ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Ideas previas sobre la multiplicación y división con decimales: su evolución a partir de una experiencia con el *Laberinto de decimales*

Evelyn Valencia y Alicia Ávila

Resumen: Desde hace varias décadas se han indagado los procesos de aprendizaje de los números decimales y se han identificado dificultades y obstáculos para su comprensión, muchos de ellos favorecidos por la enseñanza. Uno de esos obstáculos es desprenderse de los modelos intuitivos de la multiplicación y división construidos en el contexto de los números naturales. En este artículo se analizan los resultados de la aplicación de una situación didáctica sustentada en un dispositivo que tiende a favorecer el abandono de estos modelos: el *Laberinto de los decimales.* El escrito se centra en analizar la evolución de los razonamientos de los alumnos al interactuar con este dispositivo. Se observa el abandono (no sencillo) de la idea "la multiplicación siempre agranda, la división siempre achica". En este proceso, median ideas diversas que desembocan en la construcción de nuevas reglas sobre los efectos de estas operaciones.

Palabras clave: multiplicación y división con números decimales, modelos intuitivos, aprendizaje de los números decimales, situaciones didácticas, construcción de conocimiento.

Previous ideas about multiplication and division with decimals: its evolution from an experience with the *Laberinto de decimales*

Abstract: For several decades, students' learning processes of decimal numbers have been investigated. Difficulties and obstacles have been identified, some of which can be attributed to the instructional approaches that are used. One of those obstacles is related to the intuitive models of the meaning of multiplication and division, which students develop as they engage with these operations in the context of natural numbers. In this paper, results are analyzed of the

Fecha de recepción: 7 de junio de 2015; fecha de aprobación: 8 de octubre de 2015.

implementation of a didactical situation, named "The maze of decimals", aimed at overcoming those models. The analysis centers on the evolution of students' reasoning while engaging in the situation. It is noticeable how students struggle to abandon the conceptions of "multiplication makes bigger, division shrinks." This process is mediated by diverse ideas that lead to the construction of new rules about the meaning of multiplication and division.

Keywords: multiplication and division with decimals, intuitive models, learning decimals, didactic situations, knowledge building.

LA PROBLEMÁTICA

Desde hace algunas décadas se han realizado investigaciones en torno a las dificultades que representa para los estudiantes el aprendizaje de los números decimales. Esas dificultades se deben en parte a que algunos de los conocimientos adquiridos sobre los números naturales se convierten en obstáculo para la comprensión de estos "nuevos números" (cf. Brousseau, 1998). Y es que, como Brousseu ha señalado: "Si una noción tiene éxito suficiente durante un tiempo largo, toma un valor, una consistencia, una significación, un desarrollo que hacen cada vez más difícil su modificación, su recuperación o su rechazo: la noción deviene a la vez, para las adquisiciones ulteriores, un obstáculo y un punto de apoyo") (Brousseau, 1998, p. 119). Es decir, que los naturales devenidos obstáculo son parte del proceso de conocer. Pero se trata también de una cuestión favorecida por la enseñanza, ya que, a partir de la manera en que comúnmente se acerca a los niños a los decimales, se empaña la diferencia entre estos números y los naturales. Y esta falta de diferenciación se extiende hasta alcanzar a las operaciones y su significado.

Algunos aspectos identificados reiteradamente como problemáticos en el aprendizaje de los decimales son los siguientes:

- *El significado de los decimales*. En la escuela se suelen presentar los decimales únicamente en contextos como el dinero y la medición en vinculación con el sistema decimal de medidas, y la manera en que se trabajan no siempre permite evidenciar que el valor de la parte decimal de un número se define en función de su relación con la unidad, sino que suelen utilizarse unidades distintas para identificar la parte entera y la decimal, por ejemplo: pesos y centavos o metros y centímetros, opacándose así la naturaleza fraccionaria de estos números (Brousseau, 1998; Van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Van Herpen y Keijzer, 2008; Saiz, Gorostegui y Vilotta, 2011, y Ávila, 2013).

- *Comparación y orden*. Las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes para ordenar correctamente números decimales sin duda están vinculadas al significado que se otorga a estos números. Como ya dijimos, con frecuencia se consideran la parte entera y la parte decimal como grupos de números naturales separados por el punto y a estos números se les aplican las reglas utilizadas para ordenar los naturales (Brousseau, 1998; Roditi, 2007). Con base en esa misma lógica, los niños consideran la cantidad de cifras que posee el número después del punto como criterio para determinar si es mayor o menor que otro cuya parte entera es equivalente (Roditi, 2007; Ávila, 2013).
- *Densidad*. Esta propiedad caracteriza a los números decimales en cuanto a que son un subconjunto de los racionales y refiere al hecho de que, entre cualesquiera dos números decimales distintos, puede encontrarse siempre otro número decimal (cf. por ejemplo, Peterson y Hashisaki, 1969). Esta propiedad es muy difícil de comprender por parte de estudiantes que concluyen la primaria (Ávila, 2013), ya que en las clases de matemáticas se sobregeneraliza la naturaleza discreta de los números naturales, produciéndose obstáculos en los razonamientos de los estudiantes que impiden la comprensión de esta propiedad; los estudiantes suelen considerar que entre dos decimales "falsos consecutivos",[1] no se podrá ubicar ningún otro decimal (Brousseau, 1998; Broitman, 2003; Ávila, 2013; Saiz, Gorostegui y Vilotta, 2011; Valencia, 2014).
- *Cálculo y operaciones*. Muchos profesores y estudiantes, según estudios relativamente recientes, suelen entender que la única dificultad que ofrecen las sumas y restas con decimales, es saber *alinear* los números con base en el punto decimal. Una vez resuelta esta cuestión, se trata simplemente de aplicar las reglas de las operaciones con números naturales para obtener el resultado buscado (Ávila, 2008; Konic, Godino y Rivas, 2010). De este modo, la perspectiva conceptual es sustituida por la algorítmica, que se extiende a la multiplicación y a

[1] Esta expresión, utilizada por Ávila (2013), refiere a pares de números decimales que, prescindiendo del punto, serían antecesor y sucesor en el campo de los naturales, por ejemplo 4.89 y 4.90.

la división, eliminándose cualquier reflexión respecto del significado de estas operaciones.

- *Los efectos de la multiplicación y división de decimales*. La falta de un acercamiento conceptual a los cálculos con decimales ha provocado que se genere en los estudiantes una serie de ideas o conceptos erróneos acerca de las operaciones con estos números, por ejemplo, generalizar el hecho de que, al efectuar la multiplicación de dos números dados, cualesquiera que estos sean, el número obtenido como producto siempre será mayor que los factores. De igual modo, se cree que, al efectuar una división, el divisor siempre debe ser menor que el dividendo, o que el número obtenido como cociente siempre será menor que el número que se divide (Graeber y Tirosh, 1989; Van Galen y otros, 2008).

Este tipo de ideas erróneas asociadas a la multiplicación y la división fue informado desde hace tiempo. Un estudio sobre el tema muy consultado por los investigadores de América Latina data de los años ochenta y fue realizado por Margaret Brown en Inglaterra (Brown, 1981). Esta autora informó:

> Es claro que la idea de que "la multiplicación siempre agranda y la división siempre achica" está firmemente instalada entre los estudiantes [de entre 12 y 15 años] (Brown, 1981, p. 54).

Algunas de las evidencias ofrecidas en este estudio son particularmente interesantes, por ejemplo, las respuestas dadas por los estudiantes al ítem siguiente:

15. [En cada pareja de cálculos] *Encierra el cálculo que dé como respuesta el número más grande:*

    a) 8×4 o $8 \div 4$
    b) 8×0.4 o $8 \div 0.4$
    c) 0.8×0.4 o $0.8 \div 0.4$

Tabla de porcentajes de respuesta, por edades, a la pregunta 15[2]

	12 años	13 años	14 años	15 años
$\times, \div, \div$ (correcta)	13	8	15	18
$\times, \times, \times$ (incorrecta)	50	58	47	30

Como se ve, en un porcentaje muy alto, los estudiantes consideran que la multiplicación es la única operación que agranda el número de partida. Esta prevalencia, que Brown denomina "síndrome de la multiplicación siempre agranda y la división siempre achica", no constituye un hecho inocuo, sin impacto en otras conceptualizaciones sobre los decimales. Según la evidencia aportada por la propia Brown, el síndrome de la multiplicación siempre agranda y la división siempre achica (y que en adelante llamaremos *síndrome* MADA) afecta a la elección apropiada de estas operaciones al tratar de resolver problemas que las implican (cf. Brown, 1981, p. 55). La relevancia del síndrome, por tanto, se hace visible si consideramos que una noción toma sentido por los errores que evita y los problemas que ayuda a resolver (cf. Brousseau, 1998, pp. 119 y ss.). Pero antes de avanzar respecto de este punto, abrimos un paréntesis para aclarar el sentido que damos al término *síndrome*.

El término, según el diccionario de la Real Academia Española, no significa sólo el reflejo de una enfermedad, sino también "un conjunto de fenómenos que caracterizan una situación determinada" (en el caso que tratamos, la interpretación de la multiplicación y la división adquirida con los naturales y que erróneamente se extiende a otros conjuntos numéricos). Más cercano al sentido que le damos en este artículo, es el que tiene el término en lengua inglesa donde *síndrome* significa: "Patrón predecible que tiende a ocurrir en ciertas circunstancias".[3]

Ahora bien, como decíamos antes, este *síndrome* o patrón tiene también sus raíces en las formas de enseñanza, en las decisiones que esta toma y en las omisiones que conlleva; se trata parcialmente de un efecto didáctico, donde efecto se entiende como aquello que sigue por virtud de una causa; que es

[2] Conviene señalar que este cuadro se tomó tal como aparece en el escrito de M. Brown (1981). Los datos que la autora presenta, puede inferirse, no refieren a la totalidad de respuestas obtenidas; probablemente se exponen sólo aquellas que destacan la prevalencia de la idea "la multiplicación siempre agranda y la división siempre achica", tema que es eje de nuestro artículo.

[3] Definición tomada del *Merrian-Webster Dictionary,* consultado en la web el 27 de octubre de 2015.

resultante de una acción; que produce una serie de consecuencias, generalmente adversas, del uso de un tratamiento (cf. *Diccionario del Español de la Real Academia Española*), como puede ser el didáctico.

Una vez aclarado el sentido del *síndrome*, volvemos al hilo central del artículo para citar algunos de los resultados aportados por Brown en su intención de argumentar cómo el *síndrome MADA* tiene efectos en la elección de la multiplicación o división en cuanto herramientas de resolución de problemas con decimales.

19. "*Encierra el cálculo que necesitarías hacer para encontrar la respuesta* [al problema siguiente]:
    C. *El precio de la carne molida se anuncia a 88.2 peniques el kilo, ¿cuánto costará un paquete con 0.58 kg de carne molida?*
    $0.58 \div 88.2$ $\quad$ $88.2 - 0.58$ $\quad$ $0.58 - 88.2$
    0.58×88.2 $\quad$ $88.2 + 0.58$ $\quad$ $88.2 \div 0.58$

Tabla 4.6. Porcentajes de respuestas a la pregunta 19 C

	12 años	13 años	14 años	15 años
× (correcta)	18	17	21	29
÷ (incorrecta)	37	39	48	42

Se ve de nuevo la aparición del *síndrome MADA*, pues los estudiantes tienen fuertes dificultades para seleccionar la operación correcta, dificultades que derivan de una visión de las operaciones que es válida sólo en el conjunto de los números naturales.

La identificación del *síndrome MADA* dio lugar a la teoría de los "modelos intuitivos" (Fischbein y otros, 1985). Según esta teoría, los estudiantes construyen, desde que inician su aprendizaje con los números naturales, modelos intuitivos sobre la multiplicación y la división que no son válidos en otros conjuntos numéricos, pero que, habiéndose arraigado en el pensamiento de los estudiantes, se utilizan para interpretar las operaciones sin importar los números de que se trate. Los tres modelos intuitivos identificados por Fischbein y sus colegas son:

1. *La multiplicación como suma repetida*; un factor se repite y el otro marca el número de repeticiones, de ahí que el resultado de la multiplicación siempre debe ser mayor que los factores.

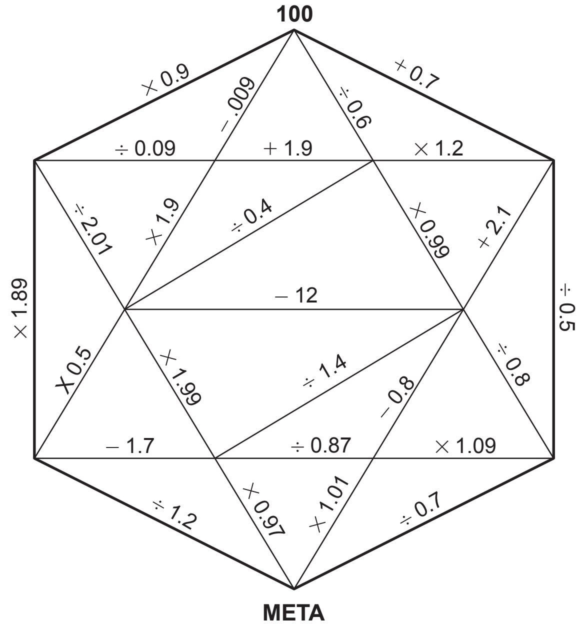
2. *La división como "partición*" (modelo intuitivo inicial); se trata de repartir una cantidad en un número dado de partes iguales, y la incógnita refiere al tamaño de las partes; de ahí que el dividendo deba ser mayor que el divisor y el cociente tenga que ser menor que el dividendo (no se podrían repartir 12 canicas entre 25 niños).
3. *La división como "agrupamiento"* (modelo más elaborado que el de partición); en este caso se conoce la cantidad por repartir y el tamaño de cada parte, y se busca el número de partes. Las ideas asociadas a este modelo son similares a las generadas en torno a la división como "partición".

No obstante la relevancia del tema, entre los investigadores y diseñadores de currículum, esta línea de investigación tuvo poca continuidad en América Latina y particularmente en México (cf. Ávila y García, 2008; Ávila, 2013; Valencia, 2014). Un resultado de este escaso interés es que tales cuestiones no se abordan en el ámbito escolar como aspectos importantes de los decimales. Aún más allá, recientemente se ha constatado que el s*índrome MADA* se refleja también en los docentes cuando se enfrentan a la multiplicación y la división con decimales (Barriendos, 2013). Al respecto, Barriendos informa cómo un grupo de profesores, participantes en un evento de formación, utiliza sumas y multiplicaciones y evita restas y divisiones como estrategia inicial para obtener "el número más grande". Tal situación no es sorprendente si, en general, los profesores consideran que la comprensión de los números decimales y sus diversos aspectos no representan dificultad alguna en la enseñanza ni en el aprendizaje, por lo que optan por un tratamiento simple centrado en la comunicación de las etiquetas (nombres) correspondientes a las columnas después del punto y a la ejercitación mecánica de los algoritmos, los cuales, a su decir, no implican mayor dificultad que saber en dónde colocar el punto (Ávila, 2008; y Ávila y García, 2008).

Con base en estos antecedentes sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números decimales, se planteó una situación didáctica basada en la aplicación de un dispositivo que tiene como propósito ayudar a rebasar el *síndrome MADA*. Se trata del *Laberinto de los decimales* (en adelante *Laberinto*) elaborado y difundido hace tiempo por el National Council of Teachers of Mathematics (2008) precisamente para hacer evidentes los efectos de las operaciones con números decimales y provocar la reflexión sobre ellos (véase figura 1).

Indicaciones

1. Sin hacer cálculos, elige el camino que consideres te dará más puntos y márcalo con algún color. Las reglas son las siguientes:
   a) Al empezar el juego tienes 100 puntos.
   b) Debes llegar a la meta siguiendo el camino de las operaciones que pienses que te darían más puntos.
   c) No debes pasar dos veces por el mismo segmento ni por el mismo punto.



2. Haz los cálculos del camino que elegiste para obtener tu total. Puedes utilizar una calculadora.
3. Compara tus resultados con los de tus compañeros y comenten lo que observan.

Figura 1. Laberinto de los decimales

OBJETIVOS Y DISEÑO DE LA SITUACIÓN SUSTENTADA EN EL *LABERINTO DE LOS DECIMALES*

Con base en la revisión de literatura y la aplicación de un cuestionario a niños de 11-12 años que no participaron en esta investigación, pero que asistían a la misma escuela donde esta se llevó a cabo, reconocimos el *síndrome* MADA como uno de los obstáculos necesarios de superar por parte de los estudiantes para lograr una comprensión amplia de los decimales. Por tal razón, se incluyó el trabajo con el *Laberinto*.

La situación basada en este dispositivo formó parte de una secuencia didáctica cuyo objetivo general fue conocer:

¿Cómo los estudiantes de sexto grado de primaria dotan de significado a los números decimales?

Para dar respuesta a tal pregunta, se preparó la secuencia didáctica conformada por ocho situaciones, cada una de las cuales se instrumentó en una sesión de aproximadamente una hora,[4] y se generaron otras preguntas más específicas que se contestarían una vez aplicada la secuencia:

- ¿Cuáles son las modificaciones o cambios observados en el aprendizaje de los estudiantes sobre los números decimales a partir de la aplicación de la secuencia?
- ¿Cómo se produjeron esos cambios?
- ¿Qué tareas y situaciones los generaron o favorecieron?

La situación basada en el *Laberinto* fue la séptima de la secuencia. El propósito específico de la situación fue trabajar a partir de las ideas de los niños sobre la multiplicación y división de decimales, interactuando con el *Laberinto*, dispositivo que, como ya mencionamos, busca hacer evidente que no siempre la multiplicación agranda el número de partida y, al efectuar una división, aquel no siempre se hará más pequeño, sino que el efecto de ambas operaciones dependerá de los números involucrados en el cálculo. En específico, para esta situación se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

a) Si las ideas de los alumnos participantes reflejan el *síndrome* MADA, como es factible suponer con base en los resultados de investigaciones previas, ¿es posible lograr su modificación mediante la enseñanza?

b) ¿En qué medida el *Laberinto* es útil para promover la reflexión sobre dichas ideas y favorecer su abandono?

[4] Los aspectos trabajados en la secuencia fueron los siguientes: representación de los números decimales, equivalencia entre distintos representantes de un número decimal, significado de los números decimales, la unidad de referencia, orden en los decimales, noción de densidad, multiplicación y división con decimales y resolución de problemas con decimales.

c) ¿La interacción entre los compañeros, con la orientación y coordinación de alguien que sabe más, favorece adicionalmente la comprensión de los efectos de multiplicar y dividir con decimales?

Al igual que el resto de las que conformaron la secuencia, la situación se inspiró en la Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau (Brousseau, 1986). Un postulado fundamental de esta teoría es que el conocimiento matemático se construye mediante la acción y en relación directa con una situación-problema que exige una respuesta del alumno (cf. Brousseau, 1986, pp. 155 y ss.). La búsqueda de la respuesta –que conforme a esta teorización se realiza al margen de la acción del profesor, en situación a-didáctica– provoca en quien aprende distintos tipos de acción y de conocimiento que se expresan también de diferentes maneras; inicialmente, mediante unas ciertas estrategias de resolución que se ponen en marcha; posteriormente, mediante la expresión de dichas acciones con fines de comunicación de la acción realizada y los resultados obtenidos. Adicionalmente, en esta teoría, mostrar la validez de las respuestas –construidas en la interacción con la situación-problema– es una cuestión esencial en la construcción del saber, por lo que su socialización y discusión son indispensables como etapas por cubrir en el tránsito hacia el saber.

Como resultado de este proceso, los estudiantes habrán elaborado unos ciertos conocimientos provocados por la situación y la interacción con los compañeros. Finalmente, el profesor hará explícita su participación en la situación para contribuir a establecer la validez del conocimiento producido y elaborar el enunciado o enunciados cuyo papel es formular, de acuerdo con ciertas convenciones, el producto de la interacción con la situación –el nuevo conocimiento–, convirtiéndolo así en un saber reconocible y posteriormente utilizable (cf. Brousseau, 1986, p. 156).

Otro postulado fundamental de la teoría brousseauniana se refiere a la significación del conocimiento: el sentido de un conocimiento matemático se define no sólo por la colección de situaciones donde ese conocimiento se concreta en cuanto teoría matemática, "sino también por el conjunto de concepciones y elecciones que rechaza, de errores que evita [...]" (Brousseau, 1998, p. 118).

Teniendo como telón de fondo tales ideas,

- La dinámica de la situación consistió en presentar a los alumnos la actividad que debían realizar: determinar un trayecto en el *Laberinto*, con ciertas restricciones que se definirían en las consignas.

- La actividad de quien fungió como docente consistió en proponer la situación, dar las consignas necesarias y monitorear a los estudiantes durante la resolución planteando preguntas para orientar los razonamientos o dando pequeñas ayudas si se le solicitaban. En un momento posterior, dirigió la socialización y discusión de resultados y colaboró dando relevancia a aquellos que, conforme a los objetivos planteados, era importante retener e institucionalizar, aunque de manera aún interna, esto es, donde el grupo fija libremente sus convenciones como resultado del proceso de construcción del saber sin utilizar todavía rigurosamente las formalizaciones propias de la cultura matemática escolar (cf. Brousseau, 1986, pp. 156 y ss.).
- En diversos momentos del desarrollo de la sesión, con el fin de obtener más evidencias que permitieran comprender el tipo de razonamientos que desplegaban los alumnos o promover cierto tipo de reflexiones e ideas, se introdujeron preguntas intencionadas por parte de la docente.

Los participantes en la investigación

Participaron 34 alumnos de sexto grado de primaria –20 mujeres y 14 hombres– en edades comprendidas entre 11 y 12 años. Los participantes constituían un grupo de una escuela pública de una zona urbana de clase media baja al oriente de la Ciudad de México. El nivel de escolaridad de los padres de familia variaba entre los niveles de secundaria y preparatoria, la minoría de ellos poseían estudios de licenciatura. La escuela se orienta por el currículum y los lineamientos propuestos por la Secretaría de Educación Pública sin poseer alguna característica u orientación pedagógica distintiva.

El papel de docente lo desempeñó una de las autoras de este artículo, quien llevó a cabo la aplicación de toda la secuencia, incluido el desarrollo de la situación el *Laberinto*, como parte de su tesis de grado (Valencia, 2014).

DESARROLLO DE LA SITUACIÓN Y EVOLUCIÓN DE LAS IDEAS

LAS CONSIGNAS

Las consignas planteadas por escrito y entregadas a los alumnos en la misma hoja que el *Laberinto* fueron las siguientes:

1. Sin hacer cálculos, elige el camino que consideres te dará más puntos y márcalo con algún color. Las reglas son las siguientes:
   a) Al empezar el juego tienes 100 puntos.
   b) Debes llegar a la meta siguiendo el camino de las operaciones que pienses que te darían más puntos.
   c) No debes pasar dos veces por el mismo segmento ni por el mismo punto.

Una vez trazado el camino para llegar a la meta, las consignas que habrían de seguir los participantes fueron:

2. Haz los cálculos del camino que elegiste para obtener tu total. Puedes usar calculadora.
3. Compara tus resultados con los de tus compañeros y comenten lo que observan.

Las consignas escritas se acompañaron de la siguiente explicación por parte de la docente:

> *Lo que vamos a hacer hoy es como un juego, está en esta hoja, van a empezar con 100 puntos, tienen que escoger un camino que los lleve a la meta, pero tratando de escoger las operaciones que crean que les dan mayor puntaje... en cada línea hay operaciones, que nos van a decir si al pasar por esa línea vamos a multiplicar, dividir, sumar o restar... ustedes van a seguir el camino que crean que les va a dar un puntaje mayor. Las condiciones son que pueden hacer el recorrido que quieran, pero no pueden pasar dos veces por la misma línea ni por el mismo punto. Ahorita lo van a hacer nada más con lo que ustedes piensen, no van a usar la calculadora todavía, ni van a ir haciendo las operaciones, nada más van a elegir el camino con las operaciones que consideren... ya después hacemos los cálculos.*

Es decir que se solicitó a los estudiantes seguir la secuencia de operaciones que consideraran que los llevaría a obtener como resultado el mayor número posible. Posteriormente, se verificaría la validez o no validez de sus previsiones en cuanto a los resultados que se obtendrían al efectuarlas. Desde nuestro interés como investigadoras, al realizar la actividad, los estudiantes evidenciarían si interpretaban estas operaciones conforme al *síndrome MADA*.

Con base en esta actividad inicial se instrumentó el resto de la situación y se registró el proceso de abandono del síndrome durante el desarrollo de esta. La actividad se trabajó en varias fases; la primera se llevó a cabo de manera individual.

- *Fase 1. Definición, mediante trabajo individual, del trayecto que dé más puntos.* A cada estudiante se le entregó una hoja con el *Laberinto*. Conforme a las consignas, en un primer momento debían elegir un camino y marcarlo con color, siguiendo las operaciones que consideraran aumentarían de manera más significativa la puntuación inicial (100 puntos). Una vez dadas las instrucciones, la tarea se resolvió individualmente.

Aparición del síndrome MADA

La mayoría de los trayectos definidos por los estudiantes mostraron razonamientos anclados en la lógica de los números naturales, es decir que, conforme a nuestra hipótesis, se constató la presencia del *síndrome MADA*. Efectivamente, en los comentarios entre compañeros o los dirigidos a la profesora, se observa casi como constante la elección de trayectos con "puras sumas y multiplicaciones". La resta y la división forman parte de los trayectos de manera obligada porque, dicen los niños, ambas operaciones causan pérdida (en la figura 2 se pueden ver algunos de los trayectos definidos en la primera parte de la actividad).

Algunos comentarios recogidos en esta fase de la sesión son interesantes, por ejemplo, el de dos niñas –Areli y Karen– que, al comentar el trayecto de esta última, dicen, como haciendo un recuento de los cálculos:

> Areli: *Menos este* número, *por este* (enfático), *por este* (enfático), *entre este* (como expresando "¡ni modo!"), *por este* (enfático), *y ya*...

El énfasis en la expresión "por éste" parece expresar su idea de que con las multiplicaciones van a obtener puntajes altos, de ahí que las refieran enfáticamente, mientras que la resta y la división, según el tono utilizado, las usan "como mal necesario":

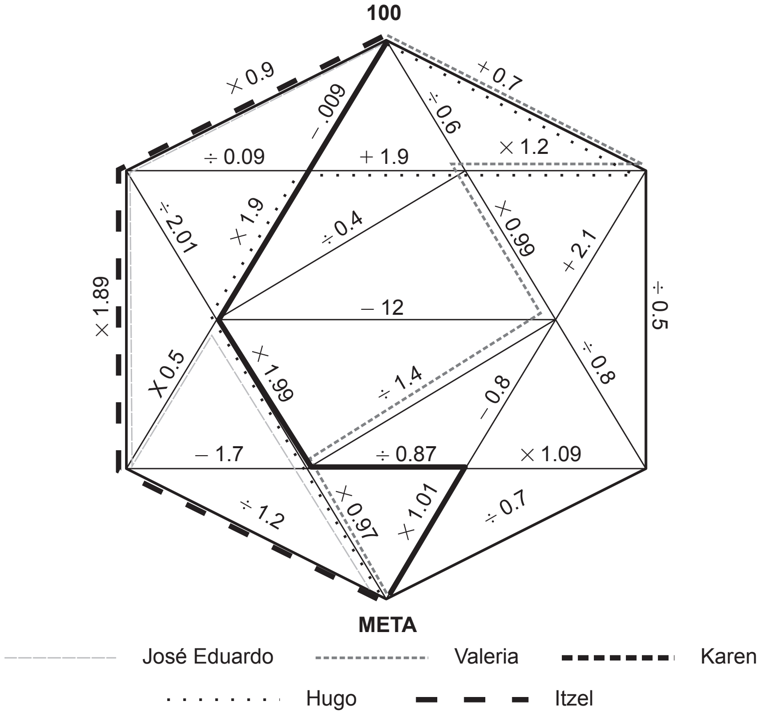


Figura 2. Algunos trayectos determinados en la actividad inicial

Una nueva idea: el número de operaciones también afecta la magnitud del resultado

Esta idea, expresada por varios estudiantes, se muestra en el comentario de Pedro, quien tiene una calculadora y dice a José Eduardo:

Pedro: *Yo ocupo* más (operaciones) *que tú, yo tengo más sumas.*

José Eduardo: *¿Sí?*

Pedro: *Tú tienes cinco "pors"* (se refiere a multiplicaciones) *y yo tengo cinco* (multiplicaciones) *más una suma* (lo dice entusiasmado, como anticipando que por eso tendrá más puntos).

José Eduardo (cuenta las operaciones de su trayecto): *1, 2, 3, 4, 5*... (véase figura 2), *¡Ah!,* (como anticipando que va a tener menos puntos que su compañero).

Poco después,

Pedro (dice a José Eduardo): *¡Creo que tengo un camino super largo, con "pors" y "más"!* (borra, entusiasmado, el camino anterior e intenta trazar el nuevo).

En el mismo sentido, se escuchan comentarios de otros niños, por ejemplo "¡Pero tu camino está bien corto!"

Es decir, que las hipótesis con que los niños inician la actividad reflejan el *síndrome* MADA. Posteriormente, surge una idea más: el número de operaciones también es relevante para definir la magnitud del resultado: a mayor número de sumas y multiplicaciones, mayor será el resultado.

- *Fase 2. Puesta en común de resultados.* Después de que los estudiantes hubieron definido individualmente su trayecto, se inició la presentación de resultados a todo el grupo para su discusión. Esta fase se inició cuando la profesora preguntó a los alumnos "¿Alguien obtuvo un resultado menor que los 100 puntos con que comenzaron el juego?" Esta pregunta dio pie a la presentación y discusión de tres trayectos que se comentan en seguida. El primero de ellos es un trayecto donde azarosamente predominan restas y divisiones.

Sorprendentemente, Juan David señaló haber obtenido 97.59 siguiendo las operaciones mostradas en la figura 3 (siendo este un puntaje menor que el inicial, aunque resultado de cálculos erróneos, como se verá después).

En este trayecto se observa una combinación de restas y divisiones y sólo una multiplicación. Se preguntó a los niños por qué consideraban que el resultado de Juan David era menor que los 100 puntos con los que había iniciado y se recibieron comentarios sobre la resta y la división:

Michelle: *Porque también tenía que restar.*

Con ello se hacía referencia a que, en el recorrido seleccionado por Juan David, había dos restas y consideraban que la elección de esas operaciones había provocado la disminución del puntaje inicial.

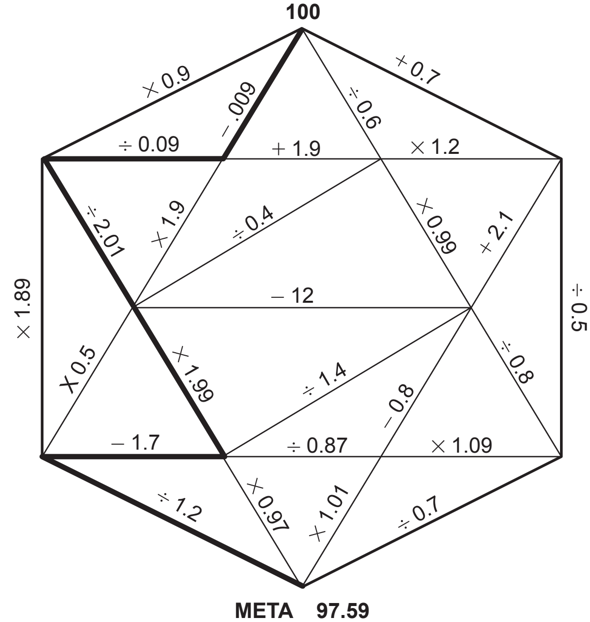


Figura 3. Trayecto y resultado de Juan David

Profesora: *Michelle dice que a lo mejor porque utilizó aquí* (señala el trayecto) *una operación que era de resta. ¿Por qué más? En todo el recorrido que Juan David hizo hay dos operaciones de resta* (las señala en el trayecto marcado).

La consideración de los efectos de la división se hizo visible en comentarios como los siguientes:

José Eduardo: *Hay tres divisiones y sólo una multiplicación.*
Profesora: *¿Y qué tiene que ver que haya elegido tres divisiones?*
Christian: *Con la división se parte* (el número) *en partes iguales.*
Janeth: *Sí, en partes iguales.*
Profesora: *Cuando divido, ¿qué le pasa al número?*
Christian: *Se divide en partes iguales.*
Profesora: *Al final, entonces, ¿cómo es mi resultado?*
Janeth y Christian: (Al final) *es* (un número) *más pequeño.*

Profesora: *¿Siempre que divido me da un número más pequeño?*
Alumnos: *No.*
Nadia: *No, porque si divido y luego sumo, a lo mejor me puede dar más.*

En estas argumentaciones se muestran las ideas de los alumnos sobre los efectos de cada operación: cuando se hacen restas y divisiones, estas harán más pequeño el número de partida, es decir, asocian la resta con quitar elementos de un conjunto y la división con subdividirlo en partes más pequeñas, obteniendo en ambos casos como resultado conjuntos con menor número de elementos que en el conjunto de partida.

El asombro al percatarse de que algunas divisiones agrandan el número de partida y dificultades para explicar el hecho

Se verificó con la calculadora que el resultado de Juan David fuera correcto y se encontró que el resultado que obtuvo (97.59) no correspondía a la secuencia de operaciones seleccionadas, sino que el correcto era 1 097.6485 (figura 4).

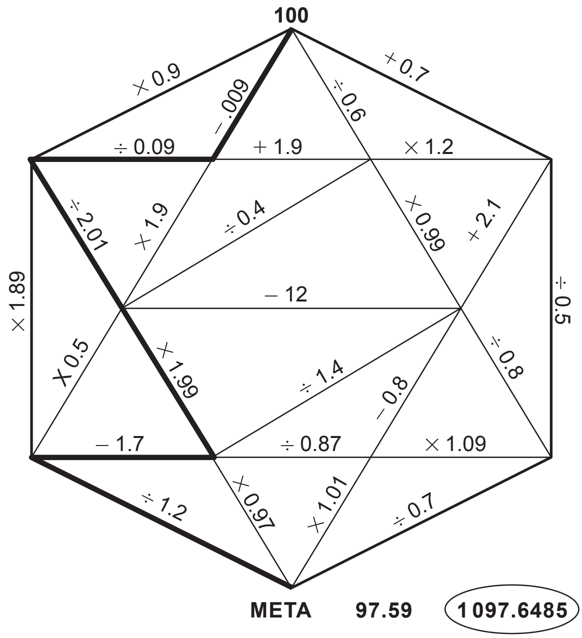


Figura 4.
Resultados de Juan David

La revisión de este resultado dio pie a comentarios interesantes respecto de los efectos de las operaciones:

Profesora: *Todos con su calculadora vamos a verificar que el resultado de su compañero Juan David sea correcto. Empezó con 100 puntos, después ¿qué hizo?*
Eduardo: *Restó 0.09.*
Michelle: *Le quedaron 99.91.*
Alumnos: [...] *Dividimos el 99.91 entre 0.09.*
Profesora: *¿Y cuánto salió?*
Alumnos: *¡1 110!* (asombrados).
Pedro (a un compañero): *¡Salió más!*
Profesora: *¿Cuánto le dio?*
Alumnos: *¡Mil ciento diez!* (sorprendidos)
Profesora: *¿Y luego qué hizo?*
Alumnos: *Dividió entre 2.01* (y siguen haciendo conjuntamente los cálculos restantes, el resultado en esta ocasión es 1 097.6...).
Profesora: *¿Sí es este el resultado?* (señala el 97.59 en el laberinto).
Alumnos: *¡No!*
Karla Janeth: *¡No, le salió un montón!* (sorprendida)
Profesora: *¿Cuánto* salió*?*
Alumnos: *¡1 097.6485!* (continúan asombrados)

Una vez que se observó que el resultado correcto era mayor que los 100 puntos de inicio, la profesora pregunta a los estudiantes: "*¿Por qué creen que se obtuvo un número mayor que 1 000 si se realizaron en su mayoría restas y divisiones y antes comentaron que, al efectuar esas operaciones, el número resultante siempre es menor que el número inicial?*" Como respuesta inicial se obtuvieron comentarios como los siguientes:

Profesora: *¿Por qué el número "se agrandó" si se hicieron restas y divisiones?*
Luis: *¿Por sumar mal?*
Nadia: *Por los décimos, centésimos y milésimos que tienen esas operaciones, por eso a lo mejor le salió más.*

Los argumentos mostraban la persistencia de las ideas iniciales, puesto que se buscaban pruebas alternas para justificar el hecho de que la división podría agrandar al número. Entonces, la profesora decide confrontar a los niños con los resultados de las operaciones.

Profesora: *¿Sí me puede salir más de mil si utilizo divisiones y restas?*
Alumnos: *Sí.*
Profesora: *¿Por qué?*
Nadia: *Porque ahí le salió más de mil.*
Profesora: *Pero, ¿por qué le salió más de mil?*
Nadia: *¡Por inteligente!*
(Risas)

Hasta este momento, como se ve en el intercambio, los niños estaban lejos de tener claridad sobre las razones que modifican los efectos de multiplicar y dividir con decimales, aunque de alguna manera ya habían intuido que ¡la división puede agrandar!

Un trayecto compuesto de sumas y multiplicaciones

Luis Ángel, quien obtuvo un puntaje de 450.15, presenta en el pizarrón el recorrido que siguió en la actividad inicial (figura 5) y verificó que su resultado

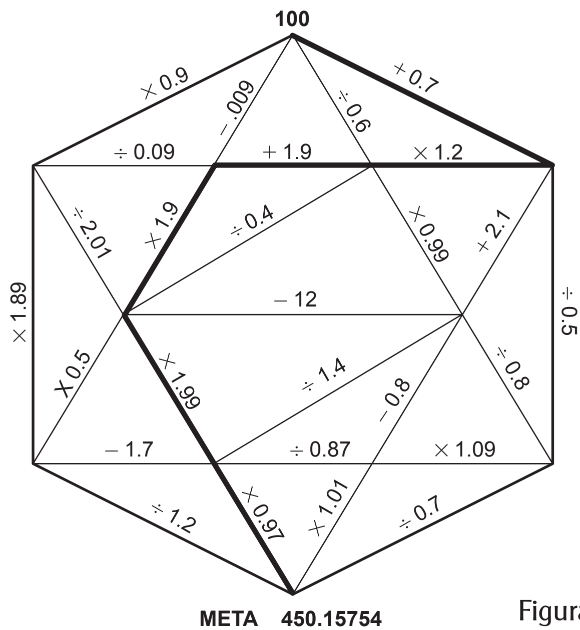


Figura 5. Resultado de Luis Ángel

fuera correcto. El recorrido de este estudiante estaba compuesto por sumas y multiplicaciones. Justificó esta composición de la siguiente manera:

> Luis Ángel: *Porque tiene más sumas y multiplicaciones... porque si restaba me podría dar menos de 100... y si dividía tal vez sería más pérdida.*

En este comentario (referido al laberinto trazado en la primera fase de la sesión), se reitera la idea de que multiplicar necesariamente agranda los números de partida y que, al dividir, necesariamente el resultado (el cociente) será menor que el dividendo. Pero la profesora destacó que a pesar de que Luis Ángel había seleccionado solamente sumas y multiplicaciones, el resultado obtenido fue menor que el de Juan David que, en su recorrido, incluyó restas y divisiones.

Hugo, quien obtuvo el puntaje 6 011.87544 (figura 6), esto es, mucho mayor que el número fijado como objetivo, ante a la pregunta de la maestra dijo:

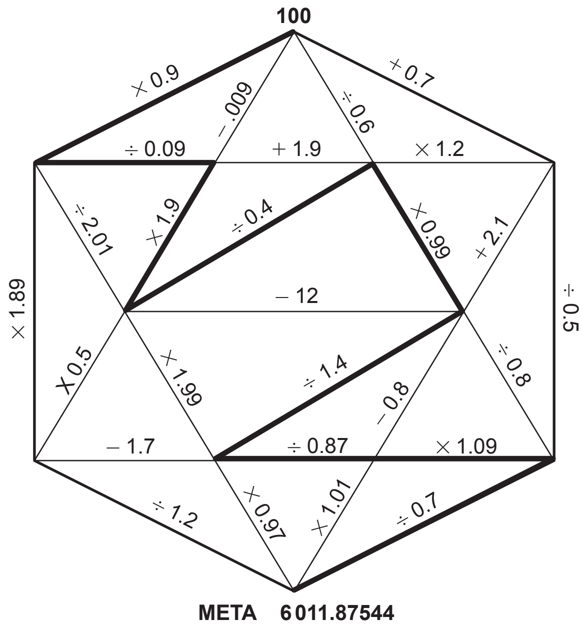


Figura 6. Resultado de Hugo

Hugo: *Yo fui haciendo las operaciones desde el principio y fue que me salió ese número.*

Este alumno no siguió las indicaciones dadas para realizar la actividad (lo cual le gana exclamaciones y acusaciones de haber hecho trampa). En vez de eso, fue realizando las operaciones y seleccionando así el trayecto que aumentaba su puntaje. El camino marcado incluía únicamente multiplicaciones y divisiones –aunque al parecer sin una reflexión acerca de la magnitud de los resultados producidos por estas operaciones– así que la profesora preguntó al grupo:

Profesora: *Él utilizó sólo multiplicaciones y divisiones, ¿por qué le habrá dado un resultado más grande, incluso mayor que mil?*

Y surgieron comentarios en general todavía anclados al *síndrome* MADA:

Nadia: *¿Por las multiplicaciones?*
Profesora: *¿A qué debimos prestar atención para obtener un número más grande?*
Pedro: *En las divisiones*
Luis Ángel: *...o a las cantidades.*
Karen: *En las divisiones no, porque yo hice uno con puras divisiones y no me sale.*

Posteriormente la profesora propuso verificar que el resultado fuera correcto, anotando los resultados después de cada operación para identificar las que llevaban a obtener un número mayor (figura 7).

Hacia la construcción de una nueva regla

Luis Ángel había explicado que eligió el camino de sumas y multiplicaciones porque consideraba que estas operaciones "agrandarían el resultado", mientras que las divisiones "implicarían pérdida". La profesora retoma la idea para hacer notar el efecto contrario: en el trayecto elegido por Hugo, al multiplicar 100 por 0.9, el resultado era menor que el inicial, es decir, 90, y al dividir 90 entre 0.09, el resultado se había hecho mayor que 1 000, contrario a lo que se esperaba que sucediera por haber efectuado esas operaciones:

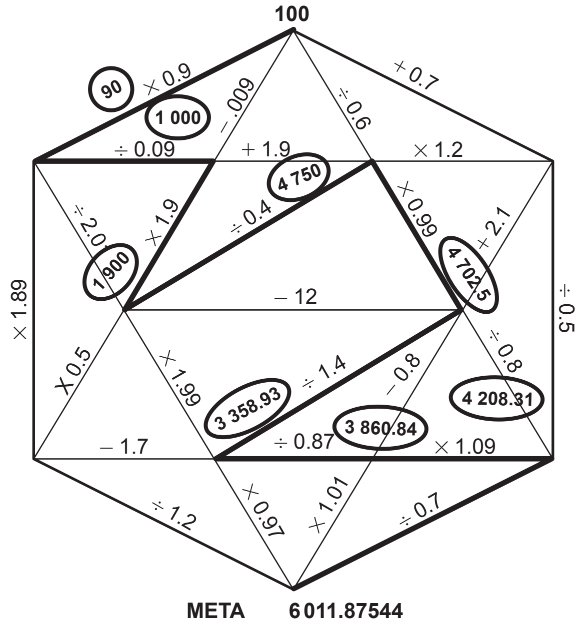


Figura 7. Cálculos parciales en el trayecto determinado por Hugo

Profesora: (Después de hacer cada una de las operaciones) *Pero hace rato su compañero Hugo dijo que él no escogió divisiones porque el número se iba a hacer más chiquito, pero miren, aquí tenía 100, multiplicó por 0.9 ¿y qué le dio?*

Alumnos: *90.*

Profesora: *¿Y por qué le dio noventa* (si hizo una multiplicación)*?*

Nadia: *Porque fue por decimal... sí, por decimal y no por entero*[5]

Profesora: *Y fíjense aquí, tenía 90 y los dividió entre 0.09 ¿y qué pasó?, salió 1 000, ¿por qué?*

Nadia: *Por eso, porque igual era decimal.*

Profesora: *Entonces, ¿la multiplicación siempre hace el número más grande y la división más chiquito?*

Alumnos: *No/A veces* (varios al mismo tiempo).

[5] Nos parece que, cuando Nadia menciona los decimales en este episodio, se refiere a números menores que uno, "que no alcanzan a ser enteros", idea que reitera en su siguiente intervención (dos renglones adelante).

Janeth: *Puede dar lo mismo.*
Profesora: *A ver, ¿tú qué piensas?* (señala a Edith)
Edith: *No, depende de qué número* (es).
Profesora: *Veamos, aquí tenía 90* (señala el laberinto), *dividió* (entre 0.09) *y le salió 1 000, que sí es un número más grande..., pero aquí tenía 4 702.5* (señala otro segmento del laberinto) *y al dividir* (entre 1.4) *le dio un resultado de 3 358.9. ¿Por qué en ocasiones sale más y en otras sale menos?*

Una estudiante precisó la idea:

Michelle: *Es que multiplicó por un decimal*[6] (Michelle quiere decir número menor que 1) *y no por un entero... y la división pues igual por eso, porque igual era decimal* (de nuevo quiere decir número menor que 1).

En el diálogo precedente y en la participación de Michelle puede verse una nueva idea, aunque aún en ciernes: si un número se multiplica por otro que tenga números enteros, el resultado va a ser mayor, y si se multiplica por un número menor que la unidad, el resultado será menor que el número inicial, aunque la operación que se aplique sea la multiplicación. A la inversa con la división: dividir por un número menor que la unidad dará un cociente mayor que el dividendo.

Con la incorporación de estos comentarios, algunos estudiantes comenzaron a ganar claridad acerca de que la multiplicación no siempre agranda al número de partida y que la división no siempre lo hace más pequeño.

La sobregeneralización

En el contexto de generación de la nueva idea hay quien se va al extremo y hace sobre-generalizaciones, como la siguiente:

Guillermo: (Para hacer un camino que nos dé un resultado más grande) *podríamos pasar por todas las divisiones.*

[6] En este momento, conforme a las respuestas, nos parece que Michelle, al igual que Nadia, identifica los números decimales con aquellos que son menores que la unidad, pues contrapone el 0.09 (decimal) al 1.4 (no decimal o entero). Esto ocurre a pesar de que ya se habían trabajado diversos aspectos de dichos números a lo largo de la secuencia.

A la búsqueda de apoyo para la nueva idea

Hasta ese momento, a excepción de algunos, los estudiantes no lograban comprender del todo cómo es que algunas divisiones hacían que el número inicial se agrandara, como sucedió al dividir 90 entre 0.09 (y se obtuvo 1 000), o cómo otras tenían como efecto que el número se hiciera más pequeño, como cuando se dividió 4 702.5 entre 1.4 y se obtuvo 3 860.84. Con la intención de aclarar las ideas, propusieron seguir un recorrido donde se consideraran sólo las divisiones (figura 8).

Al trazar el recorrido que sugirieron los estudiantes, el cual consistía en seleccionar la mayor cantidad posible de divisiones (bajo la nueva hipótesis de que, al dividir con decimales, el resultado siempre se agrandaría) y posteriormente realizar las operaciones y obtener como resultado 722.61, los alumnos observaron que no habían obtenido un resultado mayor que el anterior 6 011.87544. Este resultado creó confusiones momentáneas respecto a cuándo una multiplicación o división agrandan o achican un número, pero también

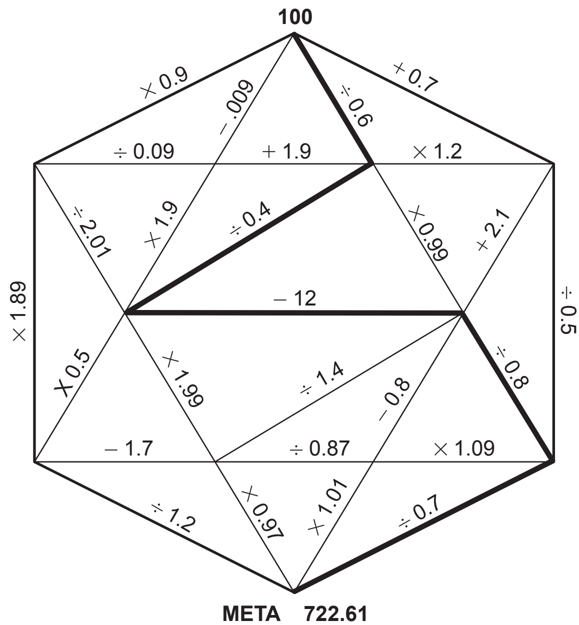


Figura 8. Recorrido sugerido por los estudiantes

causó interés de hacer nuevas búsquedas por parte de algunos alumnos que ahora están próximos a definir la regla de que dividir por un número menor que 1 da un resultado mayor que el número inicial y dividir por un número mayor que 1 da un número menor.

Profesora: *¿Qué pasa si yo divido un número, el que sea, entre un número decimal que sea menor que la unidad?*
Alumnos: *Vamos a comprobarlo.*
Profesora: *Por ejemplo, si divido 8 entre 0.03* (anota en el pizarrón), *¿qué pasa?*
Alumnos: *Se hace más grande.*
Nadia: *300.*
Alondra: *No, son 266.66.*
[...]
Profesora: *Si yo divido entre un número que también sea decimal pero que contenga enteros como 1.3* (8 entre 1.3), *¿cómo me va a dar la cantidad?*
Bryan: *No sabemos.*
Alumnos: *Más pequeña.*
Janeth: *Son 6 enteros...* (no puede leer la cantidad, así que pasa a escribirla en el pizarrón, 6.15384...)
Profesora: *Más pequeña, ¿y si multiplico por un número que no tenga enteros?*
Alumnos: *Va a ser más pequeña.*
Profesora: *¿Y si multiplico por un número que tenga enteros?*
Alumnos: *Más grande.*

La formulación de una regla: la magnitud del resultado depende del número por el que se multiplique o se divida

Finalmente, muchos de los alumnos llegaron a la conclusión de que, al dividir un número entre un decimal menor que 1, el resultado se agranda y que, cuando se divide entre un número que contenga enteros, el resultado será menor que el dividendo; contrario a lo que ocurre con la multiplicación donde, al multiplicar por un decimal menor que 1, el resultado "se achica" y, al multiplicar por un decimal que contenga enteros, el resultado será mayor que el número de partida.

Como culminación de la actividad, los estudiantes elaboraron con ayuda de la profesora la siguiente conclusión: al utilizar decimales, las operaciones no tienen una sola tendencia –multiplicación → aumentar y división → disminuir–, sino que su efecto depende del número por el que se multiplica o entre el que se divide: si es menor o mayor que 1.

DISCUSIÓN

Al iniciar la actividad en torno al *Laberinto de los decimales,* nos preguntamos lo siguiente:

a) Si los estudiantes participantes se acercarían a la multiplicación y división de decimales con la lógica de "la multiplicación siempre agranda y la división siempre achica".
b) En qué medida el *Laberinto de los decimales* sería útil para promover la reflexión sobre dichas ideas y favorecer su abandono.
c) En qué medida la interacción entre los compañeros, con la orientación y coordinación de alguien que sabe más, favorecería adicionalmente la comprensión de los efectos de multiplicar y dividir con decimales.

Al iniciar la experiencia, la gran mayoría de los estudiantes consideraba que, de acuerdo con los modelos más intuitivos sobre estas operaciones, al efectuar una multiplicación sobre cualquier número, este se agrandaría y daría por resultado un número mayor que el inicial y que, al realizar una división, el efecto sería necesariamente el contrario, es decir, el resultado de realizar una división siempre sería un número menor que el número inicial. Estas ideas fueron confrontadas a partir de la interacción con el *Laberinto de los decimales* mediante la introducción de cálculos en los que la división agrandaba al número de partida mientras que la multiplicación lo hacía más pequeño. Estos resultados, contrarios a los esperados por los alumnos, generaron confusiones y dudas temporales y provocaron que, durante el proceso, incluso algunos de ellos hicieran una sobregeneralización: en los decimales, las operaciones siempre tienen el efecto inverso al que tienen al operar con números naturales, es decir, la división con decimales siempre agrandará al número de partida y la multiplicación siempre lo hará menor.

A través de la definición de trayectos en el laberinto, la discusión grupal y el planteamiento de preguntas intencionadas por parte de la profesora, la mayoría de los estudiantes concluyó que tanto la división como la multiplicación pueden agrandar o reducir un número, dependiendo de las características de los números con los que se trabaje: si un número se multiplica por un decimal que contenga enteros, el resultado será mayor y, si el número por el que se multiplica es menor que la unidad, el resultado será menor. En la división, el efecto es el contrario; si el número entre el cual se divide es mayor que la unidad, el resultado (cociente) será menor que el dividendo y, si el número entre el cual se divide es menor que la unidad, el resultado (cociente) será mayor que el número inicial. Estas conclusiones, en nuestra opinión, constituyen un avance importante en la manera en que los estudiantes conceptualizan los efectos de las operaciones con decimales, pero llegar a este punto implicó pasar por varios momentos:

1. *La persistencia del modelo intuitivo:* la multiplicación agranda, la división achica.
2. *El número de operaciones cuenta:* el número de operaciones también es relevante para definir la magnitud del resultado, a mayor número de sumas y multiplicaciones realizadas, mayor es el resultado.
3. *El asombro:* al percatarse de que algunas divisiones agrandan el número y algunas multiplicaciones lo achican.
4. *La sobregeneralización:* en los decimales, las operaciones siempre tienen el efecto inverso al que tienen al operar con números naturales, la división siempre agranda, la multiplicación siempre achica.
5. *El efecto depende de los números por los que se multiplica o divide*: si se divide por un número menor que 1, el resultado se agranda, si se multiplica por un número menor que 1, el resultado se achica.

Pero las ideas iniciales, válidas en el campo de los naturales, no resultan fáciles de modificar, es decir, que el s*índrome MADA* no desaparece de un plumazo. Al finalizar la sesión de trabajo con el *Laberinto de los decimales*, poco más de la mitad de los participantes en la experiencia logró analizar los números involucrados en una multiplicación y en una división en el sentido de determinar correctamente con cuáles se obtendrá un resultado mayor que el número inicial. En otras palabras, estos niños mostraron que, al menos en ese momento, el *síndrome MADA* se desvanecía. Pero en el resto de los estudiantes permanecían dudas respecto de cuándo la multiplicación agranda y cuándo la división achica.

Como quiera que sea, conviene destacar el hecho de que el *Laberinto* fue un recurso útil para contribuir a superar el *síndrome MADA* y que este recurso tiene bondades importantes porque: *a)* incluye multiplicaciones y divisiones que “agrandan” y “achican” y, con ello, los estudiantes entran en contacto con resultados que ponen en conflicto sus ideas previas; *b)* descarga de la pesada tarea de hacer los cálculos al permitir el uso de la calculadora; *c)* motiva a realizar la actividad, no sólo por ser un juego, sino porque hay una confrontación permanente entre resultados esperados y resultados obtenidos que provoca un desafío intelectual. Sin embargo, y siguiendo nuestras preguntas iniciales, es posible decir que no son suficientes estas bondades para asegurar el logro de los objetivos planteados; para ello, se hace indispensable la participación de un o una docente con suficientes conocimientos matemáticos y pedagógicos del contenido (los decimales) y con capacidad de coordinar las actividades y formular las preguntas pertinentes en el momento oportuno.

REFLEXIONES FINALES

Sin duda, los números decimales y sus operaciones son un campo complejo que resulta un desafío enseñar y aprender de manera significativa y funcional. Para el caso específico de las ideas sobre la multiplicación y la división con estos números, hemos constatado la utilidad de presentar a los estudiantes una situación donde se pone en duda la idea de que, al efectuar una multiplicación, el resultado de esta siempre es mayor que el número inicial, y que la división no siempre da como resultado un número menor que el dividendo, promoviendo entre los estudiantes el análisis de los números involucrados en las operaciones.

Asimismo, se constatan las bondades de la interacción entre los alumnos con la guía adecuada de un profesor que conozca bien la problemática motivo de la interacción.

Con situaciones como esta, se podrá propiciar en los estudiantes la diferenciación de los efectos de operar con dichos números, rompiendo con la idea de que los números decimales son solamente una extensión de los naturales, motivo por el cual se utilizan según las mismas reglas. También es relevante considerar que las situaciones en sí mismas no pueden tener la potencia didáctica que se logra con una buena gestión de la actividad y la promoción de una socialización y confrontación de las respuestas, teniendo en mente a dónde se quiere llegar. Es decir, se hace indispensable un buen conocimiento matemático y didáctico por parte del profesor para que situaciones como el *Laberinto de los decimales* rindan el fruto que teóricamente se espera de ellas.

Este escrito, además de comunicar lo ocurrido en la interacción con el *Laberinto de los decimales*, también quiere llamar la atención hacia el hecho, ya señalado por varios investigadores (Brown, 1981; Barriendos, 2013; Graeber, Tirosh y Glover, 1989; Maza, 1991), de que las ideas erróneas sobre los efectos de multiplicar y dividir con decimales, cuyo tratamiento didáctico hasta hoy se omite en las escuelas, afecta a la elección de la o las operaciones que permiten resolver un problema que involucra decimales, cuestión por demás importante en la formación matemática de los estudiantes y en la capacidad de utilizar funcionalmente los conocimientos adquiridos en la escuela.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, Alicia (2008), "Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible", *Educación Matemática*, vol. 20, núm. 2, pp. 5-33.

——— (2013), "Conocimientos en construcción sobre los números decimales: los resultados de un acercamiento conceptual", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* vol. 18, pp. 29-59.

Ávila, Alicia y Silvia García (2008), *Los decimales: más que una escritura,* México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Barriendos, Ana (2013), "La multiplicación achica y la división agranda. Cuando los decimales contradicen la experiencia", ponencia presentada en el XII Congreso Nacional de Investigación Educativa, Guanajuato, México, noviembre de 2013. Disponible en www.comie.org.mx

Broitman, Claudia, Horacio Itzcovich y María Emilia, Quaranta (2003), "La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 6, núm. 1, pp. 5-26.

Brousseau, Guy (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Tesis de Doctorado de Estado, Universidad de Bordeaux I, Francia.

——— (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La pensée Sauvage.

Brown, Margaret (1981), "Place value and decimals", en K. M. Hart (editor general), *Children Understanding of Mathematics*, Inglaterra, Anthony Rowe Publishing Services, pp. 11-16 y 48-66.

Centeno, Julia (1997), *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?*, Madrid, Síntesis.

Fischbein, E., M. Deri, M. Nello y M. S. Marino (1985), "The role of implicits models in solving verbal problems in multiplication and division", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 16, núm. 1, pp. 3-17.

Graeber, Ana, Dina Tirosh y Rosseane Glover (1989), "Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, núm. 1, pp. 95-102.

Konic, P., J. Godino y M. Rivas (2010), "Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto", *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 74, julio, pp. 57-74.

Maza, Carlos (1991), "Preconceptos erróneos en multiplicación y división entre futuros profesores", *Infancia y aprendizaje*, vol. 56, pp. 93-103.

NCTM (2008), *Maze playing board*. Disponible en http://illuminations.nctm.org, consultada el 14 de octubre de 2013.

Peterson, John y Joseph Hashisaki (1969), *Teoría de la aritmética*, México, Limusa

Resnick, L., P. Nesher, F. Leonard, M. Magone, S. Omanson e I. Peled (1989), "Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, núm. 1, pp. 8-27.

Roditi, Éric (2007), "La comparaison des nombres décimaux. Conception et expérimentation d´une aide aux élèves en difficulté", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 12, pp. 55-81.

Saiz, Irma, Edith Gorostegui y Diego Vilotta (2011), "Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza; entre las expresiones decimales y los números decimales", *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 1, pp. 123-151.

Valencia, Evelyn (2014), *Secuencia de enseñanza de los números decimales basada en un diagnóstico de las dificultades de comprensión de estos números*, Tesis de Maestría en Desarrollo Educativo, Universidad Pedagógica Nacional, México.

Van Galen, F., E. Feijs, N. Figueiredo, K. Gravemeijer, E. Van Herpen y R. Keijzer (2008), *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions. A Learning-Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6*, Países Bajos, Sense Publishers.

DATOS DE LAS AUTORAS

Evelyn Valencia
Universidad Pedagógica Nacional, México
vm_evy@hotmail.com

Alicia Ávila
Universidad Pedagógica Nacional, México
aliavi@prodigy.net.mx