtienes por la función si no colocas peso sobre el muelle? Interpreta tu resultado.
7. Según la función que has obtenido, ¿es posible alargar indefinidamente el muelle? Interpreta ese resultado pero teniendo en cuenta el experimento concreto que has realizado.
8. Intenta deducir cómo conocer el peso colocado en el muelle, si conoces la longitud del muelle.
9. Las funciones que se obtienen son distintas. ¿Cuál crees que es la razón?

El tiempo dedicado a cada fase, fue decisión de los propios alumnos. Al acabar cada fase entregaba el resultado obtenido al profesor y esperaban a que sus compañeros terminaran. Como los alumnos decidieron contestar el cuestionario inmediatamente después de la fase anterior, las diferentes fases se realizaron en el transcurso de una tarde.

Para completar el estudio, se realizaron entrevistas a siete alumnos, que nos permitieron profundizar sobre las nociones planteadas y mostrar sus opiniones sobre la actividad propuesta.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el análisis de resultados se van a agrupar la 1ª y 2ª fases, que identificamos con el *saber hacer*. Estas dos fases tienen como objetivo la obtención de una función modelizadora del fenómeno estudiado, que requieren de destrezas o conocimientos técnicos: medir con una regla o un flexómetro; volcar datos en un programa específico; identificar la expresión analítica de una función como la adecuada para ajustar los puntos visibles en pantalla y modificar la gráfica visible, mediante deslizadores en GeoGebra. La 3ª fase la identificamos con el *saber* porque se centra en la reflexión del alumno sobre la modelización obtenida y sobre la función asociada a esa modelización.

Por otra parte, la identificación de las tres fases con los pasos y procesos del Ciclo de modelización de Blum y Leiss citado resulta más compleja. Podríamos decir que la 1ª fase comprende los pasos de *Construccción, Simplificación/Estructuración* y *Matematización*, y que la 2ª fase pertenece, en principio, a las fases de *Matematización* y *Trabajo matemático*. El problema estriba en que obtener una tabla de datos o trabajar con un programa informático no tiene por qué representar, necesariamente, *matematizar* o *trabajar matemáticamente*. La matematización implica que el alumno asume que se encuentra en el *mundo de las matemáticas* y que, en ese mundo, los conceptos, nociones y herramientas poseen un significado matemático en el seno de las matemáticas. Es decir, no creemos que se pueda decir que un alumno realiza una matematización por el simple hecho de obtener una expresión por medio del uso de un programa informático. Eso será cierto si el alumno comprende lo que ha realizado y asume que la expresión obtenida es una función, con todo lo que eso conlleva. Tampoco obtener una tabla de valores implica necesariamente que los alumnos identifiquen los datos con variables funcionales, con lo que la matematización que representa la obtención de una tabla de datos puede ser una matematización limitada o parcial.

Como veremos, los alumnos no asumen matemáticamente el producto que han obtenido (una función modelizadora), por lo que no creemos que podamos identificar, plenamente o sin dar lugar a dudas, las dos primeras fases con los pasos indicados del ciclo de modelización. Respecto a la 3ª fase la podemos identificar con los pasos 4 y 5 *(Trabajo matemático; Interpretación*) si bien la interpretación del resultado, como veremos, se mueve entre la interpretación desde las *matemáticas* y desde el *mundo real*. Algunos alumnos interpretan el modelo matemático como una función sin identificación clara con el comportamiento de un muelle y otros, en cambio, sí tienen presente que el modelo obtenido pretende describir matemáticamente el comportamiento de un muelle. Se trata de las diferencias entre los alumnos al establecer las relaciones entre S y M, que dan lugar a rutas individuales en la modelización (Borromeo, 2006; Blum y Borromeo, 2009).

1ª y 2ª Fase: el *saber hacer*

Si los alumnos saben hacer un modelo, deberán obtener la expresión analítica de la función, algo que se consigue en la segunda fase de la actividad. El *resultado matemático* (*mathematical result*) permite, de forma directa, obtener el resultado real (*real result*) simplemente identificando variables matemáticas (x y $f(x)$) con magnitudes físicas (peso y longitud).

En la primera fase, el tiempo que los alumnos dedicaron a obtener la tabla de datos no superó en ningún caso los 18 minutos, por lo que se puede calificar esta fase como de corta duración. El ambiente de trabajo era relajado, y no se observaron pérdidas de tiempo significativas. Además, todos los alumnos participaron activamente, decidiendo consensuadamente la distribución del trabajo, asumiendo que es importante realizar bien las mediciones.

Durante la práctica, los alumnos buscan regularidades entre los datos que van obteniendo. En las conversaciones que mantienen, mencionan que la longitud del muelle aumenta tantos centímetros por cada tantos gramos de peso. Se hace patente, por tanto, que los alumnos se han dado cuenta de que la relación entre los datos que van obteniendo implica una tasa de variación media constante.

El número de datos que genera cada grupo varía considerablemente (de 9 a 32), así como el nombre asignado a cada conjunto de datos. Observaron el trabajo de sus compañeros y concluyeron que las diferencias con otros grupos se deben a que trabajan con muelles distintos.

En cuanto al volcado de datos y obtención de la función de ajuste, el tiempo total que invierten los diferentes grupos ronda los 15 minutos, de los cuales, 10 minutos los dedican a introducir los datos de su tabla de valores.

En los párrafos siguientes describiremos con más detalle cómo obtienen la función de ajuste los diferentes grupos.

El grupo A decide con facilidad, en función de los valores de su tabla de datos, el intervalo visible del eje de abscisas y de ordenadas. El cambio en los ejes lo determinan una vez que han introducido los datos de la tabla de valores, que toman la forma de puntos del plano visibles en la pantalla del ordenador. Este grupo realiza el ajuste mediante una recta determinada a partir de dos puntos visibles en la pantalla (Gráfico 1. Recta determinada a partir de los puntos (150,13) y (750,262)).

Los grupos B, C, D y E ajustan los datos mediante la función afín $f(x) = ax + b$. (Gráfico 2, Gráfico 3, Gráfico 4 y Gráfico 5). El grupo C, al contrario que sus compañeros, utiliza la longitud del muelle en el eje de abscisas y el peso en el eje de

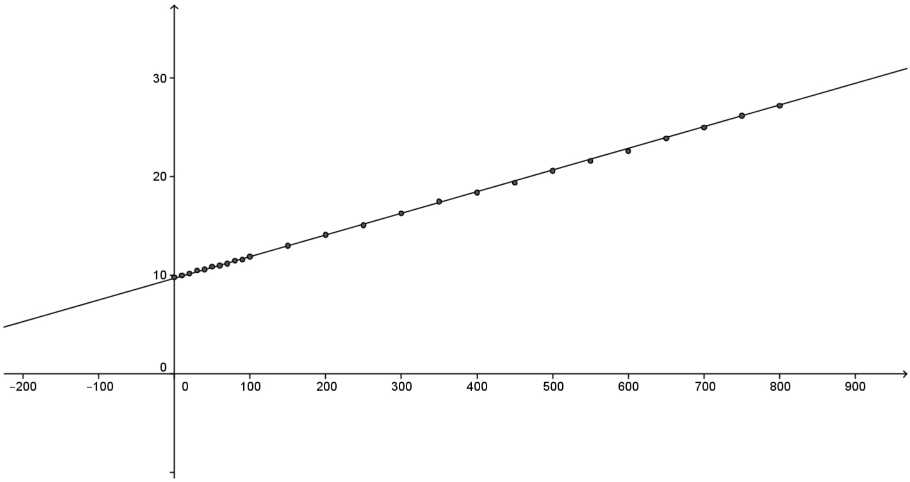


Gráfico 1. Datos y función obtenida por el Grupo A: *y = 0.02x + 9.7*

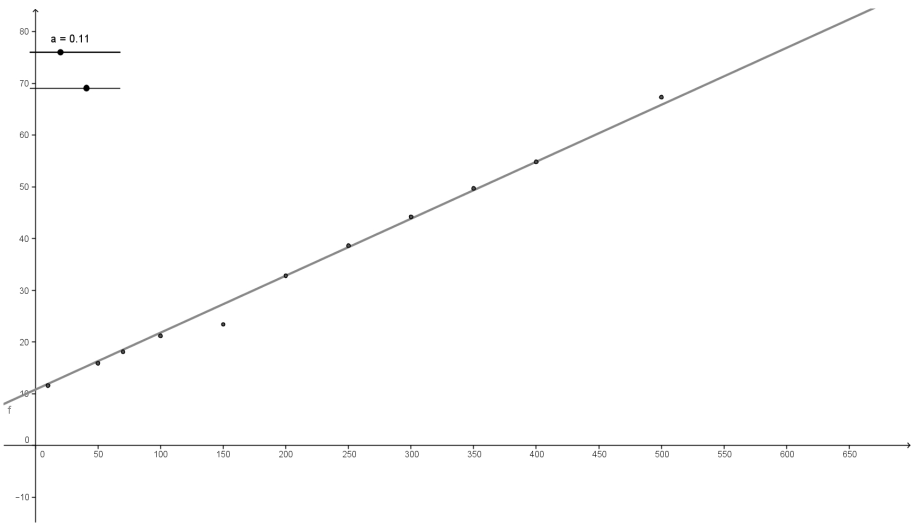


Gráfico 2. Datos y función obtenida por el Grupo B: *f(x) = 0.1x + 10.8*

ordenadas (Gráfico 3). Por otro lado, el grupo D tiene dificultades para fijar los intervalos visibles de los ejes. Dudan sobre cómo introducir los parámetros y modificar su valor.

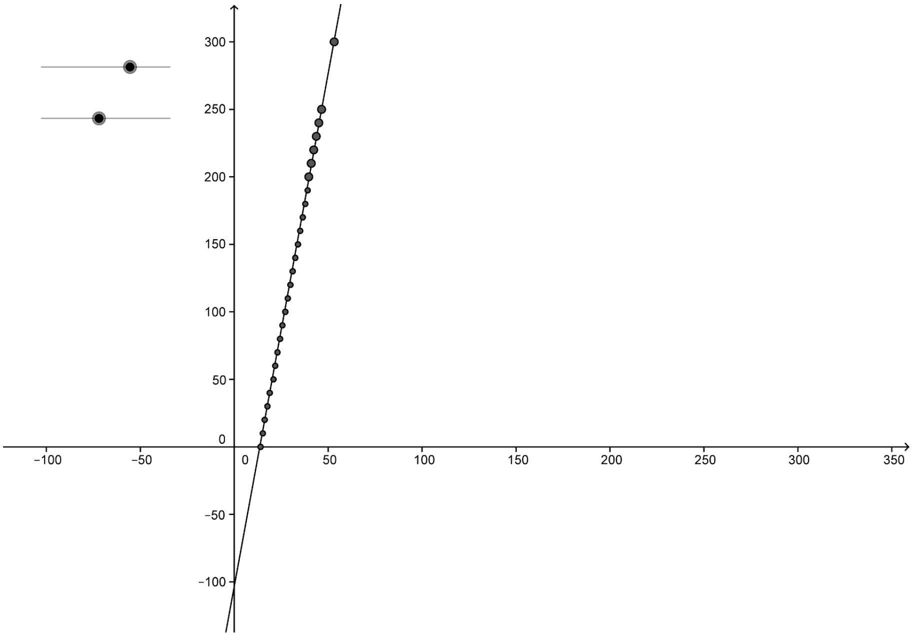


Gráfico 3. Datos y función obtenida por el Grupo C: *f(x)=7.6x-103.4*

Por su parte, el grupo F ajusta los datos mediante una recta de la forma $y = ax + b$. Usan y modifican parámetros para obtener la recta adecuada (Gráfico 6).

Los resultados obtenidos muestran, que generar un número de datos grande no influye de forma decisiva en la determinación adecuada de la función de ajuste. Así, el grupo A generó 25 pares de puntos frente a los 13 del grupo F y ambos grupos obtuvieron la misma función.

Esta parte de la actividad se centra en la parte técnica y, limitadamente, la parte tecnológica de la actividad planteada como praxeología. Los apartados prácticos y teóricos no se manifiestan en ningún momento en la actividad de los alumnos, que realizan y enfocan su trabajo como un proyecto puramente técnico: deducir una expresión mediante el uso técnico, aprendido previamente, de un programa informático. Los grupos A y F no plantean el problema como la búsqueda de la expresión analítica de una función que posea una gráfica que cumpla una condición determinada (ajustar una serie de puntos del plano) sino

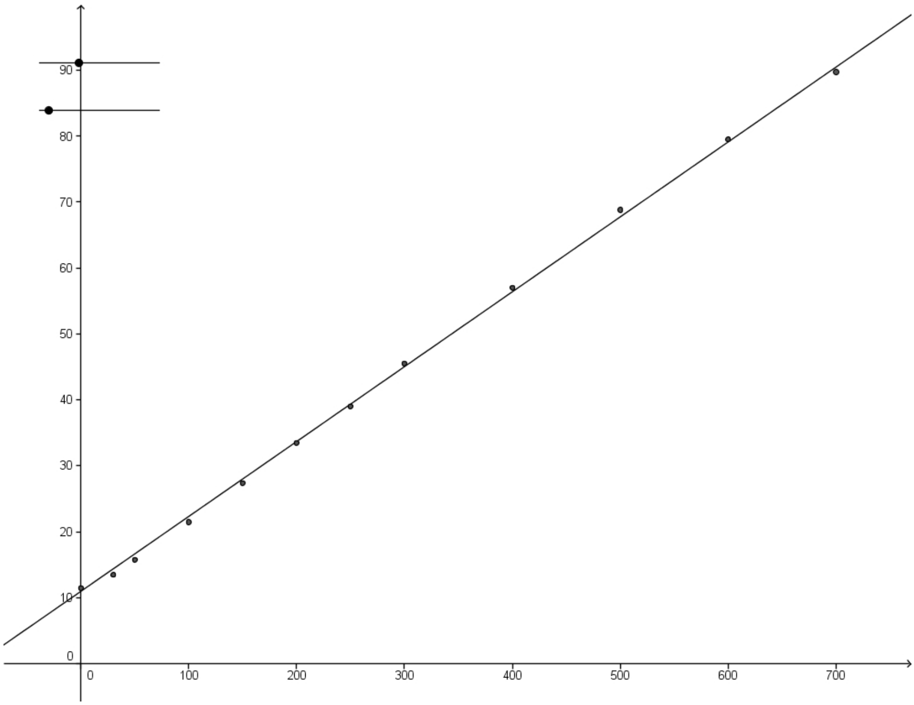


Gráfico 4. Datos y función obtenida por el Grupo D: *f(x) = 0.11x + 11*

como la búsqueda de la ecuación de una recta. Los puntos del plano que observan en la pantalla son puntos en el plano y no pares de puntos vinculados por una relación de dependencia entre valores numéricos. Así, la variable *y* del par *(x, y)* no es considerada una variable dependiente de una función por determinar, sino que es tomada como la segunda coordenada de un punto del plano. Lo dicho cobra mayor sentido con la forma de obtener la expresión algebraica del grupo A, que plantea y resuelve el problema determinando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos concretos. En su caso, ni siquiera la noción de variable se haya presente o tiene repercusión alguna en su trabajo de forma clara. Dilucidar si realmente los alumnos consideran los conjuntos de datos como variables funcionales en estas dos fases resulta complicado, pero el hecho de que dos de los seis grupos determinen la expresión como una recta (que ajusta todos los datos o que pasa por dos de los puntos visibles) lleva a pensar que no es así. Se podría especular que los integrantes de los otros grupos –que determinan

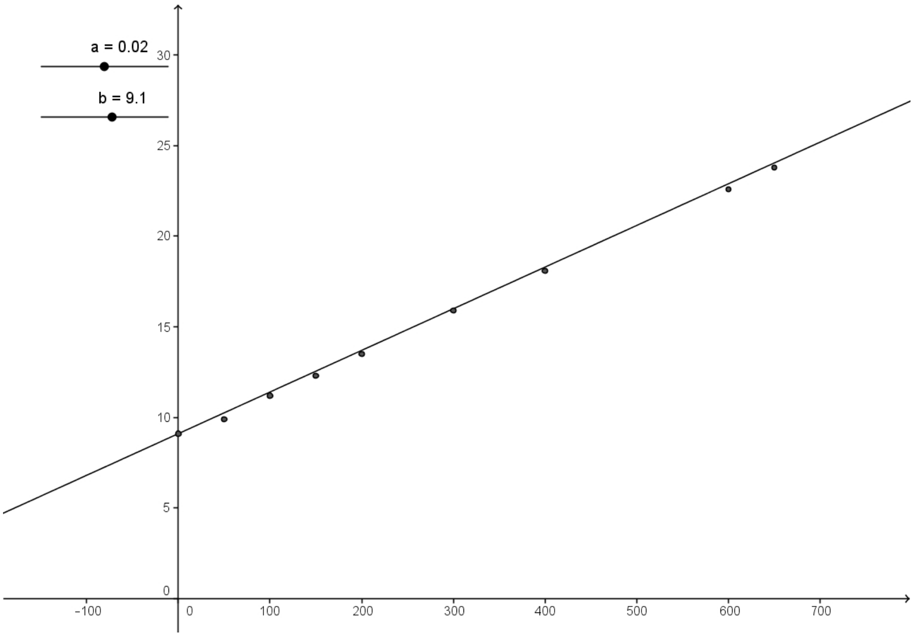


Gráfico 5. Datos y función obtenida por el Grupo E: *f(x) = 0.02x + 9.1*

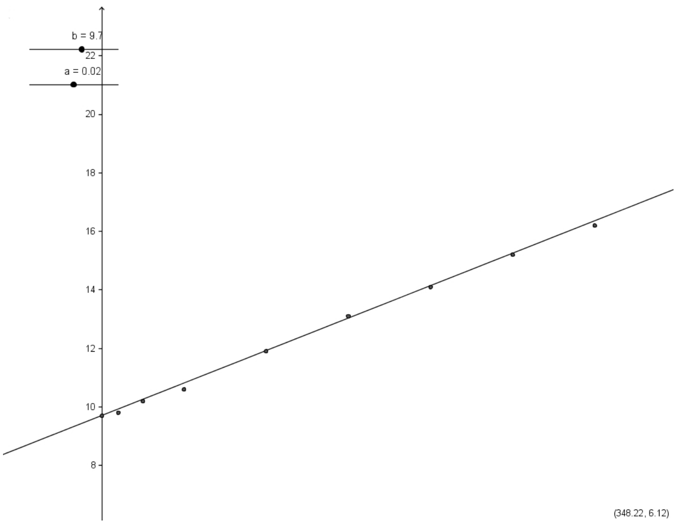


Gráfico 6. Datos y función obtenida por el Grupo F: *y = 0.02x + 9.7*

una función– sí identifican los datos como variables funcionales, pero destacamos que, en realidad, los alumnos se han limitado a usar una técnica aprendida previamente.

En este punto, se resalta que los alumnos obtienen al término de la segunda fase una expresión matemática considerada como *resultado matemático* y, al mismo tiempo, *real* a la cuestión inicial planteada (por simple identificación de las variables con las magnitudes físicas). Esto puede llevar a pensar que los alumnos han conseguido generar un modelo matemático –al menos en cuatro de los seis grupos– de forma exitosa. Incluso se podría afirmar que el resultado de los grupos que obtuvieron una recta como lugar geométrico representa un modelo matemático que relaciona las variables de peso y longitud, restando importancia al hecho de que no obtengan una función para que consigan un *resultado matemático*. El hecho de que los alumnos obtengan un modelo matemático (la función) puede llevar a la conclusión de que han completado el ciclo de modelización en su mayor parte porque han realizado los procesos de simplificación, estructuración, matematización y trabajo matemático que conducen a la obtención de un resultado matemático (Greefrath, 2011). Como veremos al analizar las respuestas del cuestionario, el *saber hacer* un modelo no implica que los alumnos comprendan los conceptos y nociones vinculados a ese *saber hacer*.

3ª Fase: El *saber*

El cuestionario, compuesto por 9 preguntas (Tabla 1), fue planteado con el objetivo de mostrar hasta qué punto los alumnos integraban el saber en el saber hacer. Acudiendo a su competencia generando un modelo, los alumnos han demostrado que son competentes pero, ¿esa competencia puede decirse que sea una competencia asociada al conocimiento matemático?

Los alumnos contestaron el cuestionario de forma individual. Al entregarles el cuestionario, se apuntaron en el encerrado las funciones y expresiones obtenidas por cada uno de los grupos para que observaran que los valores de a y b en la expresión $f(x) = ax + b$ son, al mismo tiempo, variables y constantes. Esa visibilidad de la condición de parámetros de a y b resulta fundamental para las preguntas 2 y 3.

Un análisis completo de las respuestas conllevaría un estudio personalizado encaminado a mostrar las diferentes rutas que establecen los alumnos (Borromeo, 2006; Blum y Borromeo, 2009). Por falta de espacio, optaremos por realizar un análisis de respuestas que *prime* los elementos en común, entendiendo que no se pretende un estudio cuantitativo de las respuestas obtenidas a pesar de mostrar algunas de ellas a través de porcentajes. Para ello, hemos agrupado las respuestas en función del objetivo fundamental de la pregunta. Por un lado, mostraremos los resultados que se asocian más a la interpretación del modelo o del resultado obtenido (preguntas 1, 6, 7 y 9) y, por otro lado, los resultados relacionados con las variables y parámetros que aparecen en el modelo (preguntas 2, 3, 4, 5 y 8).

Interpretación del modelo y del resultado

La primera pregunta del cuestionario solicita que los alumnos identifiquen el tipo de función que han obtenido e interpreten el tipo de función en el contexto origen del modelo. Se buscaba averiguar qué elemento o elementos característicos usan los alumnos para nombrar la función. En la Tabla 2 se muestra que un porcentaje elevado de alumnos identifican el tipo de función con su representación gráfica (50%). Además, el hecho de que identifiquen la representación gráfica que obtienen con una relación de proporcionalidad directa entre las variables (22,7%) indica que los alumnos identifican la presencia de una tasa de variación media constante con la proporcionalidad directa.

Algunos alumnos convierten una expresión que involucra una relación funcional en una ecuación (Figura 2), algo necesario, según Ursini y Trigueros (2006), para determinar los valores de una variable en función de los valores de la otra. La cuestión fundamental es que esta identificación no se realiza al determinar el valor concreto de una variable en función de un valor de la otra, sino que la identificación es la de la propia expresión funcional con una ecuación.

La pregunta número seis (¿qué longitud se alcanza, según el modelo obtenido, si no se coloca peso en el muelle?), se centra en comprobar si los alumnos observaban claramente la diferencia entre los datos que habían obtenido experimentalmente, que dieron lugar a la tabla de datos, y la función que modeliza el fenómeno, construida a partir de dicha tabla de datos. De las seis funciones obtenidas a partir de las tablas de datos confeccionadas en el laboratorio, sólo dos funciones poseen un valor de b ($f(x) = ax + b$) igual al valor correspondiente a *0 g* en la tabla de datos ($f(x) = 0.02x + 9.1$ del grupo E y $f(x) = 0.02x + 9.7$ del grupo F). La función representa un ajuste de datos, lo que se traduce en que el valor correspondiente a *0 g* obtenido usando la función ($f(0)$) será diferente al

Tabla 2. Interpretación de la función obtenida

	Nº de alumnos	%
Vinculan/Identifican el tipo de función con su representación gráfica (recta).	11	50
Utilizan la forma que toma la expresión algebraica como definitoria de la función (polinómica).	1	4,5
Relacionan la representación gráfica y el crecimiento con una relación de proporcionalidad directa.	5	22,7
Relacionan la pregunta con la propiedad de continuidad de las funciones.	3	13,6
No responden.	2	9
Total	22	100

valor en la tabla de datos. Sólo un alumno detecta la contradicción que representa disponer de dos resultados diferentes para el mismo peso.

Una parte importante de los alumnos (40,8%) no considera que la modelización realizada le resulte útil para obtener datos del problema no presentes en

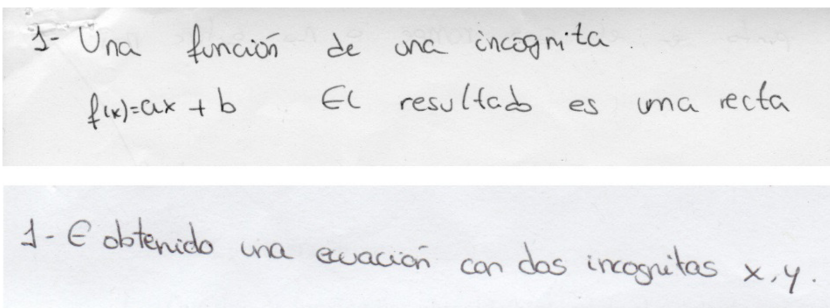


Figura 2. Identificación de la función con una ecuación

Transcripción: *Una función de una incógnita. f(x) = ax + b El resultado es una recta*
He obtenido una ecuación con dos incógnitas x, y

la tabla de datos, como muestra el hecho de que usen la tabla de datos y no la función para obtener su respuesta. Los siete alumnos (31,8%) que mencionan que el valor obtenido es lo que mide el muelle son los únicos que realmente interpretan el resultado.

El objetivo de preguntar si el muelle se puede alargar indefinidamente (pregunta 7), es comprobar si los alumnos distinguían adecuadamente entre la función obtenida y la función aplicada en el caso concreto de la modelización realizada o, lo que es lo mismo, la interpretación del resultado matemático en el contexto real. Evidentemente, el muelle no puede ser estirado indefinidamente ni encogido (valores negativos de longitud), sometido a un peso negativo o a un peso igual a $+\infty$. El dominio de definición de la función aplicada al modelo real debe ser *[0, G]*, siendo *G* el peso máximo que se corresponde con el peso en el que el muelle alcanza la longitud del alambre usado para construir el muelle (*L*). De esa forma, el recorrido de la función resulta *[l, L]*, siendo *l* la longitud del muelle sin ser sometido a peso. Conviven, por tanto, dos funciones: la función matemática, de dominio y recorrido igual a R y la función matemática que representa una modelización del fenómeno físico, con dominio y recorrido diferente.

Nos encontramos de nuevo ante el 5º paso del ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007) –*Interpretación*– en el que los resultados son trasladados a la situación real para obtener un resultado real asociado al modelo real mediante un proceso de validación. Así mismo, se halla presente el aspecto F5 descrito por Ursini y Trigueros (2006) que consiste en determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

A partir de los resultados obtenidos, podemos afirmar que los alumnos no utilizan explícitamente el dominio y recorrido de la función ni responden en términos de un intervalo concreto de la variable independiente y su correspondiente para la variable dependiente. Tampoco mencionan que la función obtenida debe ver modificado su dominio para poder obtener una función como *resultado real*. Solo tres alumnos señalan la relación de la pregunta con el dominio y recorrido de la función y la relación entre intervalos que establece la función, pero también resulta claro que los alumnos son conscientes, en general, de que el muelle no puede ser alargado indefinidamente. Ello nos lleva a la conclusión de que existe una desconexión o ruptura, en un porcentaje alto de alumnos entre el *resultado matemático* y el *resultado real*, así como en su interpretación en contexto. Los alumnos no realizan el proceso de interpretación en términos propios relativos al conocimiento de las funciones (dominio, recorrido e intervalos). Volvemos a encontrar claras deficiencias en el conocimiento matemático relacionado con el *saber*.

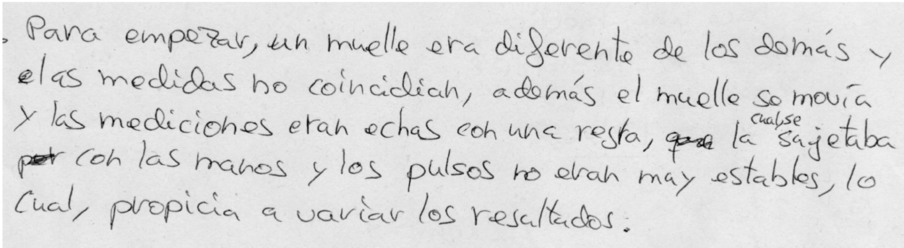

. Para empezar, un muelle era diferente de los demás y ~~e~~las medidas no coincidian, además el muelle se movía y las mediciones eran echas con una regla, ~~que~~ la cual se sujetaba ~~por~~ con las manos y los pulsos no eran muy estables, lo cual, propicia a variar los resultados.

Figura 3. Respuesta de un alumno en relación con las características de cada muelle

Transcripción: *Para empezar, un muelle era diferente de los demás y las medidas no coincidían, además el muelle se movía y las mediciones eran hechas con una regla, la cual se sujetaba con las manos y los pulsos no eran muy estables, lo cual, propicia a variar los resultados*

El hecho de que los diferentes grupos obtengan funciones diferentes no conduce a los alumnos a vincular las características de cada muelle con los parámetros presentes en las funciones obtenidas (pregunta 9 del cuestionario), con lo que la interpretación del resultado matemático en el contexto real resulta, nuevamente, deficiente. Es más, separan el fenómeno físico del modelo matemático hasta el punto de considerarlos independientes. En la Figura 3 se muestra la respuesta de un alumno en la que queda recogido lo anterior. Solo un alumno identifica los parámetros presentes con las características específicas de cada muelle usado aunque, la mayoría de ellos, mencionan la diferencia en las características físicas de los muelles (77,3%).

Nuevamente aparecen deficiencias en la interpretación del resultado en contexto, lo que indica la escasa importancia que concede el alumno a la interpretación del resultado. El alumno considera que debe, únicamente, obtener un resultado matemático a una tarea encomendada, siendo la interpretación del mismo un elemento secundario cuando no prescindible.

Variables y parámetros

La atención se centra en comprobar si los alumnos reconocen y diferencian las variables dependientes de las independientes y si vinculan los nombres asignados en la función a las variables (x e y) con las magnitudes del fenómeno físico estudiado (peso y longitud). Se intentó comprobar si los parámetros del modelo eran reconocidos y si eran mencionados como variables o no. Es aquí donde se tratan los aspectos F1, F4 y F6 descritos por Ursini y Trigueros (2006): la diferenciación jerárquica entre variable y parámetro y la condición de variable constante de los parámetros (Drijvers, 2003).

En la segunda parte de la pregunta 3 (¿qué significado tiene el parámetro en el experimento?) se pretende dilucidar si los estudiantes comprenden las conexiones y relaciones que existen entre los distintos pasos del ciclo de modelización: la obtención de la función de ajuste consiste en una matematización de un caso real, con lo que nos encontramos en una fase intramatemática (trabajo en el seno de la Matemática), fuertemente relacionada con algo extramatemático (la situación real a modelizar).

En la Tabla 3 se observa que sólo 36,4% de los alumnos identifican correctamente las dos variables (dependiente e independiente). Los errores al identificar las variables provienen, por ejemplo, de considerar en la expresión $f(x) = ax + b$, el valor b como variable independiente porque su valor no depende del valor de x o no varía (identificando la variable independiente con una constante-variable). En la misma línea, el valor a o ax, es identificado como la variable dependiente porque su valor depende del valor que tome x. Es decir, la distinción entre variable dependiente e independiente se realiza en función de su vinculación con x.

En el siguiente extracto de una de las entrevistas podemos observar lo que se acaba de exponer:

30 Profesor: ¿Y la independiente?
31 Alumno 6: El *11*, que no varía.
20 Alumna 3: [...] Eh, sí, la dependiente es la que depende de la *x* entonces la independiente es la que es siempre constante [...] [*Se ríe*].

50,1% de los alumnos consideran los parámetros como variables dependiente o independiente al constatar que su valor varía en las expresiones que observan en el encerado. Aparecen, por tanto, las dificultades en la comprensión del parámetro asociadas a su condición de constante-variable (Drijvers, 2003). En definitiva, los resultados obtenidos muestran que un porcentaje elevado de alumnos (72,7%) no sabe qué es un parámetro. Este resultado contrasta con el hecho de que estos alumnos han trabajado con parámetros en múltiples contextos (continuidad, derivada y sus aplicaciones, estudio y determinación de asíntotas) desde 3º de la ESO. Por otra parte, se pone en cuestión las ventajas del uso de los

Tabla 3. Identificación de las variables dependiente e independiente

		Nº de alumnos	%
Identifican correctamente la variable dependiente e independiente.	Identifican la variable *x* como *peso* y la variable *y* como *longitud*.	3	13,6
	Identifican la variable independiente como *x* y la dependiente como *y*.	1	4,5
	Identifican el peso como la variable independiente del problema y la longitud como la dependiente.	4	18,2
Identifican de forma deficiente las variables.	Identifican *0.11x* y 10.8 o 11 como variable dependiente.	6	27,3
	Identifican como variables dependiente e independiente los números *a* y *b* de la expresión $f(x) = ax + b$.	5	22,8
	Otras opciones.	3	13,6
Total		22	100

programas de geometría dinámica y de deslizadores para una mejor comprensión del concepto de parámetro (Drijvers, 2003).

Las preguntas 4 y 5 se corresponden claramente con los aspectos F2 y F3 descritos por Ursini y Trigueros (2006). El objetivo de estas preguntas es que los alumnos apliquen el modelo obtenido para calcular datos que no aparecían en la tabla de valores. Como se puede observar en la Tabla 4, solo 27,2% de los alumnos usan la función en ambas preguntas y un porcentaje alto de alumnos utilizan en una o ambas preguntas la regla de tres (50%).

En la Figura 4 se muestra la respuesta de un alumno que utiliza la regla de tres para responder a la pregunta 4.

El uso de la regla de tres por parte de los alumnos, nos remite a la consideración del problema como un caso en que las magnitudes son proporcionales o, lo que es lo mismo, se identifica la relación entre variables con una relación que

Tabla 4. Uso de la función para obtener nuevos datos

	Nº de alumnos	%
Utilizan la función para obtener los datos solicitados en las dos preguntas.	6	27,2
Utilizan la regla de tres para obtener los datos solicitados en las dos preguntas.	8	36,4
Utilizan la regla de tres en una de las preguntas y la función en la otra.	3	13,6
Usan la regla de tres y la función en la misma pregunta.	1	4,5
Incluyen únicamente un valor numérico en sus respuestas.	3	13,6
Para calcular el peso, aproxima el valor mediante valores próximos de la tabla de datos.	1	4,5

sigue una ley de proporcionalidad directa. De esta forma, aparece claramente la confusión entre tasa de variación media constante y proporcionalidad directa, que ya hemos comentado con anterioridad, que se encuentra en relación con la representación gráfica de una recta:

15 Profesor: Sigue una recta pero, ¿es directamente proporcional?
16 Alumno 2: Si, creo que sí, sí.
70 Alumna 3: Claro, porque tienes la tabla de datos y dices, si tengo esto y tengo tanto entonces de esto tengo que tener otro tanto y haces una regla de tres (...)

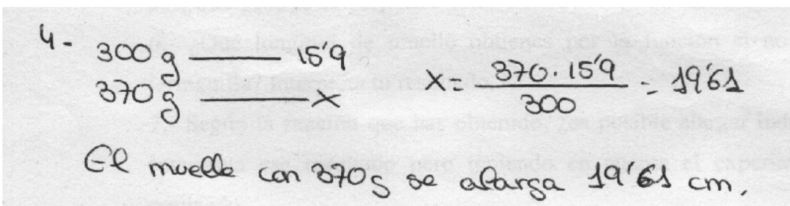


Figura 4. Uso de la regla de tres en la pregunta 4

Sobre el escaso número de alumnos que usan la función para calcular los valores solicitados, en las entrevistas aparece con claridad la mención al *saber* asociado a las funciones. En el siguiente extracto, el alumno reconoce la influencia que ese conocimiento tiene sobre las respuestas al cuestionario para no aplicar la función:

138 Alumno 7: (...) claro, es que si no tienes realmente el concepto de función después no lo vas a saber aplicar. De hecho aquí [*señala una de sus respuestas*] ni menciono que es una función esto. Si no sé que esto es una función, ¿cómo lo voy a aplicar aquí? [*Señala su respuesta*]. Yo creo que es ese el problema que teníamos.
148 Alumno 7: (...) claro, la notación que se utiliza y todo, eso tienes que conocerlo realmente para saber de qué estás hablando (...)

La pregunta 8 (deducir cómo conocer el peso colocado en el muelle si se conoce la longitud del muelle), se relaciona con el aspecto F2 descrito por Ursini y Trigueros (2006) y con las operaciones con funciones. Se pretendía evaluar si los alumnos conocían el significado de la función inversa y si sabían aplicarlo al caso concreto de la modelización realizada. De los 22 alumnos, sólo una alumna menciona expresamente la inversa de la función, aplica el método algorítmico que ha aprendido (cambia la x por la y y viceversa) pero se equivoca al realizar el cálculo de la función inversa y la nombra como y en vez de f^{-1} (Figura 4).

La forma de presentar el resultado parece indicar que los alumnos consideran la expresión de la función como una relación entre variables que permite calcular una variable en función de la otra. Las palabras *sustituir* y *despejar* aparecen a menudo. El cálculo es un cálculo algebraico sin relación alguna con las funciones y su significado. El análisis es algebraizado y, como ya comentamos brevemente con anterioridad, las expresiones funcionales son consideradas y tratadas por los alumnos como igualdades, ecuaciones o expresiones en las que las variables no son variables funcionales y deben ser despejadas, llegando a ser nombradas por algunos alumnos como incógnitas (Figura 5).

Es importante que el alumno transforme la relación funcional en una ecuación para obtener un resultado (Ursini y Trigueros, 2006) pero, además, esa transformación debe ser interpretada en términos funcionales para que resulte un aspecto positivo en el contexto de la actividad que se realiza. Dicho de otro modo, los alumnos realizan un cálculo y obtienen un resultado pero no utilizan el "saber" asociado al "saber hacer" del cálculo.

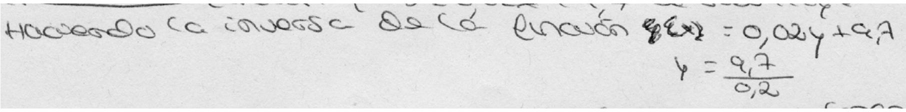


Figura 5. Cálculo de la función inversa

Transcripción: *Haciendo la inversa de la función x=0.02y+9.7;* $y = \dfrac{9.7}{0.2}$

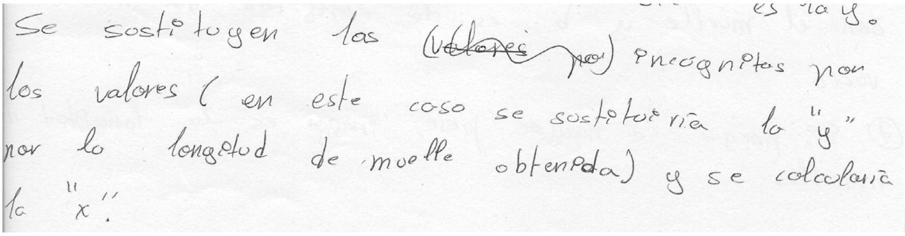


Figura 6. Identificación de la función con una ecuación

Se sustituyen las incógnitas por los valores (en este caso se sustituiría la "y" por la longitud del muelle obtenida) y se calcularía la "x".

CONCLUSIONES

¿Cuál es la razón por la cual los alumnos desconocen, de forma mayoritaria (63,6%), el significado de "*variable dependiente*" y "*variable independiente*", así como los términos de uso habitual y básico al estudiar funciones? ¿Cuál es la razón de que prácticamente la totalidad de los alumnos participantes (95,5%) desconozcan el significado del término "*parámetro*"? La razón fundamental se encuentra en que los ejercicios que realizan habitualmente se resuelven repitiendo una serie de pasos prefijados, lo que los convierte en ejercicios rutinarios o de tipo algorítmico. Como consecuencia, la comprensión, uso de conceptos, nociones y términos se hace innecesaria. La enseñanza basada en el uso de algoritmos transforma las funciones y su uso en ecuaciones o fórmulas para resolver el ejercicio propuesto de una forma fija e invariable.

Se cree que uno de los peligros al hablar de la introducción de la modelización en la Enseñanza Secundaria, es que el profesor suponga, por ejemplo, que en el proceso de obtención de la tabla de datos los alumnos han identificado dos variables presentes en el problema (masa y longitud) con dos variables matemáticas (dependiente e independiente), con lo que han realizado un primer proceso de matematización de la realidad. Ese primer paso lleva a plantearse la resolución de un problema matemático: ¿qué tipo de relación matemática se establece entre las variables (físicas y matemáticas)? La segunda fase da respuesta a esa pregunta, puesto que obtienen una expresión matemática que relaciona ambas variables, podremos suponer que el modelo matemático que obtienen integra todo aquello que una función conlleva: variable dependiente e independiente, relación de dependencia entre variables mediante una expresión matemática, parámetros, relación de la expresión analítica con la gráfica de la función, etc. (Greefrath, 2011).

En definitiva, se supone que obtener un resultado matemático representa que la *praxis* se ha integrado en el *logos*, característica de las evaluaciones del conocimiento que priman la obtención de resultados correctos. Un profesor puede, por tanto, plantear la modelización como una actividad encaminada a la obtención de un modelo matemático, suponiendo la integración de *praxis* y *logos*. Así, la enseñanza de las matemáticas se centra en el aprendizaje de técnicas, τ, resultando de menor importancia la tecnología asociada a la técnica, ϕ, y la teoría que justifica dicha tecnología, θ. Como consecuencia, el bloque praxeológico $[T/\tau/\phi/\theta]$ se halla claramente descompensado. Además, la práctica docente encaminada a que el alumno obtenga un resultado correcto lleva a que éste no se cuestione el resultado que obtiene. Si utiliza adecuadamente las técnicas que ha aprendido, no es necesario interpretar el resultado porque solo se le solicita obtener un resultado.

Los alumnos pueden obtener un modelo sin problemas al término de la 2ª fase, lo que podría llevar a pensar que han integrado *Saber* y *Saber hacer*, pero al responder preguntas en la 3ª fase es cuando las desconexiones entre *praxis* y *logos* resultan evidentes. Por ejemplo, el uso mayoritario de la regla de tres para responder a las preguntas 4 y 5, representa una constatación de la identificación de la recta y la tasa de variación media constante con una relación de proporcionalidad directa. Además, representa también la presencia de deficiencias importantes en el proceso de matematización y trabajo matemático, pues el modelo obtenido no es usado para responder las preguntas. Representa, al mismo tiempo y en relación directa con lo anterior, una ruptura o desconexión entre *saber* y *saber hacer*.

La obtención de la función parece no ser útil para alcanzar datos no presentes en la tabla de datos, para una parte importante de los alumnos. Por tal motivo, el paso del ciclo de modelización consistente en el traslado del modelo a la situación real y su validación no se produce. El hecho de que algunos alumnos usen la función en una de las preguntas y una regla de tres en la otra nos lleva a pensar que no tienen una idea clara de lo que han conseguido hacer (obtener un modelo). De hecho la importancia que conceden a la tabla de datos a la hora de obtener nueva información, lleva a pensar que aunque deducen la función, no la consideran de utilidad para estudiar el fenómeno físico que analizan. La tabla de datos resulta más fiable y útil, quedando la función como un simple cálculo que los alumnos debían realizar.

Además, la comparación de sus respuestas a la pregunta 9, con las respuestas a las preguntas anteriores, nos lleva a pensar que se halla presente una deficiente comprensión del significado de *variable funcional* y *parámetro*, de igual manera se muestra una limitada comprensión de lo que significa *dominio de definición* y *recorrido, así como* las relaciones entre intervalos de la variable dependiente con intervalos de la variable dependiente al hablar de funciones. Resulta destacable que la mayoría de los alumnos asuman que las características del muelle modifican el valor de la función y que, sin embargo, esta convicción no se manifestase claramente en las preguntas precedentes al hablar de las variables presentes en el modelo. La modificación de la función se limita al valor de a y b en cada muelle usado, aunque la forma de la función se mantiene ($f(x) = ax+b$). Los alumnos tienen en cuenta que cada muelle se comporta de forma diferente, por tanto da lugar a una tabla de datos diferente en cada caso. Pero este hecho no lo explican en términos de conceptos y conocimientos asociados a las funciones. Por ejemplo, los alumnos comprenden la utilidad del cálculo de la función inversa y, de hecho, utilizan el proceso de cálculo de la función inversa en el contexto de la modelización, pero ambas cosas aparecen desvinculadas, de forma que calculan la función inversa pero no le dan ese nombre.

En resumen, las relaciones (R) entre la situación problemática real (S) y la colección de entidades matemáticas (M), son claramente deficientes cuando no inexistentes, lo que hace que la actividad entendida como una tripleta (S, M, R) resulte una modelización claramente deficiente.

Todos los conceptos y conocimientos mencionados son básicos en el estudio de las funciones, los alumnos conocían muchos de ellos años antes de realizar las experiencias. La función asociada al modelo es una función afín, que no puede ser calificada como una función compleja, aún así, los alumnos tienen serias dificultades con los elementos presentes en el modelo. Creemos que solo desde la descontextualización, compartimentación, desconexión o la desvinculación entre *saber* y *saber hacer* y la algoritmización del saber matemático es posible explicar estos hechos. Como afirma Bolea (2002, p. 49), en relación a las definiciones en la Enseñanza Secundaria, las *"definiciones hacen un papel esencialmente descriptivo con la finalidad de precisar ciertas características de objetos supuestamente conocidos"*. El problema es que los objetos "supuestamente conocidos" son, en realidad, "objetos desconocidos", con lo que las definiciones aportadas o alcanzadas en las clases no forman parte del saber matemático que los alumnos deben comprender, asimilar y adquirir.

En el marco de una enseñanza basada en la resolución de ejercicios a través de métodos básicamente algorítmicos, la comprensión adecuada de conceptos y nociones, las definiciones, propiedades, teoremas, etc. carecen de utilidad, con lo que el alumno tiende a prescindir de ellas o restarles importancia. Se produce de esa forma una trivialización del saber matemático (Gascón, 2001), que reduce el saber matemático a la realización de cálculos rutinarios al servicio de problemas o situaciones intramatemáticas o extramatemáticas.

REFLEXIÓN FINAL

Si las actividades de modelización, como la que se ha descrito anteriormente, son llevadas al aula de Secundaria o Bachillerato de forma que se prime la obtención de la función de ajuste, gran parte de su utilidad se perderá y no contribuirá a que los alumnos adquieran y comprendan mejor conocimientos considerados como básicos en el estudio de las funciones en estas etapas educativas. Creemos que las consecuencias de este modelo de enseñanza-aprendizaje, basado en una enseñanza compartimentada o dividida en bloques aislados y basado en la enseñanza de algoritmos (incluidos los problemas reducidos a algoritmos), constituye un obstáculo de origen didáctico que puede manifestarse con fuerza en actividades de modelización como la aquí descrita. La forma de evitarlo o reducir su influencia debe basarse en que la actividad de modelización constituya una praxeología completa, por tanto, debe evitarse que la actividad de modelización se vea limitada o reducida a la obtención del modelo o la realización de cálculos utilizando la función obtenida (obtener una longitud a partir de un peso, por ejemplo).

Desde nuestro punto de vista, serían necesarios cambios en la propuesta realizada, de forma que las preguntas que se han analizado (u otras) se planteen durante y no al finalizar el proceso de obtención del modelo. Por ejemplo, la confusión entre tasa de variación media constante con la proporcionalidad directa estará ya presente en la fase de obtención de datos. Es ese el momento en que se deben realizar preguntas que lleven a los alumnos a comprender qué significa una relación de proporcionalidad directa y la diferencia entre una relación de proporcionalidad directa entre variables y una relación que conlleva que la tasa de variación media es constante. Esa misma pregunta puede dar lugar a nuevas preguntas que introduzcan la 2ª fase, momento en que se podrá tratar qué variables físicas y matemáticas están presentes, la diferencia entre la gráfica de una función que describe una relación de proporcionalidad directa de otra que no, etc. Los parámetros, el dominio y recorrido diferente de la función matemática y de la función en contexto, etc. serían temas a tratar en ese momento. También podría plantearse la misma modelización en edades más tempranas y usarla como medio de introducción de conceptos y nociones clave en funciones: variables, relación funcional, expresión analítica de una función, variables dependiente e independiente, parámetros, gráfica, etc. Entran en juego en este punto las creencias y concepciones del profesor, que derivan en un modelo epistemológico y docente (Gascón, 2001), lo que condiciona el uso o enfoque de la modelización en la enseñanza (Borromeo, 2006).

REFERENCIAS

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *29 (5),* 339-352.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues mathematics instruction, *Educational studies in mathematics*, *(22)* 37-68. Ed. Dorfler

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan, (2006), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing,

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1 (1)*, 45-58.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, *38 (2)*, 86-95.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19 (2)*, 221-266.

Doerr, H. M. (2006). Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models. *ZDM*, *38(3)*, 255-268.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral. Universidad de Utrecht, (www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation).

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4 (2)*, 129-159.

Gascón, J. (2011). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, *31 (1)*, 9-50.

Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling–Overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo, y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling (ICTMA 14)*, (pp. 301–304). New York: Springer.

Kaiser, G., Sriraman, B. y Blomhøj, M. et al. (2007). Modelling and applications –Differentiating perspectives and delineating commonalties. *Comunicación en el CERME 5, WG 13. Modelling and Applications* (pp. 235-242). http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/

N.C.T.M. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: S.A.E.M. THALES.

Orden ESD/1729/2008 de 11 de Junio. BOE 18/06/08, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato.

OCDE (2012). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias* (2013). Madrid: MECD del Gobierno de España (Traducción al castellano de la publicación original de la OCDE).

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE del 5 de Enero de 2007.

Schmidt, B. (2010). Modeling in the classroom motives and obstacles from the teacher's perspective. *Comunicación en el CERME 6 2010, WG 11. Applications and Modelling* (pp. 2066-2076).

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática, 18 (3)*, 5-38.

Ursini, S. (2011). Il Modello 3UV: uno strumento teórico a disposizione degli insegnanti di matemática. *Quaderni CIRD 2011*, 59-70. (http://www.openstarts.units.it/dspace/handle/10077/3845).

DATOS DE LOS AUTORES

Jose Benito Búa Ares
bua@edu.xunta.es
IES Sánchez Cantón
Pontevedra. España

Teresa Fernández Blanco
teref.blanco@usc.es
Universidad de Santiago de Compostela. España.
Depto. Didáctica de las Ciencias Experimentales. Área de Didáctica de la Matemática.
Facultad de Ciencias de la Educación. Campus Norte.

Mª Jesús Salinas Portugal
mjesus.salinas@usc.es
Universidad de Santiago de Compostela. España.
Depto. Didáctica de las Ciencias Experimentales. Área de Didáctica de la Matemática.
Facultad de Ciencias de la Educación. Campus Norte.

CONTRIBUCIÓN A LA DOCENCIA

Abriendo las puertas del razonamiento: los "problemas de Olimpiada" como herramienta

A path to reasoning: Using problems from Mathematical Olympiad

Claudia Gómez Wulschner y Esteban Landerreche Cardillo

Resumen: A partir de las respuestas de los alumnos en la Olimpiada de Mayo, evento donde son aplicadas pruebas a estudiantes de primaria y secundaria en todo México, se intenta plantear un enfoque diferente para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica. Los problemas "Tipo Olimpiada" trascienden el plan de estudios y el bagaje académico de los estudiantes. Es por ello que postulamos que presentar problemas de este tipo, los cuales llevan al alumno a considerar diferentes formas de llegar a una respuesta, tiene un impacto positivo en el desarrollo lógico matemático de los jóvenes y se traduce en un mejor entendimiento de las matemáticas.

Palabras clave: concursos de matemáticas, problemas de olimpiada, problemas de respuesta abierta.

Abstract: From the students' answers in the Olimpiada de Mayo, which is applied to elementary and secondary school students all over Mexico, it is intended to pose a different approach on the instruction of mathematics in elementary education. The "Olympic Type" problems transcend the study plan and the students' academic baggage. It is why we postulate that presenting problems of this sort, that push the student to consider different ways of reaching an answer, have a positive impact on the development of the youth's mathematical logic, which translates on a better understanding of mathematics.

Keywords: Mathematics Competitions, Olympiad problems, open-ended questions.

Fecha de recepción: 1 de enero de 2014; fecha de aprobación: 4 de diciembre de 2014.

INTRODUCCIÓN

Desde hace varios años hemos tenido la oportunidad de formar parte del equipo que califica los exámenes de la Olimpiada de Mayo. Este concurso es la etapa final de las competencias organizadas por la Academia Mexicana de Ciencias: la Competencia Cotorra y el Concurso de Primavera. Cada competencia divide a los participantes por edad, de manera que la Competencia Cotorra, dirigida a alumnos aún en la escuela primaria, en la actualidad está dividida en dos niveles: menores de 11 y menores de 12 años, que por lo general cursan quinto y sexto año de primaria, respectivamente. A su vez, el Concurso de Primavera se organiza también en dos niveles: el primero es para alumnos menores de 13 años y el segundo para menores de 15 años; en este último caso se trata de estudiantes de secundaria.

Estos concursos no tienen ganador único, sino que los participantes se clasifican como medalla de oro, de plata y de bronce, según el número de puntos que hayan obtenido. En el año en el cual se basó este artículo hubo 250,000 participantes en la primera ronda a nivel nacional. La segunda ronda estuvo conformada por los mejores 35,000 y en la tercera fueron invitados solamente 3,000, que es la etapa en la cual nos basamos. De esta última solo 1,573 participantes entre Primer Nivel de Primavera y la Competencia Cotorra tuvieron en su examen el problema que analizamos.

El número de participantes se ha incrementado, y en las competencias más recientes han concursado casi medio millón de alumnos por año. Todos ellos pasan dos filtros eliminatorios para llegar a la ronda final, en la cual –a diferencia de los exámenes anteriores, que son de opción múltiple– deben exhibir todo su razonamiento. Se les pide que escriban todo lo que piensan sobre un problema, pues la calificación comprende distintos puntajes en los que se beneficia un razonamiento correcto, aunque no sea totalmente completo, es decir, se otorga crédito parcial por ciertos avances en la dirección correcta hacia la solución. La calificación de estos exámenes conlleva, entonces, una revisión minuciosa de las respuestas. No basta con la lectura de un resultado.

Durante la revisión de los exámenes siempre nos han llamado la atención las distintas formas que encuentran los alumnos para expresarse. Desde dibujos que representan claramente tanto la alegría de un problema resuelto o la frustración de no entender de qué se trata, como imágenes de *anime,* –expresiones de frustración y hasta frases completas escritas sin ningún temor (ver Figura 1). Lo curioso es que la mayoría de las veces no se refieren a todo el examen, sino a algún problema en particular.

Figura 1. Imágenes de los alumnos para expresarse durante la realización de los exámenes.

Las condiciones en que se efectúan los exámenes son singulares, pues son de participación voluntaria y no se sabe quién va a revisar el examen, además de que si se obtienen pocos puntos no tiene ninguna trascendencia. Es decir, los resultados del examen no tienen ningún efecto en el historial escolar del alumno, aunque sí sabemos de casos en los que el haber participado en este tipo de concursos tiene impacto positivo en el rendimiento académico.

Haber observado las distintas formas en que los alumnos se expresan y teniendo en cuenta las condiciones en las cuales se llevan a cabo los exámenes, nos hizo pensar en la gran oportunidad que algunos problemas ofrecen para que los alumnos manifiesten sus inquietudes y para que nosotros entendamos cuáles son las posibles dificultades de algún tema en particular.

En general, los alumnos están familiarizados con los preceptos y las formas de la escuela. Podríamos decir que las matemáticas son percibidas como una colección de algoritmos fijos, y los problemas que se resuelven en primaria y durante los primeros años de secundaria son directos: calcula, mide, grafica..., además de ser usualmente muy parecidos a los ejercicios presentados en clase. Esto se debe, sobre todo, a que la educación primaria se basa en crear los fundamentos sobre los cuales se va a construir el razonamiento. En muchos casos esto adquiere la forma de reglas, que pueden parecerle arbitrarias al alumno, por ejemplo la ortografía. Antes de poder razonar críticamente el estudiante necesita tener una base teórica, la cual solo puede obtener de esta manera. Debido a lo anterior, gran parte del trabajo escolar destinado a estas edades consiste en aplicar los algoritmos aprendidos, sin pensar demasiado.

En contraste, los problemas de los concursos de Primavera y Cotorra tienen como finalidad permitir que el alumno luzca su creatividad y, si bien es cierto que se requiere algo de conocimiento formal, se trata de problemas en los cuales los alumnos deben razonar, descubrir y convencer al lector de su solución.

Queremos presentar uno de los problemas que nos llamó mucho la atención y que consideramos representativo para lo que queremos hacer notar: la importancia de los problemas de razonamiento en la educación matemática temprana. Sin el afán de volver a calificar, sino simplemente para tratar de descubrir el razonamiento del alumno y de leer nuevamente las frases y soluciones, revisamos un total de 1,573 exámenes. En este caso, los participantes habían pasado por la primera ronda entre 250,000 alumnos, y la segunda ronda con 35,000 concursantes, es decir, se trata de alumnos de alguna manera seleccionados. El problema apareció en lo que actualmente se clasificaría como Segundo Nivel de Cotorra y Primer Nivel del Concurso de Primavera.

EL PROBLEMA

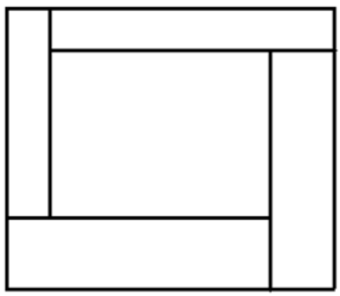
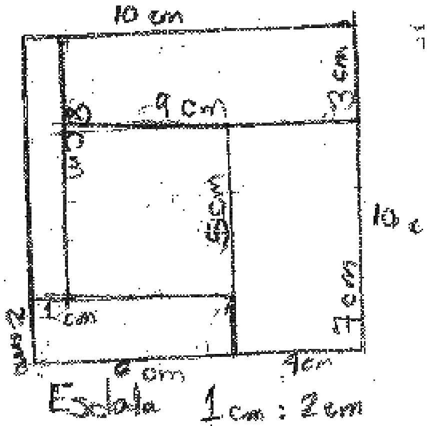


Figura 2. Cuadrado de 11 × 11 dividido en cinco rectángulos

> En el interior de un cuadrado de 11 × 11 (ver Figura 2) Pablo dibujó un rectángulo y, prolongando sus lados, dividió al cuadrado en 5 rectángulos, como lo muestra la figura. Sofía hizo lo mismo, pero además logró que las longitudes de los lados de los 5 rectángulos sean números enteros entre 1 y 10, **todos distintos.** Muestra una figura como la que hizo Sofía.

Este problema no necesita de mayor conocimiento previo. Solo se trata de acomodar los números del 1 al 10 para representar las longitudes de los lados de los nuevos rectángulos. Lo que nos sorprendió fue encontrar una gran cantidad de chicos que contestaban lo que en un curso regular hubiera sido calificado como "cualquier respuesta casi sin sentido". Muchos alumnos contestaron cosas muy diferentes a lo que se pedía, algunos trabajando con triángulos o simplemente diciendo que en el dibujo era claro que los rectángulos eran diferentes. Sin embargo, hubo otro grupo de participantes que cuestionaban el planteamiento del problema y expresaban claramente la confusión o la falta de atención a las condiciones del mismo.

Veamos algunos ejemplos:

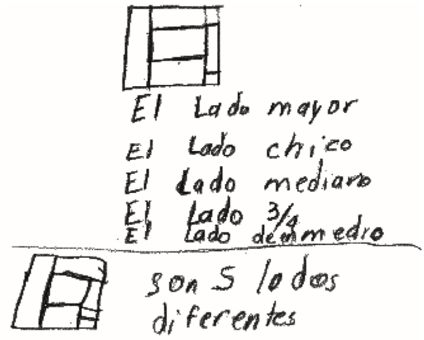


Jorge (Concurso de Primavera, primer nivel) escribe: Fue sencillo, solo tuve que reducir el cuadrado a 10 × 10 y saqué fácilmente 5 rectángulos, cada uno de diferente medida.

Figura 3. Respuesta de Jorge

Pero el cuadrado es... de ¡11 × 11! Por alguna razón, Jorge decidió que podía cambiar las condiciones del problema. Él mismo expresa que le resultó más fácil dar su solución. No obstante, llama la atención la arbitrariedad con la que modifica el problema, y es más inquietante aún la necesidad que tiene de usar centímetros y de dar una escala, sin percatarse de que está repitiendo números, pues el rectángulo que marca con 5 cm representa, en efecto, un cuadrado de 5 × 5.

Encontramos también respuestas en las cuales quedaba claro que, puesto que el problema está relacionado con figuras geométricas y números, los alumnos aseguran que es imposible resolverlo sin el uso de algún instrumento, o bien simplemente hacen referencia al hecho de no contar con regla, como Carmen (Competencia Cotorra).



Notemos en este otro ejemplo que Fernando (Competencia Cotorra) no expresa las dimensiones y, por tanto, no responde. Sin embargo, sí hay una comparación entre los lados. Lo que llama la atención es que no dice más porque se le acaban los nombres para los lados.

Figura 4. Respuesta de Fernando

Recordemos que en la escuela primaria, la geometría es la parte de la clase donde se establecen relaciones entre mediciones, magnitudes, formas, etcétera, usando siempre algún tipo de herramienta, como es el juego de geometría. Por ello, cuando un alumno está frente a un problema geométrico busca el uso de instrumentos, porque relaciona automáticamente la geometría con la “regla graduada”.

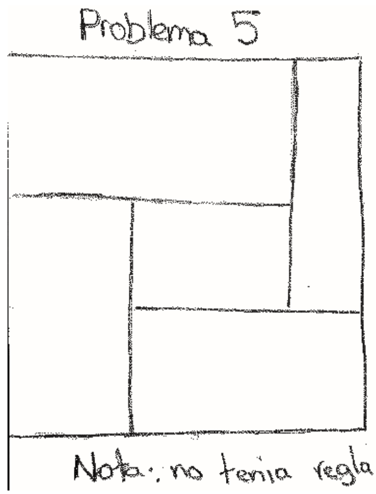


Figura 5. Respuesta de Carmen

En el siguiente ejemplo lo que Luis Fernando (Concurso de Primavera, primer nivel) responde nos permite ver cómo razona: "Como son cinco rectángulos debe haber 10 lados distintos... son las medidas posibles, ninguna va a sobrar". La Figura 6 muestra lo que Luis Fernando escribió.

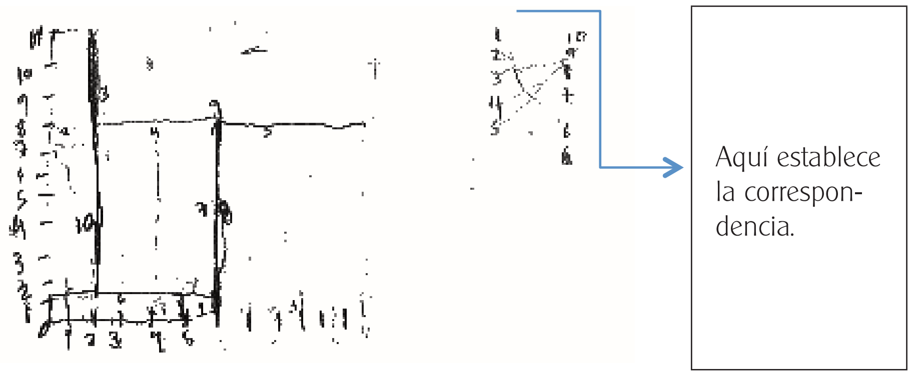


Figura 6. Respuesta de Luis Fernando

Si bien el razonamiento de Luis Fernando no garantiza obtener la respuesta, sí asegura que no es posible que haya cuadrados en la configuración, y que todos los rectángulos deben tener lados diferentes entre sí. Luis Fernando encuentra las parejas de números que suman 11 y luego ve cómo puede crear los rectángulos. Las líneas entre el 3 y el 9 y entre el 5 y el 8 se ven representadas con rectángulos en la siguiente imagen (Figura 7). Parece ser que eso es lo que lo lleva a establecer la solución, que por cierto es correcta.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

Decidimos clasificar de alguna manera el tipo de respuestas encontradas en 1,573 exámenes, repartidas entre los dos niveles que tuvieron este problema: la 2 en el Concurso de Primavera (Primer Nivel) y la 5 en el Concurso Cotorra.[1]

1. No hay respuesta: no hizo nada, ni siquiera un dibujo.

[1] Cuando fueron aplicados estos exámenes solo había un nivel en la Competencia Cotorra. Únicamente podían participar menores de 12 años.

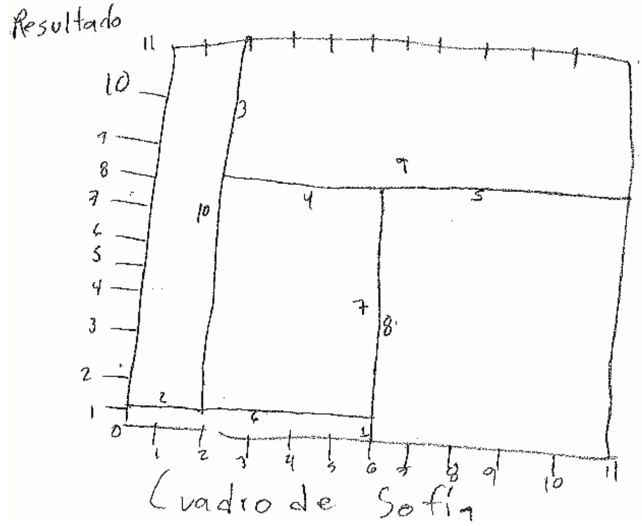


Figura 7. La respuesta final de Luis Fernando

2. Intenta, sin resolver:
    - Compara con un triángulo.
    - Hace operaciones, como divisiones y hasta raíces, para obtener la medida de los lados de los rectángulos.
    - Obtiene muchos rectángulos dentro del cuadrado original; en este caso, en general no toman en cuenta la indicación de que Sofía hizo la misma construcción.
    - Trabaja con la idea de que un rectángulo debe estar asociado con dos longitudes diferentes.
    - Hace un ordenamiento de rectángulos con números diferentes, confundiendo esta clasificación con la medida de los mismos.
    - Obtiene cuadrados o rectángulos diferentes, pero no abarcan todo el cuadrado original. O bien, aparecen en distintas figuras o dispersos dentro de un cuadrado.
3. Copia el dibujo igual. No hace ningún cambio, sin embargo a veces hay comentarios como: los lados son diferentes a “simple vista”.
4. Dibuja con acomodo o medidas diferentes; por ejemplo, hace un dibujo cambiando un poco las medidas, pero no les asigna ningún número.

5. Hace un dibujo con la regla. Utiliza su instrumento para construir un cuadrado y –por las explicaciones que a veces algunos alumnos dan– se infiere que la solución depende del manejo de la regla. Aquí también quedaron clasificados los exámenes en los cuales se advierte que se carece de la regla y que, debido a esto, no se puede resolver el problema. En este rubro clasificamos, asimismo, a todos los alumnos que, aun sin regla, insisten en trabajar con centímetros.
6. Usa números que suman 11. En muchas ocasiones hace la figura y encuentra números que suman 11, pero al presentar la solución no los coloca bien. Esto, sin embargo, es el primer paso para dar la solución correcta. Falta entonces, en varios casos, pasar de las parejas de lados correctas, por ejemplo 9 y 2, a efectivamente colocar todas las posibilidades en el orden correcto.
7. Trabaja con cifras equivocadas:
   - Comete errores aritméticos.
   - Coloca números con los cuales es imposible que forme un cuadrado.
   - Hace el dibujo con la regla, pero adapta su solución a su dibujo y da la respuesta incluso con punto decimal.
   - Adapta el dibujo a otras medidas, con frecuencia cambia el problema por un cuadrado de 10 × 10.
8. Da la respuesta correcta, aunque recurra a alguno de los procedimientos descritos en los otros tipos de respuestas, por ejemplo el uso de la regla o el uso de centímetros.

Por otra parte, dividimos los exámenes en ganadores y no ganadores, para ver si había una diferencia notable en los grupos de alumnos a quienes les fue mejor en la prueba total. Presentamos aquí los resultados, de acuerdo con la clasificación:

		Concurso de Primavera		Competencia Cotorra	
	Categorías	No ganó	Ganador	No ganó	Ganador
1	Sin respuesta	11	0	27	0
2	Intentos diversos sin éxito	60	0	57	0

		Concurso de Primavera		Competencia Cotorra	
Categorías		No ganó	Ganador	No ganó	Ganador
3	Solo copia el dibujo	120	0	163	0
4	Hace un dibujo con distintos arreglos	216	1	261	4
5	Utiliza una regla	60	2	44	8
6	Coloca números que suman 11	221	6	132	19
7	Tiene errores aritméticos	41	2	35	5
Respuesta correcta		12	52	4	10
Total		741	63	723	46

Al analizar la tabla, siendo conscientes de que no representa un análisis estadístico válido, podemos inferir varios datos interesantes. Lo más notable es cómo, porcentualmente, hay más participantes que entran en la sexta categoría en el Concurso de Primavera, de 151 que había en el Concurso Cotorra a 227. Generalmente el hecho de encontrar parejas de números que suman 11 constituye el primer paso para llegar a la solución, lo cual parecería indicar que al ser mayores los alumnos logran entender mejor cómo tratar el problema, aunque no den el último paso. El crecimiento de esta categoría se contrarresta con la caída en el número de personas que solo copian el dibujo, o que dibujan un rectángulo con diferentes arreglos. Estas dos categorías son consecuencia de una incorrecta comprensión del problema, por lo cual la disminución del número de personas en estas categorías es congruente con la idea de que la habilidad de razonamiento matemático se desarrolla junto con la madurez del individuo. Sin embargo, es preocupante el alto número de estudiantes que hace el dibujo solo con distintos arreglos, ya que el problema explícitamente indica que el dibujo es el mismo. Más de 25% de los alumnos que llegan a la última etapa del concurso no entiende la idea básica de lo que se le pide en el problema.

EL USO DE PROBLEMAS DE RESPUESTA ABIERTA

Si entendemos por problema una situación que aparentemente no está ligada con la información que se acaba de discutir en el salón de clases, que requiere de razonamiento, de abstracción, del buen uso de la información y de conceptos previamente adquiridos, entonces encontrar la solución involucra la actitud del alumno sobre qué hacer cuando no se sabe qué hacer. Esto último tiene como "enemigos" principales –tanto para el maestro como para el alumno– la inseguridad y el miedo, factores que deben ser atacados, pues permitir que el temor se apodere de los alumnos fortalece la frustración.

Los problemas que denominamos de Olimpiada resultan muy buenos para que el alumno se enfrente a este tipo de situación. Puesto que estas competencias no implican una calificación que afecte su vida académica, no conllevan el miedo a equivocarse, lo que sí ocurre usualmente en el salón de clases. De manera similar, si se plantearan problemas de este estilo, con un enfoque más recreativo, en el salón de clases, los alumnos no sentirían la presión y podrían manifestar mejor sus ideas. Esto abre una puerta al razonamiento de los estudiantes, al cual generalmente no tiene acceso el maestro.

Los maestros del ciclo básico tienen una gran responsabilidad y están expuestos a las pruebas nacionales e internacionales (ENLACE y la prueba PISA), donde quedarán jerarquizados sus alumnos, las escuelas y también ellos como maestros. Debido a las consecuencias de los resultados de estos exámenes, del prestigio de la escuela y hasta de su economía, el enfoque de la educación se vuelca más a que los resultados de estas pruebas sean altos. Se tiende a entrenar a los alumnos para el examen, en vez de buscar alimentar su creatividad. Sin embargo, las consecuencias de esta actitud a largo plazo no son las buscadas, porque no conducen a un desarrollo crítico en los alumnos, sino que solamente los limitan a ser repositorios de información. Entonces, creemos que plantear y resolver problemas no debe entenderse como un tema más, sino como el hilo conductor de todo el proceso de adquisición de conocimientos.

UN CAMBIO DE ACTITUD

Permitir la participación de los alumnos en la solución de problemas no es sencillo, ya que en general no tenemos la suficiente paciencia para escuchar a alguien que razona de una manera distinta a la nuestra, y la tendencia es privilegiar a quien sí lo hace. Es necesaria una actitud abierta y flexible para lo nuevo. Los alumnos son muy sensibles a notar esto último, y pueden tener miedo a externar sus ideas y dudas. Esto es justamente lo que distingue la participación de los alumnos en las Olimpiadas de Matemáticas; algunos podrán sentirse nerviosos el día del concurso, sin embargo están dispuestos a someterse a un trabajo individual, contra reloj, tranquilos de que no habrá un juicio personal por sus respuestas.

En la Figura 8 observamos el examen de Rafael (Competencia Cotorra): los intentos que hace, **no los borra, discretamente los tacha** y presenta su solución final. Esto es lo que podríamos considerar **la exhibición del proceso completo**.

En general, el uso de la goma de borrar o el miedo a no tener la respuesta correcta al primer tanteo causan que los alumnos se paralicen y no hagan ni siquiera una deducción. Este es el caso con el cual muchos de nosotros nos enfrentamos. Durante el examen es común que los alumnos tengan, en calidad de amuletos, una goma de borrar en una mano y en la otra su calculadora, que invariablemente se les cae, como si el ruido fuera un conjuro.

¿Por qué no pedir a los alumnos que no borren? ¿Por qué no explicar que es importante que muestren su trabajo completo? Si intentaron resolver el problema siguiendo varios caminos, aunque no lo hayan resuelto, puede ser ventajoso que mantengan estos intentos escritos, marcándolos con una cruz para indicar que no son parte del resultado final. Justamente como lo hizo Rafael en la última imagen. Ahora presentamos su respuesta final (Figura 8b).

Claro, como maestro es mucho más fácil corregir problemas que solo contengan la respuesta final, y por ello se indica a los alumnos que eviten mostrar los borradores, para facilitar al maestro el proceso de corrección. Ahora veamos el caso de un examen que no es del concurso (Figura 9).

En este examen el alumno tacha sus intentos, después de darse cuenta de que no son correctos. La persona que lo corrige, en rojo, le indica que use un lápiz para que pueda borrar sin necesidad de tachar. Sin embargo, si se hace de una forma ordenada el hecho de dejar el procedimiento, aunque no sea correcto, puede servir como apoyo didáctico para que el maestro comprenda cómo están interpretando los conocimientos sus alumnos.

Como alumnos, estamos acostumbrados a resolver los problemas exactamente como nos enseñaron, intentar solucionarlos por un camino diferente se ve mal, nos expone como alguien que no domina el tema. Pero si en la clase se destinara un tiempo a plantear problemas que integraran más los materiales y temas, que permitieran tomar diversos caminos para llegar a una misma

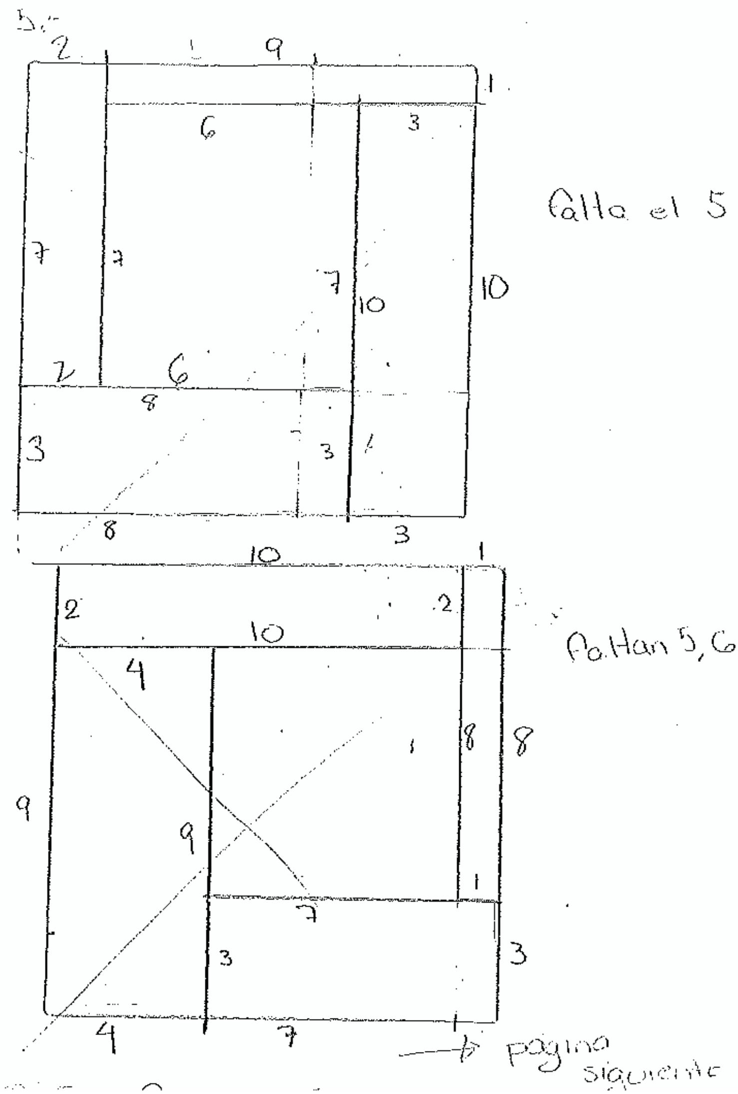


Figura 8. La respuesta de Rafael

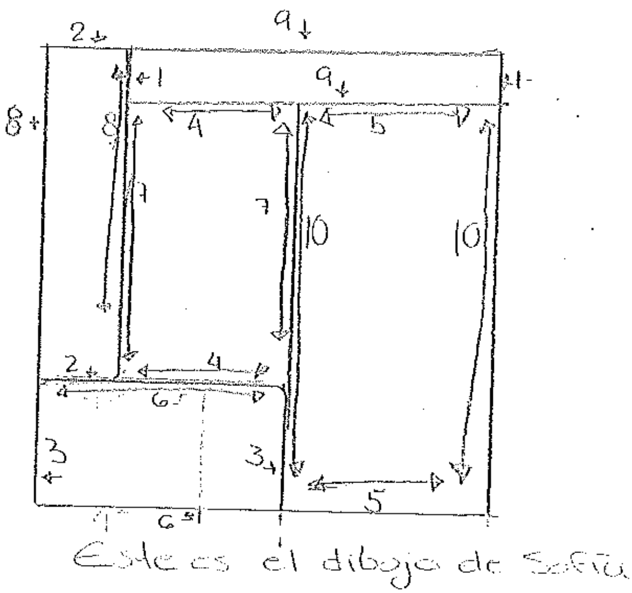


Figura 8b.

solución, nos sentiríamos tranquilos, sin juicios sobre qué tan inteligente se es y con la libertad de guiarnos por la intuición.

En los siguientes ejemplos notemos que los alumnos explican su sentir o su razonamiento. Si los maestros usáramos un método similar en clase, podríamos ver cuáles son las dificultades o lo que no entienden los estudiantes, incluso hasta sabríamos cómo interpretan las preguntas.

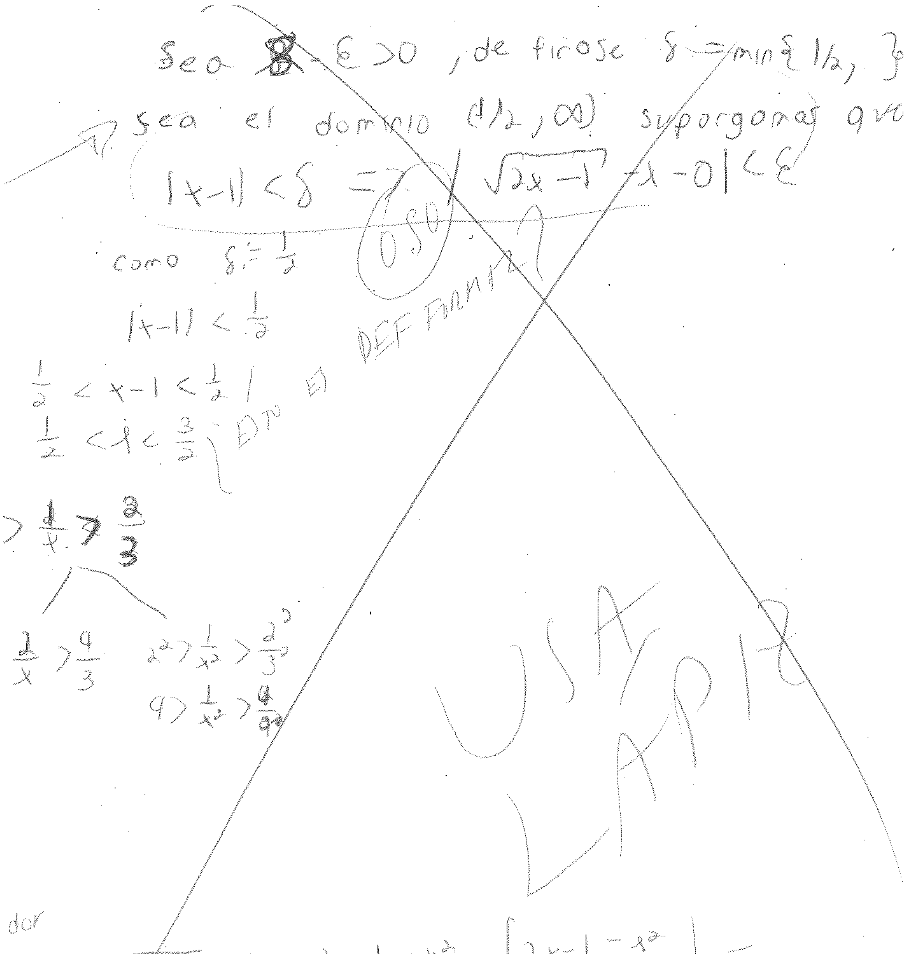


Figura 9. Un examen que no viene del concurso

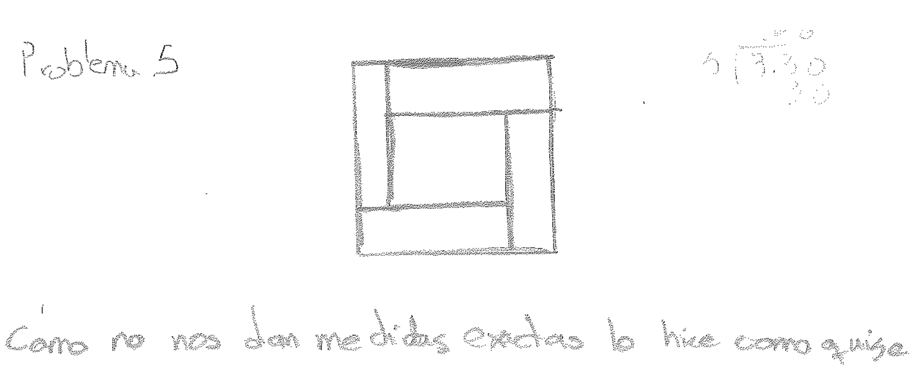


Figura 10. Isaac solo dibuja el cuadrado, porque no le dan las medidas (Competencia Cotorra)

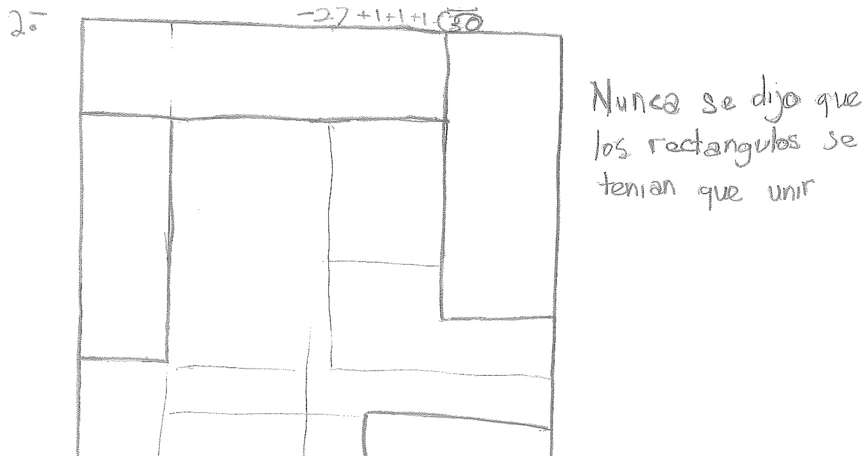


Figura 11. José cuestiona el planteamiento del problema (Concurso de Primavera)

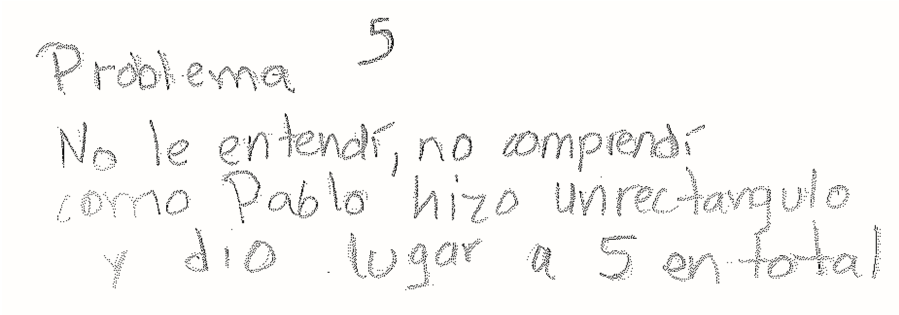


Figura 12. Ivonne dice que no entiende ni la idea básica (Competencia Cotorra)

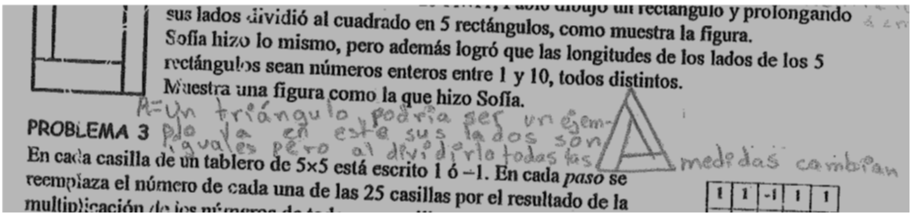


Figura 13. Rocío (Competencia Cotorra) escribe: "Un triángulo podría ser un ejemplo... en este sus lados son iguales,pero al dividirlo todas las medidas cambian"

Figura 14. Sonia dibuja un cuadrado igual al de Pablo, porque eso pedía el enunciado (Competencia Cotorra)

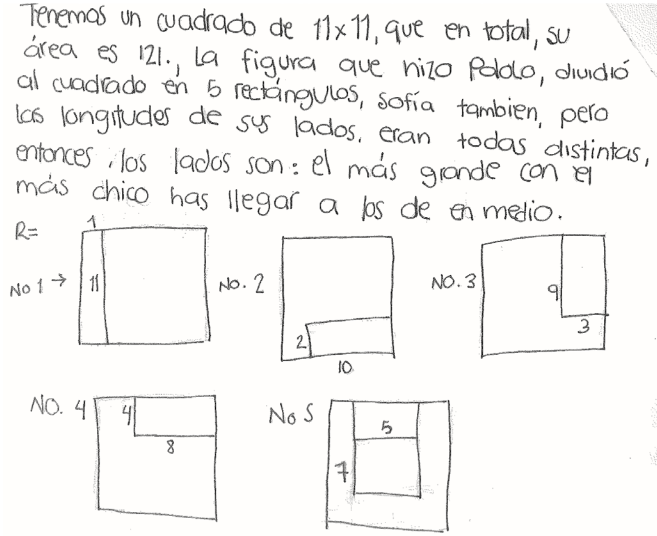


Figura 15. Azucena dibuja rectángulos en cuadros diferentes (Concurso de Primavera)

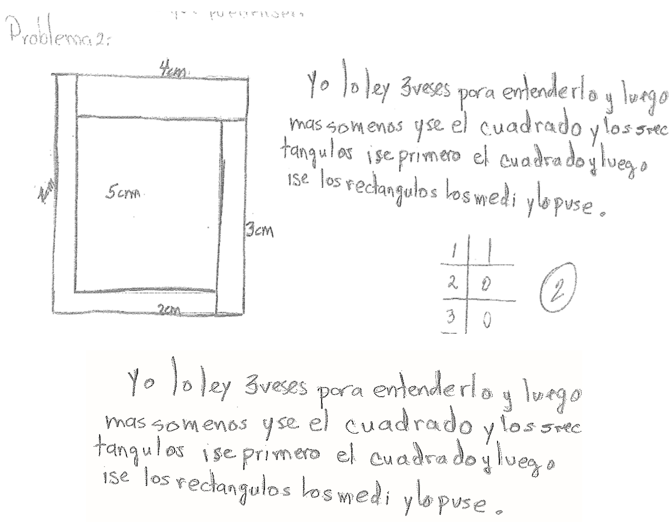


Figura 16. Luz no entendió, aunque deja muy claro que lo leyó varias veces (Concurso de Primavera)

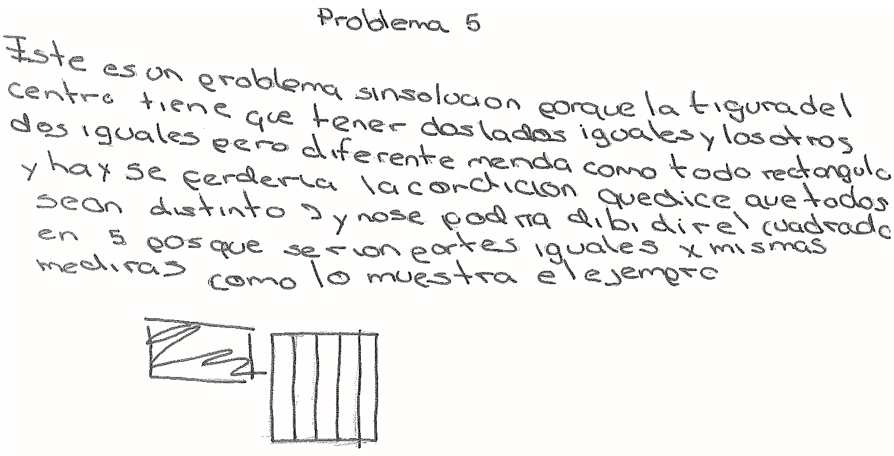


Figura 17. Jesús Alberto apela a la geometría para hablar de la imposibilidad de dividir el cuadrado (Competencia Cotorra)

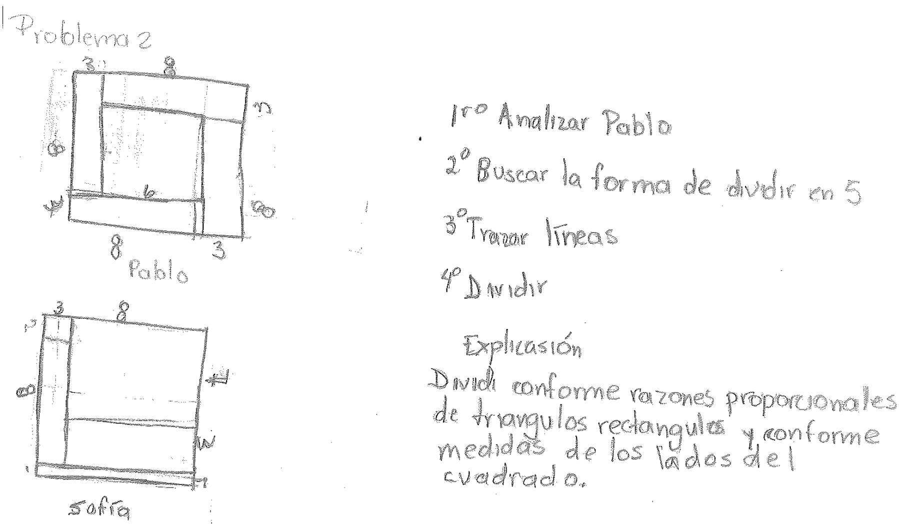


Figura 18. Merary define su algoritmo muy claramente, así como su base teórica (Competencia Cotorra)

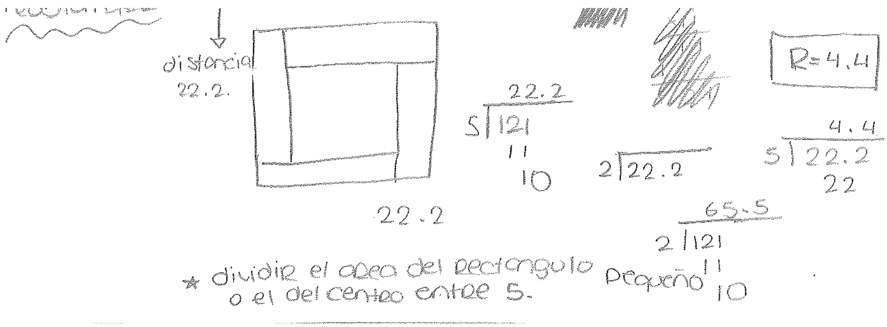


Figura 19. Perla intenta dividir el cuadrado en partes iguales (Concurso Cotorra)

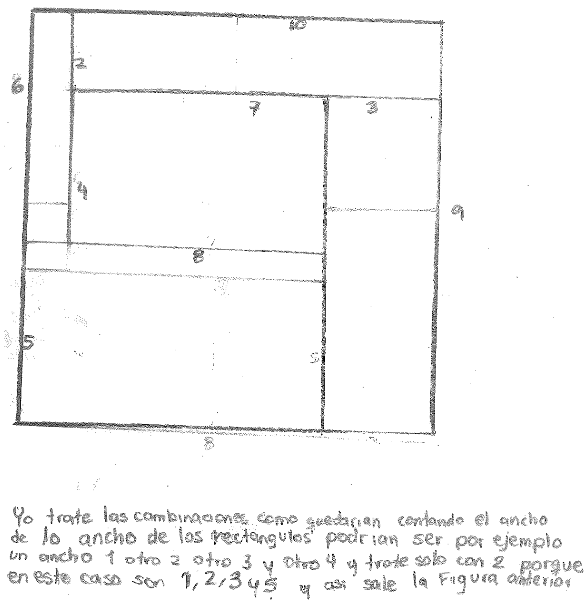


Figura 20. María (Competencia Cotorra) explica: "Yo traté las combinaciones como quedarían contando el ancho de lo ancho de los rectángulos, podrían ser, por ejemplo, un ancho 1, otro 2, otro 3 y otro 4, y traté solo con 2 porque en este caso son 1, 2, 3 y 5, y así sale la figura anterior". Aunque su explicación no es clara, la solución que presenta es correcta

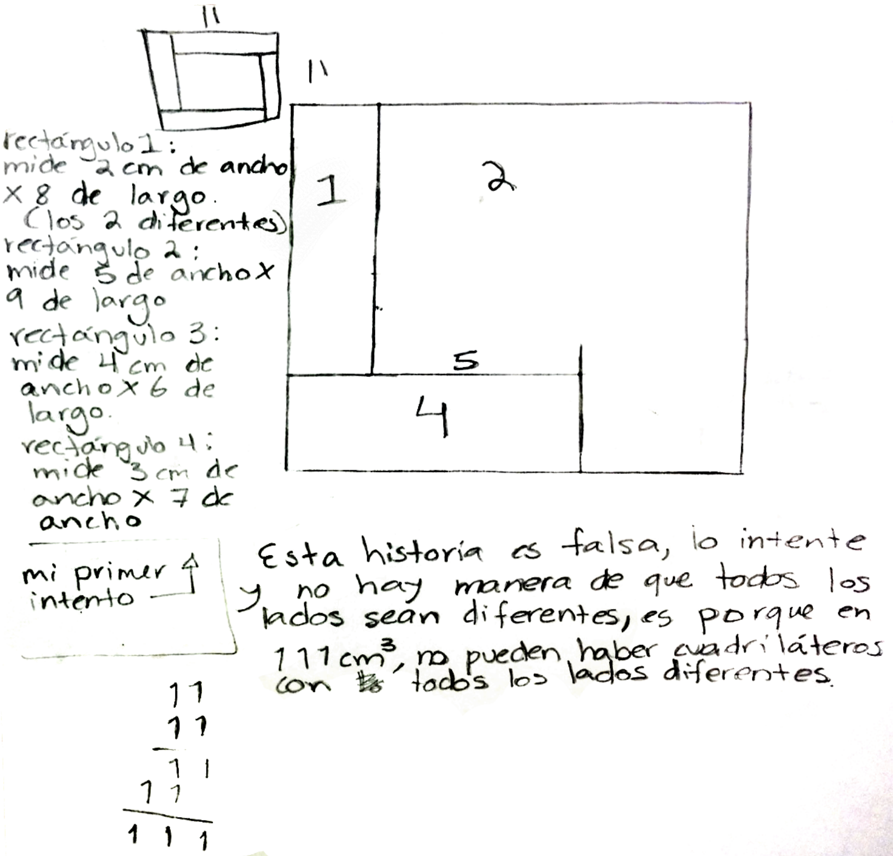


Figura 21. Ana Sofía cree que Pablo es un mentiroso (Concurso de Primavera).

CONCLUSIÓN

Los problemas de Olimpiada nos permiten dar una ojeada al proceso de pensamiento de los estudiantes. La posibilidad de que los alumnos trabajen en un ambiente libre de presiones y escrutinio abre una ventana a cómo piensan, y esto va más allá de lo que saben; es decir, no solo la información guardada en la memoria, también su posible uso y aplicación. Sin embargo, creemos que esto no debería limitarse únicamente a eventos como la Olimpiada, sino que debería ser algo que suceda día a día, en el salón de clases. Empezar a plantear problemas "de respuesta abierta", no necesariamente matemáticos y desde una temprana edad, puede estimular el pensamiento lógico de los jóvenes. Asimismo, si el alumno se empieza a encontrar problemas matemáticos que requieran de creatividad en su vida escolar, es más fácil que dé el paso hacia una comprensión más completa de las matemáticas.

No es suficiente con solo presentarle este tipo de problemas a los alumnos: hay que fomentar también que se aventuren a tomar distintos caminos y encontrar diversas formas de resolverlos. Los chicos no deben sentir que si no obtienen la solución a la primera tentativa es porque no pueden o no son capaces, sino porque tal vez sea necesario releer el problema, trabajarlo durante más tiempo, o bien abordarlo por otro camino.

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestro profundo agradecimiento a Carlos Bosch Giral, Coordinador de la Olimpiada de Primavera y del Concurso Cotorra, por permitirnos el acceso al material revisado. A María Trigueros, por animarnos a presentar este trabajo. Finalmente, estamos en deuda con Karla Morán, por su ayuda en la revisión minuciosa de exámenes.

Este trabajo fue parcialmente apoyado por la Asociación Mexicana de Cultura, A. C.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Para obtener problemas como el que aquí presentamos, visite la página de la Academia Mexicana de Ciencias y busque las convocatorias de los concursos de Primavera y Cotorra. http://www.amc.mx/

Otra fuente de problemas se encuentra en la página de la Olimpiada Matemática Argentina. http://www.oma.org.ar/enunciados/

DATOS DE LOS AUTORES

Claudia Gómez Wulschner
claudiag@itam.mx
Departamento Académico de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Esteban Landerreche Cardillo
estebanlan@gmail.com
Departamento Académico de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México

RESEÑA

La CIAEM en su décima cuarta edición, una mirada de novicios

La *Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (CIAEM) es el congreso que reúne a la comunidad de educadores e investigadores en la educación matemática, más antiguo de América Latina, su existencia data de 1961. Esta conferencia es organizada cada cuatro años por el *Comité Interamericano de Educación Matemática*, cuyo objetivo, según se declara en su página web, ha sido: "integrar a los educadores de las Américas para potenciar la Educación Matemática, pero, en especial, para propiciar el desarrollo de los países de América Latina."

Esta reseña la escribimos con el objetivo de compartir nuestra experiencia al ser partícipes de este foro por primera vez. Para ello, consideramos tres partes: contenido del evento, sus fortalezas y aspectos que se pueden mejorar, y algunas áreas de oportunidad. Por supuesto, cada una de estas secciones refleja principalmente nuestra experiencia, pero también algunas que nos fueron compartidas por otros participantes.

CONTENIDO DEL EVENTO

La conferencia tuvo dos temas principales: "Formación de educadores en las matemáticas: inicial y continua" y "Uso de tecnologías en la Educación Matemática", incluyendo, además, muchos otros temas, como puede constatarse a través de las comunicaciones, diálogos, mesa plenaria, talleres, conferencias, posters y cursos presentados en la conferencia.

Se pudieron percibir tópicos recurrentes en la investigación en educación matemática como resolución de problemas matemáticos, formación de profesores de matemáticas, modelación matemática, y etnomatemática; pero también, tópicos emergentes como el rol de los dispositivos móviles y las redes sociales en la enseñanza de las matemáticas; el uso de videojuegos en la enseñanza de las matemáticas, y la insubordinación creativa de educadores matemáticos.

No sólo las temáticas abordadas en la conferencia son variadas, sino también, la comunidad que participa en ella, la cual está integrada por investigadores –en formación, jóvenes, y consolidados–, profesores de matemáticas (la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México es una de las organizaciones patrocinadora del evento) y estudiantes. Entre la comunidad participante se percibe una mayoritaria representación iberoamericana, pero también asistentes de países como Alemania, Estados Unidos, Francia, Dinamarca e Inglaterra, lo que hace que la conferencia tenga un carácter plural e internacional.

El evento se inició con la entrega de la medalla Luis Santaló, premio que se otorga a personas que han apoyado significativamente las acciones del *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) y a la Educación Matemática en las Américas. En esta ocasión, la medalla Luis Santaló fue otorgada a Michèle Artigue por sus logros académicos en la investigación en Educación Matemática, y por sus acciones de apoyo y colaboración con la región iberoamericana, que ha propiciado la vinculación de dicha región con el resto del mundo académico. Tras recibir la medalla, Michèle Artigue dictó la conferencia plenaria inaugural llamada "Mejorar la formación inicial del profesorado y apoyar su desarrollo profesional: un desafío mayor".

El resto de las conferencias plenarias estuvieron a cargo de Celia Hoyles (Reino Unido), Carlos Vasco (Colombia), María Teresa Tatto (E.U.A), Abraham Arcavi (Israel-Argentina), Diane Briars (E.U.A) y Alicia Ávila (México).

Celia Hoyles abordó el problema de involucrar y atraer a los jóvenes al estudio de las matemáticas en esta era digital, pero sin sacrificar el rigor y la esencia de la disciplina; ella sugiere que el uso de herramientas como la programación en computadora puede ayudar a alcanzar este fin.

Carlos Vasco, por otro lado, presentó un programa neo-estructuralista para las matemáticas, que de acuerdo a él, permite una reformulación sistémica coherente de todas las ramas de las matemáticas, su historia y su epistemología, y promete convertirse en una nueva fuente de propuestas pedagógicas y didácticas para la educación matemática.

En su conferencia, María Teresa Tatto describió algunos resultados de un estudio colaborativo internacional llamado "Teacher Education and Development Study in Mathematics", cuyo propósito es determinar si lo que los futuros profesores de matemáticas aprenden en su formación inicial, conduce a un conocimiento más efectivo de las matemáticas y las matemáticas para la enseñanza.

Por su parte, Abraham Arcavi presentó un proyecto basado en el uso de videos, que tiene como objetivo favorecer el desarrollo de destrezas introspectivas en los profesores de matemáticas, que les permitan mejorar su práctica docente y su conocimiento matemático pedagógico, esto por medio de la reflexión y el análisis colectivo de videos de clase.

El foco de Diane Briars, en su conferencia fueron los "Principios para acciones" propuestos por el *National Council of Teachers of Mathematics* de Estados Unidos (NCTM), los cuales son una serie de prácticas de enseñanza basadas en investigación que, de acuerdo a los autores, son esenciales para lograr proveer a los estudiantes de una educación matemática de calidad.

Finalmente, Alicia Ávila presentó una conferencia cuyo propósito fue ofrecer una visión restrospectiva de la investigación en educación matemática en México durante los últimos cuarenta años. Además de ofrecer una caracterización de la investigación en educación matemática en México, señaló algunas de sus debilidades.

Esta descripción puede dar al lector una idea general de la variedad de tópicos presentados en la *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Por cuestiones de espacio no nos es posible reseñar el resto de las actividades académicas de la conferencia, sin embargo aquellos interesados en profundizar en las temáticas y los trabajos presentados, pueden consultar el programa de actividades (ver http://xiv.ciaem-iacme.org/public/download/sp/programa.pdf), además, pueden acceder a la mayoría de los manuscritos de las conferencias y comunicaciones presentadas a través del sitio web de la conferencia (ver http://xiv.ciaem-iacme.org/).

FORTALEZAS Y ASPECTOS QUE SE PUEDEN MEJORAR

Esta conferencia como lo hemos mostrado anteriormente, constituye un foro de gran importancia tanto para la difusión como para el desarrollo de la Educación Matemática en las Américas. Pero, como todo foro, tiene grandes fortalezas así como aspectos que podrían mejorarse para enriquecerlo, renovarlo, ampliarlo y consolidarlo. Presentamos en esta sección algunas reflexiones que intentan poner de manifiesto estos elementos.

Algunas fortalezas de la CIAEM

Es un evento plural que presenta diversidad de visiones sobre los mismos temas, pero también una diversidad de temas. Además, convoca y reúne a diferentes comunidades de educadores matemáticos, lo que la constituye en un foro de desarrollo e intercambio para la comunidad internacional de educadores matemáticos.

Su poder de convocatoria va más allá de la comunidad de investigadores en educación matemática, contando con una gran participación de estudiantes, profesores e investigadores en formación y en desarrollo.

Algunos aspectos de la Conferencia que pueden mejorarse/innovarse

Un lugar más importante para la comunidad brasileña

En la CIAEM, existe una fuerte presencia de la comunidad brasileña que no se refleja en los espacios de las conferencias plenarias, a pesar de que una de ellas había sido asignada a Ubiratan D'Ambrosio, finalmente fue dictada por Carlos Vasco de Colombia. Más lugares en las plenarias a cargo de ponentes brasileños podría contribuir a un mejor conocimiento mutuo de las comunidades brasileña e hispanohablante que participan en esta conferencia. Por otra parte, no hubo un cuidado sobre las traducciones hechas de las conferencias plenarias, donde la lengua privilegiada fue la castellana. Es cierto que las lenguas castellana y portuguesa son muy cercanas, aun así consideramos que un gesto incluyente podría ser traducir al portugués todas las conferencias plenarias.

Conferencias plenarias que reflejen el estado de la investigación en Iberoamérica

Una de las partes más interesantes de la CIAEM, es sin duda las conferencias plenarias, en esta edición, hubo siete conferencias y una mesa plenaria. Todas ellas nos parecen haber sido interesantes y aportar elementos a la reflexión y al desarrollo de la Educación Matemática en las Américas. Sin embargo, consideramos que faltan espacios para conferencias de esta misma índole que reflejen el estado de la investigación realizada en Iberoamérica. Desde nuestro punto de vista, la conferencia de Alicia Ávila y la mesa plenaria, "La preparación de docentes en la enseñanza de las matemáticas", fueron los espacios que contribuyeron con este papel, que consideramos de suma importancia en nuestra comunidad.

Miembros jóvenes que lleven la voz y las necesidades de otros jóvenes

La organización de este evento nos parece se vería altamente beneficiada al incluir en su comité ejecutivo, al menos, una voz que represente las necesidades de los jóvenes educadores matemáticos en desarrollo o en proceso de consolidación. Este tipo de prácticas es común a otro tipo de eventos como el *Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática* (CERME), con resultados bastante positivos, pues se logra reunir experiencia y juventud, atendiendo con ello a diferentes necesidades de la comunidad de los educadores matemáticos, como se expone más adelante.

ÁREAS DE OPORTUNIDAD

Creemos que esta conferencia cuenta con elementos y condiciones que podrían ser aprovechadas para hacer de ella un evento académico aún más provechoso para sus asistentes. Consideramos esta combinación de elementos y condiciones como "áreas de oportunidad" y enseguida señalamos algunas de ellas.

Espacios para investigadores jóvenes en formación y en consolidación

Fue evidente, para nosotros, que la CIAEM es un espacio que reúne experiencia y juventud académica, es decir, es un espacio en el que convergen investigadores experimentados y jóvenes investigadores. Sin embargo creemos que se debe favorecer aún más la interacción entre estas dos esferas de participantes en la CIAEM. Es claro, que estas interacciones se generan, pero quizá son más de carácter fortuito que intencionado. Consideramos que es posible aprender del congreso europeo, CERME, en el que actualmente una jornada y media antes del congreso se genera un espacio de formación para jóvenes investigadores (YERME day), bajo la responsabilidad de investigadores consolidados, quienes preparan conferencias, talleres y actividades que permitan mostrar más que el producto, el desarrollo de una investigación en Educación Matemática. Estas experiencias son invaluables en la formación de investigadores, además de generar relaciones académicas e incluso futuras colaboraciones entre los participantes.

Por ejemplo, en esta edición de la CIAEM se contaba con la presencia de editoras, de revistas como ZDM (Gabriele Kaiser) y Educación Matemática (Alicia Ávila), ambos importantes espacios de difusión en nuestra disciplina; hubiera sido más que interesante la organización de un taller sobre el proceso de publicación, profundizando en las características de las revistas, las formas de presentar el desarrollo y resultados de trabajos, la manera de leer, comprender y responder arbitrajes, etc. Este es un ejemplo, pero la consideración es generar estos espacios de manera "formal" o "institucional" en el marco de la CIAEM, todo con el objetivo de aprovechar la conjunción de investigadores experimentados y jóvenes para favorecer particularmente el desarrollo de estos últimos.

Espacios para *networking*

Consideramos que la CIAEM, como parte de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI, por sus siglas en inglés), podría generar espacios que permitan una interacción entre los participantes con el objetivo de generar colaboraciones y redes. Esta propuesta está basada en la gran pluralidad de los participantes que reúne este foro y que podrían, bajo un cierto formato, generar proyectos y trabajos conjuntos a diferentes niveles, desde lo macro hasta lo micro. Por ejemplo, en esta edición de la conferencia, uno de los temas abordados fue la formación de profesores. La última mesa permitió mostrar las similitudes y diferencias de los programas de formación de países como Colombia, Costa Rica, Cuba y Venezuela. Esta mesa sienta las bases de un proyecto que pudiera ser desarrollado por investigadores de otros países americanos y que tuviera como objetivo estudiar las formas en que las investigaciones en Educación Matemática responden a los retos actuales que enfrenta esta región. Este estudio podría generar una reflexión y un trabajo conjunto que permita fortalecer a la comunidad de investigadores y de formadores en América. Más allá de espacios propiamente académicos, consideramos fundamental la inclusión de espacios culturales y de convivencia en el programa de actividades, ya que éstos representan una oportunidad para compartir preocupaciones, preguntas, intereses, retos e incluso nuevas ideas que den pauta a proyectos colaborativos.

A MANERA DE CONCLUSIÓN

Debido a la importancia de esta conferencia en la vida de la comunidad de educadores matemáticos, consideramos necesario reseñarla, reconocer su calidad y su potencial innovador. Esperamos que esta reflexión encuentre eco entre las personas responsables de configurar este importante espacio académico.

DATOS DEL EVENTO

Conferencia Interamericana de Educación Matemática, del 3 al 7 de mayo de 2015
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México
http://xiv.ciaem-iacme.org

ELABORARON LA RESEÑA:

Avenilde Romo Vázquez
aromov@ipn.mx
CICATA-Unidad Legaria
Instituto Politécnico Nacional
México

Mario Sánchez Aguilar
mosanchez@ipn.mx
CICATA-Unidad Legaria
Instituto Politécnico Nacional
México

Política editorial

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada que ofrece un foro académico para la presentación y discusión de ideas, conceptos, propuestas y modelos que puedan contribuir a la comprensión y la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diversos contextos y latitudes. La revista aparece tres veces al año y publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. Adicionalmente, difunde *contribuciones para la docencia* en matemáticas y reseñas de libros y eventos de interés para la comunidad de educación matemática.

OBJETIVOS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA se propone:

- Actuar como un foro académico internacional en lengua española en el que se discutan problemáticas y hallazgos en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diferentes contextos.
- Facilitar la comunicación entre investigadores, estudiantes de posgrado y maestros de matemáticas.
- Promover la investigación en educación matemática en los países iberoamericanos.
- Colaborar en la comprensión de la naturaleza, la teoría y la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

LECTORES

EDUCACIÓN MATEMÁTICA está dirigida a investigadores de la educación matemática, maestros en formación y en ejercicio, estudiantes de posgrado, diseñadores de programas y proyectos educativos, evaluadores, administradores y cuadros técnicos vinculados con la educación matemática.

PRINCIPALES TEMÁTICAS

El contenido de EDUCACIÓN MATEMÁTICA se orienta principalmente a los siguientes temas:

- Educación matemática en el nivel básico.
- Educación matemática en el nivel preuniversitario.
- Educación matemática en el nivel universitario.
- Los sistemas educativos y las políticas educativas en educación matemática.
- Saberes matemáticos y procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en contextos no escolares.
- Historia y epistemología de las matemáticas y de la educación matemática.

INFORMACIÓN PARA LOS AUTORES

- La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica artículos de investigación y otras contribuciones (ensayos, reseñas y contribuciones para la docencia) en español, y eventualmente en portugués, en las temáticas enlistadas en esta Política Editorial.
- Todos los escritos que se reciben se someten a un proceso de evaluación doble-ciego.
- El Comité Editorial, con base en los resultados de la evaluación de los escritos, se reserva el derecho de aceptar o rechazar un material o hacer sugerencias de corrección para su publicación.
- El Comité Editorial y la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática tendrán los derechos de publicación de los artículos aceptados, para lo cual el autor debe firmar una *licencia de publicación no exclusiva* que se hará llegar a los autores una vez aprobada la publicación.

CARACTERÍSTICAS Y PREPARACIÓN DE LOS ESCRITOS

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica artículos en español y, eventualmente, artículos en portugués.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN:

- Deberán tener originalidad y rigor y mostrar, explícitamente, el aparato conceptual y metodológico utilizado.
- Prepararse electrónicamente, en *Word* o en algún otro procesador compatible.

- Deberá tener un máximo de 10 000 palabras, incluidos resumen, notas, referencias bibliográficas, tablas, gráficas y figuras. Se recomienda ampliamente que en total la extensión del artículo no sea mayor de 20 cuartillas.
- Se deberá incluir un resumen de entre 150 y 180 palabras en el idioma en que se haya escrito (español o portugués). Además, se incluirá una versión en inglés del título y el resumen, y cinco palabras clave en los dos idiomas elegidos.
- El anonimato de los artículos, para su envío a los árbitros, correrá por cuenta de los autores. Los editores no eliminarán ni los nombres, ni las citas o referencias que permitan identificar a los autores.
- En archivo aparte, deberá prepararse una *carátula* que contenga: *a)* título del artículo; *b)* declaración de que el material es original e inédito y que no se encuentra en proceso de revisión para otra publicación (debe mencionarse, explícitamente, si el material ha sido presentado previamente en congresos y ha aparecido de manera sintética (máximo seis cuartillas) en las memorias del mismo); *c)* el nombre, institución de adscripción (incluido Campus, Departamento, Facultad o División, conforme a la organización institucional), dirección electrónica, teléfono, domicilio completo (incluyendo código postal) del autor o los autores.
- Las figuras, tablas e ilustraciones contenidas en el texto deberán ir incluidas en el archivo del escrito. En caso de que el artículo sea aprobado, se enviarán las fotografías o ilustraciones en formatos .jpg, .tif o .eps, insertos en el documento y también en archivo aparte, con una resolución mínima de 300 dpi.
- Deberá evitarse el uso de siglas, acrónimos o referencias locales que no sean conocidas por un lector internacional; si estas se utilizan, deberá explicitarse su significado a pie de página, la primera vez que aparezcan.
- Las referencias dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas (Freudenthal, 1991: 51).
- Al final del artículo se debe incluir la ficha bibliográfica completa de todas las referencias citadas en el texto siguiendo el modelo APA.

Briand, J. (2011). El lugar de la experiencia en la construcción de las matemáticas en clase. *Educación Matemática*, 23 (1), pp. 5-36.

Fuenlabrada, I. (compiladora) (2008). *Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg*. DIE-CINVESTAV/COMIE/UPN. México.

Stigler, J. W. y J. Hiebert (1999). *The Teaching Gap. Best ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. Free Press. New York.

Moreno, L y J. Kaput (2005). Aspectos semióticos de la evolución histórica de la aritmética y el álgebra. En: M. Alvarado y B. Brizuela (compiladoras). *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia*. Paidós. Col. Educador Núm. 179. México.

Hernández, S. y H. Jacobo (2011). Descripción de algunas tesis de maestría en educación matemática. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 13 (1). Consultado el 28 de marzo de 2012 en: http://redie.uabc.mx/vol 11no1/contenido-hdezjacobo.html

ENSAYOS

Educación matemática publica ensayos de alta calidad con un máximo de 8 000 palabras (y 16 cuartillas incluyendo imágenes y bibliografía), que aborden de manera rigurosa y original algún tema relevante en el campo de la educación matemática. A diferencia de los artículos, los ensayos implican la interpretación de un tema desde el punto de vista del autor, sin que sea necesario explicitar el aparato metodológico o documental específico que lo sustenta, ni aportar datos empíricos. Los ensayos se someten al mismo proceso de arbitraje que los artículos de investigación.

CONTRIBUCIONES PARA LA DOCENCIA

Educación Matemática considera para su publicación un número limitado de *Contribuciones para la docencia*, consistentes en propuestas originales de presentación de un tema o acercamientos novedosos con sustento conceptual que hayan sido probados en clase. Así mismo, se consideran en esta sección como puntos de vista fundamentados conceptualmente sobre algún programa o material educativo y, en general, cualquier producto de la experiencia en el aula o de planeación de proyectos en educación matemática que se hayan elaborado con sustento conceptual y rigor metodológico y que se considere valioso compartir con los docentes de los distintos niveles educativos y los investigadores del campo. Las contribuciones para la docencia no deberán exceder 6 000 palabras o 12 cuartillas incluyendo tablas, gráficas y figuras, y deberán enviarse en formato *Word*, con los mismos lineamientos de presentación que los artículos.

RESEÑAS

Educación Matemática publica también reseñas de libros especializados, libros de texto, *software*, tesis de doctorado y eventos relevantes relacionados con las temáticas de la revista y que hayan aparecido recientemente. Las reseñas deben expresar el punto de vista de su autor; es decir, que no serán meramente descriptivas, y no excederán 2 000 palabras. Asimismo, deben incluir la ficha completa del texto o *software* reseñado; el nombre, institución de adscripción y el correo electrónico del autor. En el caso de las reseñas de tesis de doctorado, se incluirá también el grado, institución, director de tesis y fecha de defensa. Las reseñas serán revisadas al interior del Comité Editorial.

PROCESO DE ARBITRAJE

Aspectos generales

Todos los manuscritos recibidos están sujetos al siguiente proceso de arbitraje:

El Comité Editorial hace una primera revisión del manuscrito para verificar si cumple los requisitos básicos para publicarse en Educación Matemática. Esta revisión interna se realiza en un plazo aproximado de dos meses. En este término, se notificará por correo electrónico al autor si su manuscrito será enviado a evaluadores externos. En el caso en el que el manuscrito no se considere adecuado para su eventual publicación en Educación Matemática, se expondrán, por escrito, las razones al autor.

Artículos y ensayos

Las contribuciones que cumplan los requisitos básicos para ser evaluados serán enviadas para arbitraje doble-ciego de dos expertos en el tema. Este proceso de arbitraje se realizará en un plazo máximo de tres meses. Después de este periodo, el autor recibirá los comentarios de los revisores y se le notificará la decisión del Comité Editorial: Aceptado en su versión original, Aceptado con modificaciones menores, Aceptación condicionada a incorporación de modificaciones mayores, o Rechazado.

El autor deberá responder electrónicamente si está de acuerdo o no en elaborar una segunda versión de su contribución, incorporando los cambios propuestos. La versión revisada, acompañada de una relación de los cambios efectuados, deberá enviarse en un periodo no mayor de tres meses. Si el autor o autores envían su segunda versión en un plazo mayor al estipulado, el escrito será considerado como nueva contribución, y se reiniciará el proceso de arbitraje.

El caso en que un árbitro apruebe una contribución con modificaciones menores y otro la rechace, la contribución se enviará a un tercer revisor. Prevalecerá la opinión de dos de los tres árbitros.

Contribuciones para la docencia

Las contribuciones para la docencia se someten a un proceso de arbitraje en el que participan como árbitros un miembro del Comité Editorial y un árbitro externo. Los plazos del proceso son los mismos que para los artículos y los ensayos. En caso de discordancia en las evaluaciones, se seguirá un proceso similar al de artículos y ensayos.

Reseñas

Las reseñas son evaluadas por un miembro del Comité Editorial y el resultado de su evaluación se comunica al autor una vez que haya sido discutido en el pleno del Comité Editorial. Para hacer la evaluación, en este caso, se consideran la actualidad y relevancia del objeto de la reseña y la calidad de la perspectiva personal que el autor incorpora en su escrito.

ENVÍO DE LOS ESCRITOS

Los escritos deberán enviarse en archivo electrónico a la siguiente dirección electrónica: revedumat@yahoo.com.mx.

Educación Matemática

se terminó de editar electrónicamente
en Formas e Imágenes, S.A. de C.V.,
formaseimagenes@gmail.com
en el mes de junio de 2015.

Colaboradores internacionales

- *Michele Artigue*, Université Paris 7, IUFM de Reims y equipo DIDIREM, Francia
- *Carmen Azcárate*, Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, España
- *Luis Balbuena*, Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, España
- *Sergio Ballerteros Pedrozo*, Universidad Pedagógica Enrique José Varona, Cuba
- *Edgar José Becerra Bertram*, CENEVAL, México
- *Carlos Bosch*, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Departamento de Matemáticas, México
- *Alberto Camacho Ríos*, Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México
- *José Contreras Francia*, University of Southern Mississipi, Estados Unidos
- *César Cristóbal Escalante*, Universidad de Quintana Roo, México
- *Miguel de Guzmán*, Universidad Complutense de Madrid, España
- *José Ángel Dorta Díaz*, Universidad de La Laguna, Departamento Análisis Matemático, España
- *Daniel Eudave Muñoz*, Universidad Autónoma de Aguascalientes, Departamento de Educación, México
- *Eugenio Filloy Yagüe*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Alfinio Flores Peñafiel*, Arizona State University, Estados Unidos
- *Grecia Gálvez*, Ministerio de Educación de Chile, Chile
- *Jesús Roberto García Pérez*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Departamento de Matemática Educativa, México
- *Fredy González*, Instituto Pedagógico de Maracay, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela
- *Ángel Gutiérrez*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, España
- *Nelson Hein*, Universidade Regional de Blumenau, Brasil
- *José Ramón Jiménez*, Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas, México
- *Moisés Ledesma Ruiz*, Escuela Normal Superior de Jalisco, México
- *Antonio Jose Lopes*, Centro de Educaço Matematica, Brasil
- *Eduardo Luna*, Barry University, Department of Mathematics and Computer Science, School of Arts and Sciences, Estados Unidos
- *Bertha Alicia Madrid Núñez*, Universidad Iberoamericana, México
- *Armando Martínez Cruz*, Californa State University Fullerton, Estados Unidos
- *Jorge Martínez Sánchez*, Universidad Iberoamericana, México
- *Leonel Morales Aldana*, Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala
- *Luis Enrique Moreno Armella*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *María del Rocío Nava Álvarez*, Instituto de Educación del Estado de México, México
- *Josefina Ontiveros Quiroz*, Universidad Autónoma de Querétaro, Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas, México
- *Fidel Oteiza*, Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación, Chile
- *François Pluvinage*, Universidad de Estrasburgo, Francia
- *Ángel Ruiz*, Universidad de Costa Rica, Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, Costa Rica
- *Luisa Ruiz Higueras*, Universidad de Jaén, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Fac. de Ciencias de la Educación, España
- *María Teresa Rojano Ceballos*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Jorge Sagula*, Universidad Nacional de Luján, Departamento de Ciencias Básicas, División Matemática, Argentina
- *Patrick Scott*, University of New Mexico, Estados Unidos
- *Isabel Soto*, Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación, Chile
- *Guadalupe T. de Castillo*, Universidad de Panamá, República de Panamá
- *Santiago Valiente Barderas*, Escuela Normal Superior de México, México

www.revista-educacion-matematica.com