Historias de Matemáticas

Los curiosos problemas de mezclas de Alcuino de York

The curious mixing problems by Alcuin of York

Antonio M. Oller Marcén

Revista de Investigación

Pensamient Matemátic MAIC

Volumen IV, Número 1, pp. 017–032, ISSN 2174-0410
Recepción: 27 Ago'13; Aceptación: 15 Mar'14

1 de abril de 2014

Resumen

En este trabajo se presentan los problemas "de mezclas" contenidos en la colección medieval *Propositiones ad acuendos juvenes* de Alcuino de York y se analizan posibles métodos de resolución, puramente aritméticos, que pudo haber seguido el autor del texto original. Pensamos que un análisis de este tipo puede tener interesantes implicaciones didácticas a la hora de afrontar el paso de la Aritmética al Álgebra.

Palabras Clave: Matemática medieval, Algebrización, Mezclas, Aritmética.

Abstract

In this work we present the "mixing" problems contained in the medieval collection *Propositiones ad acuendos juvenes* by Alcuin of York and possible, purely arithmetic, solving methods that could have been used by the author are analyzed. We think that such an analysis can have interesting didactical implications when facing the transition from Arithmetic to Algebra.

Keywords: Medieval mathematics, Algebrization, Mixing, Arithmetic.

1. Introducción

El Álgebra, entendida como el arte de resolver ecuaciones, es posiblemente uno de los mayores avances en la historia de las Matemáticas. Problemas de enunciado complicado y difíciles de manejar se convierten en ecuaciones para algunas de las cuales, además, se posee un procedimiento algorítmico de resolución. Sin embargo el Álgebra también tiene sus peligros si no se usa adecuadamente. Uno de los más importantes es que es muy fácil obviar el significado de las manipulaciones que uno está efectuando. Se olvida a veces que los números que aparecen en el problema no son realmente entes abstractos sino que generalmente simbolizan cantidades de magnitud y al operar con ellos no deberíamos perder de vista lo que significa cada una de las operaciones y resultados parciales (Livneh y Linchevski, 2007).

En la enseñanza actual, sin embargo, se tiende a introducir el Álgebra muy tempranamente, cuando todavía el manejo aritmético de los alumnos no es el adecuado. Entendemos que la Aritmética va más allá de la mera aplicación de los algoritmos de la suma, resta, multiplicación o división; y que ha de incluir el manejo significativo de las magnitudes y las operaciones con ellas. La proporcionalidad, que sería un buen banco de pruebas en el que poner en juego todos estos conocimientos (Gairín y Escolano, 2009), se convierte a menudo en una aplicación mecánica de la Regla de Tres (Gómez, 2006) con la que es muy fácil caer en la tentación de introducir una incógnita y adelantar la entrada en escena del Álgebra. Esta tentación es tanto mayor cuanto mayor es la complejidad de los problemas considerados. En especial los problemas de repartos proporcionales (Gómez, 1999) y los de mezclas (lo que se conocía antaño como Regla de Aligación) tienden a afrontarse actualmente de un modo puramente algebraico, con la pérdida de significado que ello conlleva.

Pensamos que el uso de textos antiguos en el aula puede ser una buena forma de mejorar los procesos de aprendizaje de las Matemáticas (Richard, Meavilla y Fortuny, 2010) y, en particular, de facilitar el proceso de transición de la Aritmética al Álgebra. En concreto el uso de textos de épocas en las que el Álgebra no era conocida o no estaba aún completamente generalizada (Férnandez, 1997). Así, puede ser útil realizar actividades de diversos tipos, por ejemplo:

1. Estudiar cómo se resolvían originalmente ciertos problemas sin ayuda del Álgebra, tratando de comprender los razonamientos detrás de las soluciones.

2. Comparar una solución algebraica con una aritmética del mismo problema, comentando las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas.

3. Tratar de buscar la Aritmética que se esconde detrás de un razonamiento algebraico simbólico.

Evidentemente, para poder realizar este tipo de actividades es necesaria por parte del docente una labor previa de investigación y de análisis de textos que se adecuen al propósito perseguido (Meavilla, 2004). En este trabajo hemos analizado una serie de problemas que consideramos interesantes desde un punto de vista aritmético dentro de la colección medieval de problemas titulada *Propositiones ad acuendos juvenes* de Alcuino de York. Hemos elegido una serie de problemas que, bajo una clasificación moderna, podrían clasificarse como "de mezclas" y que admiten un tratamiento muy rico sin necesidad de recurrir al Álgebra.

El artículo se organiza del siguiente modo: En la segunda sección se da un breve apunte biográfico de Alcuino de York, se describen someramente las *Propositiones* y se refieren las fuentes consultadas. En la tercera sección se justifica la elección de los problemas analizados y en la cuarta se presentan las traducciones y se da una clasificación más fina de los mismos. En las secciones sexta, séptima y octava se hace un estudio exhaustivo de cada uno de los grupos de problemas que constituyen la anterior clasificación; se presenta un procedimiento moderno de resolución y también se hace una discusión sobre los procedimientos que pudo haber utilizado Alcuino para resolver esos problemas. Por último se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Alcuino de York y las *Propositiones ad acuendos juvenes*

Aunque no es el objetivo de este trabajo presentar una detallada biografía de Alcuino de York ni analizar detenidamente y al completo la obra indicada, no está de más que dediquemos algunas líneas a dar un breve apunte biográfico y a describir las *Propositiones*.

Alcuino de York nació en la actual Inglaterra en la primera mitad del siglo VIII. Estudió en la escuela benedictina de York, por aquel entonces un importante centro cultural, donde también enseñó y que llegó a dirigir. Hacia el año 782 se trasladó a la Escuela Palatina en Aquisgrán por invitación de Carlomagno; allí pasó dos periodos: de 782 a 790 y de 793 a 796. Tras este último periodo se retiró como abad a la abadía de San Martín en Tours, donde murió.

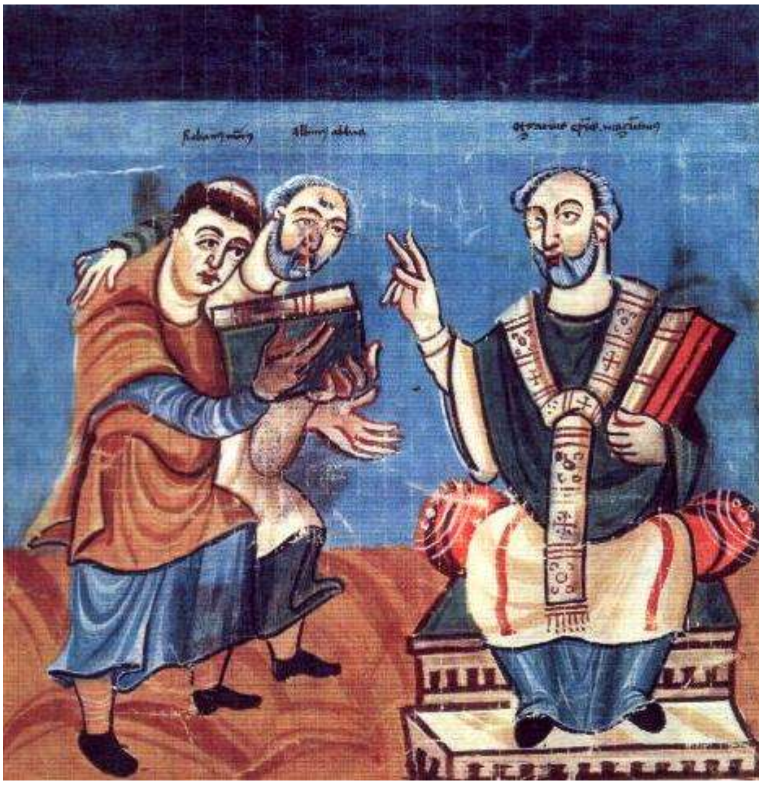

Figura 1. Rabano Mauro apoyado por Alcuino ofrece una obra a Otgar de Maguncia[1]

La obra en la que nos vamos a detener se titula en el latín original *Propositiones ad acuendos juvenes* o, lo que es lo mismo, *Problemas para aguzar a los jóvenes*. Se trata de una colección de 53 (o 56, según las fuentes) problemas de diverso carácter: los hay aritméticos, geométricos e incluso aparecen ejemplos de lo que hoy llamaríamos "Matemática recreativa". El interés de la obra radica en que, en muchos casos, se trata de problemas que aparecen por primera vez en la tradición occidental y que recogen tradiciones orientales (donde los textos recopilatorios de problemas y soluciones tenían una tradición muy anterior) de origen incierto. El texto presenta los enunciados de los problemas junto con sucintas soluciones que, en el caso de

[1] Alcuino de York Carolingian Manuscript manuscriptum Fuldense ca. 831/40, Österreichische Nationalbibliothek Wien.

respuestas numéricas, incluyen tan sólo la respuesta junto con una comprobación de su corrección.

Para estudiar el texto hemos recurrido a dos fuentes que, además, están disponibles en la red. Son las siguientes:

- Contenida en *Beati Flacci Albini seu Alcuini, Abbatis et Caroli Magni Imperatoris Magistri. Opera Omnia*: *Operum pars octava: Opera Dubia*. Ed. D. Frobenius [Froster], Ratisbona, 1777. Revisada y republicada por J.P. Migne como: *Patrologiae Cursus Completus*: *Patrologiae Latinae*, *Tomus* 101, Paris, 1863, columnas 1143-1160.

- Contenida en *Venerabilis Vedae, Anglo-Saxonis Presbyteri. Opera Omnia: Pars prima. Sectio* II – *dubia et spuria*: *De Arithmeticitis propositionibus, tomus* I, Joannes Herwagen, Basilea, 1563. Columnas 153-146. Revisada y republicada por J.P. Migne como: *Patrologiae Cursus Completus: Patrologiae Latinae, Tomus* 90, Paris, 1904, columnas 665-676. *Aliae propositiones ad acuendos juvenes* se encuentra en las columnas 667-676.

Como hemos dicho, ambos textos (las reediciones de J.P. Migne) se hayan disponibles en la página web [1]. En el primero de ellos aparecen 53 problemas, en el segundo son 56; los problemas que aparecen en ambos textos tienen enunciados y títulos idénticos

Hasta la fecha la única traducción completa y comentada de esta obra al castellano se encuentra en el Capítulo 1 de (Meavilla, 2011). Las traducciones de los problemas que se presentan más adelante son del propio autor. Se ha tenido en cuenta la traducción inglesa que se encuentra en (Hadley y Singmaster, 1992) que, sin embargo, omite ciertos detalles que no modifican en nada los enunciados de los problemas.

3. Los problemas objeto de estudio

De entre los problemas que forman parte de la obra hemos elegido centrarnos en un tipo muy concreto de problemas que denotaremos como problemas "de mezclas". Las razones que nos llevan a elegir estos problemas, que ya se han esbozado en la introducción, son las siguientes:

1. El número de problemas de este tipo es bastante elevado. En concreto aparecen ocho problemas de un total de 56 y, además, presentan una regularidad en los enunciados que motiva un análisis detallado.

2. Los problemas de mezclas constituyeron en el pasado una de las principales aplicaciones de las técnicas relacionadas con la proporcionalidad. Con la llegada del Álgebra, sin embargo, el tratamiento dado a estos problemas (cuya resolución puramente aritmética era complicada y a veces incompleta por la falta de unicidad en la solución) se volvió mucho más mecánico. Parece interesante tratar de estudiar las soluciones dadas a estos problemas en un tiempo y un lugar en los que el Álgebra era desconocida.

4. Los problemas "de mezclas" en las *Propositiones ad acuendos juvenes*

De los 56 (o 53, según la fuente consultada) problemas que constituyen la obra de Alcuino, nos vamos a centrar en aquellos que podrían clasificarse como "de mezclas". En principio puede resultar chocante bautizar de este modo estos problemas; sobre todo después de leer los enunciados; sin embargo, veremos más adelante que este calificativo está plenamente justificado.

En concreto son ocho los problemas de este tipo que se encuentran en las *Propositiones*. Sus enunciados son los siguientes, se ha seguido la numeración de Hadley y Singmaster (1992):

- Problema 5 (*Propositio de emptore denariorum*):

  "Dijo un mercader: quiero comprar 100 cerdos por cien denarios; sin embargo pagaría 10 denarios por un macho, 5 por una hembra y uno por dos lechones. Diga, aquel que sepa, ¿cuántos machos, cuántas hembras y cuántos lechones debe haber de forma que no sobre ni falte ninguno?"

- Problema 32 (*Propositio de quodam patrefamilias*):

  "Cierto paterfamilias disponía de 20 sirvientes. Ordenó que les fueran repartidos 20 modios de maíz del siguiente modo: que los hombres recibieran tres modios, las mujeres dos y los niños medio modio. Diga, quién pueda, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños debe haber?"

- Problema 33 (*Propositio de alio patrefamilias erogante suae familiae annonam*):

  "Cierto paterfamilias disponía de 30 sirvientes entre los que ordenó repartir 30 modios de maíz. Ordenó que los hombres recibieran tres modios, las mujeres dos y los niños medio modio. Resuelva, quién pueda, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños había?"

- Problema 33a (*Alia*):

  "Cierto paterfamilias disponía de 90 sirvientes entre los que ordenó repartir 90 modios de maíz. Ordenó que los hombres recibieran tres modios, las mujeres dos y los niños medio modio. Diga, quien pueda, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños había?"

- Problema 34 (*Propositio altera de patrefamilias partiente familiae suae annonam*):

  "Cierto paterfamilias disponía de 100 sirvientes, entre los que pretendió repartir 100 modios de maíz, de manera que los hombres recibieran tres modios, dos las mujeres y los niños medio modio. Diga pues, aquél que vale, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños había?"

- Problema 38 (*Propositio de quodam emptore in animalibus centum*):

  "Quiso cierto hombre comprar 100 animales de distintas clases por 100 sueldos, de forma que los caballos se compran por tres sueldos, los bueyes por 1 y 24 ovejas por 1 sueldo. Diga, aquél que vale, ¿cuántos los caballos, cuántos los bueyes y cuántas fueron las ovejas?"

- Problema 39 (*Propositio de quodam emptore in oriente*):

"Cierto hombre quiso comprar en oriente 100 animales de diversas clases por 100 sueldos, para lo que ordenó a un sirviente que por un camello se recibieran 5 sueldos, 1 por un asno y 20 ovejas se compraran por 1 sueldo. Diga, quién quiera, ¿cuántos camellos, asnos y ovejas se obtuvieron a cambio de los 100 sueldos?"

- Problema 47 (*Propositio de episcopo qui jussit XII panes dividi*):

"Cierto obispo ordenó repartir 12 panes entre el clero. Previó así que cada sacerdote recibiera dos panes; un diácono medio y un lector la cuarta parte. Obrando así el número de clérigos y de panes resulta el mismo. Diga, quién quiera, ¿cuántos sacerdotes, diáconos y lectores debe haber?"

Si analizamos con detenimiento los enunciados podemos ver que en todo ellos hay algo a repartir (modios de maíz, panes o dinero) y sobre todo que, una vez hecho el reparto todos los receptores han recibido en promedio lo mismo: una unidad. Si compramos 100 animales por 100 denarios el precio medio es de un denario por animal, si repartimos 12 panes entre 12 personas cada persona recibe un pan por término medio y lo mismo si repartimos 20 modios de maíz entre 20 personas. Así pues, todos estos problemas se reducen a tener que calcular la cantidad correspondiente de cada componente de una mezcla conocidos los precios de cada componente y el precio medio final (que en este caso, para redondear las cosas, es 1).

Que, de hecho, estos problemas pueden atacarse empleando técnicas similares a las utilizadas en los problemas clásicos de mezclas es algo que ya observó Leonardo de Pisa (Fibonacci). En su importante obra *Liber Abaci* podemos encontrar, por ejemplo, el siguiente enunciado que es esencialmente idéntico a los que acabamos de presentar (Sigler, 2002, p. 249):

> "*Un hombre compra carne de cerdo a tres denarios la libra, de ternera a dos denarios la libra y de cabra a medio denario la libra. ¿Cómo ha de hacer para comprar siete libras de carne por siete denarios en total?*"

Lo interesante es que este enunciado se encuentra en la última parte del capítulo undécimo de la obra. Dicha última parte lleva el título de "Métodos para mezclar cosas análogas". La ubicación del problema bajo este epígrafe demuestra la fina observación de Fibonacci y justifica nuestra clasificación.

Observando detenidamente los enunciados anteriores se observa que algunos de ellos obedecen a una estructura idéntica. Salvo el problema 47, cuyo contexto poco tiene que ver con los demás, podemos formar dos grupos con el resto de problemas, afinando así nuestra clasificación:

1. Problemas de compra de animales:

Estos problemas no sólo comparten el contexto, sino que en todos ellos la cantidad de animales a comprar (y, por tanto, de dinero a gastar) es la misma (100 sueldos o 100 denarios) y se hace variar el precio de cada una de las tres clases de animales. En este grupo se incluyen los problemas 5, 38 y 39.

A partir de estos ejemplos podríamos definir una familia de problemas $C(a,b,c)$ cuyo enunciado sería el siguiente: "Se desean comprar 100 animales de tres clases a un precio total de 100 sueldos. Los animales del primer tipo cuestan a sueldos, los del segundo tipo cuestan b y, por último, c animales del tercer tipo cuestan 1 sueldo. ¿Cuántos animales de cada clase deben comprarse?"

Con esta notación el problema 5 sería $C(10,5,2)$; el problema 38 sería $C(3,1,24)$ y el problema 39 sería $C(5,1,20)$. Este problema y otros similares se conocen como "problema de los cien pájaros"

2. Problemas de reparto de maíz:

Nuevamente el contexto en estos problemas es el mismo pero, de forma simétrica al grupo anterior, en este caso se fija la cantidad de maíz que debe recibir cada tipo de sirviente y se hace variar la cantidad total de maíz a repartir (y, por tanto, el número de sirvientes). En este grupo se incluyen los problemas 32, 33, 33a y 34.

También en este caso vamos a definir una familia de problemas $R(n)$ cuyo enunciado sería: "Se han de repartir n modios de maíz entre n sirvientes de tal forma que los hombres reciben 3 modios, las mujeres 2 y los niños medio. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños ha de haber?"

Los problemas que aparecen en el texto serían, respectivamente, $R(20)$, $R(30)$, $R(90)$ y $R(100)$.

5. Las soluciones de Alcuino a sus problemas

En su obra Alcuino da soluciones a todos los problemas planteados. Sin embargo tan sólo se limita a indicar la solución numérica y a comprobar que, efectivamente, se trata de una solución. Muchos de los problemas planteados poseen varias soluciones aunque Alcuino sólo da una. En (Hadley y Singmaster, op. cit.) se presentan todas las soluciones admisibles de los problemas. A continuación presentamos las que da Alcuino:

- Problema 5: 1 macho, 9 hembras y 90 lechones.
- Problema 32: 1 hombre, 5 mujeres y 14 niños.
- Problema 33: 3 hombres, 5 mujeres y 22 niños.
- Problema 33a: 6 hombres, 20 mujeres y 64 niños.
- Problema 34: 11 hombres, 15 mujeres y 74 niños.
- Problema 38: 23 caballos, 29 bueyes y 48 ovejas.
- Problema 39: 19 camellos, 1 asno y 80 ovejas.
- Problema 47: 5 sacerdotes, 1 diacono y 6 lectores.

Además de dar estos valores, como ya hemos dicho, Alcuino efectúa los cálculos oportunos para comprobar que se trata efectivamente de soluciones del problema propuesto.

Sin embargo no hay ningún tipo de indicación o pista sobre cómo ha obtenido dicha solución. Puesto que, dada la época en la que fue escrita la obra, es poco probable que Alcuino estuviera familiarizado con técnicas algebraicas hemos de suponer que – de existir – el método utilizado hubo de ser puramente aritmético (cuando no de mero ensayo y error). En las secciones que siguen vamos a tratar de presentar, aunque sea de modo hipotético, algunas posibles formas de pensar que pudo haber seguido Alcuino a la hora de resolver los problemas y que justificarán por qué las respuestas dadas son las que son y no otras de entre las posibles. Los problemas se analizarán por bloques, teniendo en cuenta la clasificación anterior. Tan sólo el Problema 47 recibirá, dado su carácter único, un tratamiento individualizado.

6. El problema 47

Recordemos el enunciado del problema: "Cierto obispo ordenó repartir 12 panes entre el clero. Previó así que cada sacerdote recibiera dos panes; un diácono medio y un lector la cuarta parte. Obrando así el número de clérigos y de panes resulta el mismo. Diga, quién quiera, ¿cuántos sacerdotes, diáconos y lectores debe haber?". La solución de Alcuino: 5 sacerdotes, 1 diácono y 6 lectores.

6.1 Enfoque moderno

Actualmente resolveríamos este problema mediante el planteamiento del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=12 \end{cases}$$

Donde x sería el número de sacerdotes, y el de diáconos y z el de lectores. Manipulando adecuadamente las ecuaciones se reduce el sistema dado al siguiente:

$$\begin{cases} 7x+y=36 \\ x+y+z=12 \end{cases}$$

Evidentemente, este sistema tiene infinitas soluciones que vienen dadas por:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=36-7\lambda \\ z=-24+6\lambda \end{cases}$$

Ahora bien, no hay que olvidar que, por las condiciones del problema, x, y y z han de ser enteros no negativos por lo que λ ha de ser un entero no negativo que cumpla $4 \leq \lambda \leq {}^{36}/_{7}$. Es decir, $\lambda = 4$ *ó* 5. Así pues, las posibles soluciones son las ternas (4,8,0) y (5,1,6). La primera, fácil de encontrar por tanteo, posiblemente no fuera aceptable por parte del autor ya que implica que no hay lectores, lo que en cierto modo contraviene las condiciones del problema.

6.2 ¿Cómo pudo haberlo hecho Alcuino?

Observamos en primer lugar que lo que queremos hacer es repartir 12 panes entre 12 personas de tal forma que cada uno reciba en promedio un pan. Como cada sacerdote recibe 2 panes, cada vez que "cogemos" un sacerdote la media empeora en una unidad. Por su parte, cada diácono mejora la media en media unidad (pues recibe medio pan cada uno) y, por último, al recibir un cuarto de pan, cada lector mejora la media en tres cuartos.

Ahora, para que la media sea de un pan por persona, las desviaciones de la media que acabamos de señalar deben compensarse; es decir, el número de sacerdotes debe ser igual a la mitad de los diáconos más las tres cuartas partes de los lectores. Como el número de sacerdotes es entero positivo se sigue que la mitad de los diáconos más las tres cuartas partes de los lectores tiene que ser entero positivo. Esto último sólo puede pasar si el doble de los diáconos más el triple de los lectores es múltiplo de 4.

Además, el número de diáconos y el de lectores tienen que cumplir lo siguiente:

1. Cada uno de ellos es mayor o igual que 1 y menor o igual que 10.
2. La suma de ambos es menor o igual que 11.

De esto se deduce que el múltiplo de 4 buscado es mayor que 5 y menor o igual que 32; es decir, uno de entre la lista: 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32. Para cada uno de estos valores tenemos las siguientes posibilidades (teniendo en cuenta las dos indicaciones anteriores):

- Para el 8: 1 diácono y 2 lectores.
- Para el 12: 3 diáconos y 2 lectores.
- Para el 16: 2 diáconos y 4 lectores ó 5 diáconos y 2 lectores.
- Para el 20: 1 diácono y 6 lectores ó 4 diáconos y 4 lectores ó 7 diáconos y 2 lectores.
- Para el 24: 9 diáconos y 2 lectores ó 6 diáconos y 4 lectores ó 3 diáconos y 6 lectores.
- Para el 28: 5 diáconos y 6 lectores ó 2 diáconos y 8 lectores.
- Para el 32: 1 diácono y 10 lectores.

Para terminar, basta obtener el número de sacerdotes correspondiente a cada caso y comprobar si se cumplen las condiciones del problema. Razonando de este modo se comprueba que, de la lista obtenida, la única solución posible es 1 diácono, 6 lectores y 5 sacerdotes; que es precisamente la dada por Alcuino en su obra.

7. Los problemas de reparto de maíz $R(n)$

Recordemos el enunciado general de estos problemas: "Se han de repartir n modios de maíz entre n sirvientes de tal forma que los hombres reciben 3 modios, las mujeres 2 y los niños medio. ¿Cuántos hombres mujeres y niños ha de haber?" En el texto de Alcuino aparecen $R(20)$, $R(30)$, $R(90)$ y $R(100)$ y las soluciones dadas son, respectivamente: 1 hombre, 5 mujeres y 14 niños; 3 hombres, 5 mujeres y 22 niños; 6 hombres, 20 mujeres y 64 niños y 11 hombres, 15 mujeres y 74 niños.

7.1 Enfoque moderno

El problema $R(n)$ puede traducirse en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = n \\ 3x + 2y + \frac{z}{2} = n \end{cases}$$

Donde x representa el número de hombres, y el de mujeres y z el de niños. Manipulando el sistema dado se puede obtener el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z = n \\ 5x + 3y = n \end{cases}$$

Al igual que sucedía más arriba el sistema obtenido tiene infinitas soluciones que vienen dadas, por ejemplo, por:

$$\begin{cases} x = \frac{n}{5} - 3\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = \frac{4n}{5} - 2\lambda \end{cases}$$

La forma de presentar estas soluciones (hay arbitrariedad a la hora de elegir el parámetro) está motivada por el hecho de que, en los casos considerados por Alcuino, n es un múltiplo de 5 y así para que las soluciones dadas sean enteras es suficiente con que lo sea λ. Además, para que las soluciones sean no negativas habrá que exigir que $0 < \lambda \leq \frac{n}{15}$. Así, se tienen las siguientes soluciones para los casos estudiados por Alcuino:

- $R(20)$: Tiene que ser $\lambda = 1$ y la solución única es la dada en el texto original.
- $R(30)$: Tiene que ser $\lambda = 1$ *ó* 2, la solución dada es la correspondiente a $\lambda = 1$ puesto que en el otro caso se obtiene x=0 que posiblemente a ojos de Alcuino incumpliera las condiciones del problema.
- $R(90)$: En este caso $\lambda = 1, \dots, 6$. Si $\lambda = 6$ se obtiene x=0 que no es aceptable, pero en los otros casos las soluciones son totalmente admisibles. La presentada por Alcuino es la correspondiente a $\lambda = 4$.
- $R(100)$: En este caso de nuevo $\lambda = 1, \dots, 6$ y todas las posibilidades son admisibles. Sin embargo Alcuino solo presenta el caso $\lambda = 3$.

7.2 ¿Cómo pudo haberlo hecho Alcuino?

En primer lugar hay que observar que conocida una solución para un cierto problema $R(n)$ es fácil construir soluciones para otros $R(m)$. Por ejemplo es muy fácil observar que si (x,y,z) es una solución de $R(n)$, entonces (kx,ky,kz) es solución de $R(kn)$. Esta afirmación no requiere de demostración puesto que se sigue de forma casi directa de las condiciones del problema. Pese a todo, Alcuino no parece haber observado este hecho puesto que la solución que ofrece para $R(90)$ no es el triple de la que ofrece para $R(30)$ ni la de $R(100)$ es cinco veces la de $R(20)$.

Otra relación que salta a la vista entre los problemas que propone Alcuino es que hay dos parejas de problemas cuyo parámetro difiere en lo mismo: 10 unidades. En este sentido, si somos capaces de construir una solución de $R(n+k)$ a partir de una solución de $R(n)$ de un modo concreto podremos construir del mismo modo una solución de $R(m+k)$ a partir de una de R(m). La propiedad en cuestión es la siguiente: Si (x,y,z) es solución de $R(n)$ y $(x+a,y+b,z+c)$

es solución de $R(n+k)$, entonces conociendo una solución (x',y',z') de $R(m)$ se tiene que $(x'+a,y'+b,z'+c)$ será solución de $R(m+k)$. Además se debe cumplir que $a+b+c=k=3a+2b+\frac{c}{2}$.

Recapitulemos las soluciones dadas por Alcuino a los problemas de reparto de maíz que plantea en su obra (como antes x es el número de hombres, y el de mujeres y z el de niños):

Tabla 1. Soluciones de Alcuino a los problemas de reparto de maíz.

	$R(20)$	$R(30)$	$R(90)$	$R(100)$
x	1	3	6	11
y	5	5	20	15
z	14	22	64	74

Vamos a tratar de imaginar un hipotético itinerario de resolución de cada uno de los problemas por parte de Alcuino. Partimos de la hipótesis de que la idea de que se pueden fabricar unas soluciones a partir de otras no debía serle desconocida. Proponemos lo siguiente:

1. Resuelve $R(20)$ por un método similar al presentado más arriba para el Problema 47. Esto resulta razonable porque, además, la solución a este problema es única.

2. Se busca una solución de R(30) pero no rehaciendo el problema, sino buscando una solución a partir de la anterior de manera aditiva. Lo más fácil en este caso es no sumar nada a una de las cantidades (a la y, por ejemplo; es decir, b=0 con la notación anterior) y entonces las condiciones del problema dan una relación entre las otras cantidades. En nuestro caso se deduce que ha de ser $4a=c$ y por tanteo se puede llegar a que a=2 y c=8 (si damos valores sucesivos a a es el primer caso que sirve) y obtener la solución de Alcuino.

3. Se obtiene la solución de $R(90)$ triplicando la de $R(30)$, obteniendo (x,y,z)=(9,15,66). Esta solución no es la dada por Alcuino.

4. Se obtiene la solución de $R(100)$ aplicando a la solución de $R(90)$ la misma transformación que aplicamos a la solución de $R(20)$ para obtener la de $R(30)$; es decir, sumar 2 unidades a la x, nada a la y y 8 a la z. Se obtiene la solución dada por Alcuino.

En todo el relato anterior lo único que no encaja con las soluciones dadas por Alcuino es la de $R(90)$. Sin embargo estamos convencidos de que es poco probable que a la hora de resolver los problemas la idea de Alcuino fuera resolver uno tras otro repitiendo algún método similar al del Problema 47; sobre todo teniendo en cuenta que los cuatro problemas aparecen sucesivamente en el texto. Más aún, el Problema 33a, que es el que corresponde a $R(90)$ no aparece en algunas ediciones del texto por lo que no sería descabellado pensar que en un proceso de copia o trascripción se perdiera la solución o se sustituyera la original por otra. En cualquier caso, todo esto queda en el terreno de la especulación.

8. Los problemas de compra de animales (o de los cien pájaros) $C(a,b,c)$

El enunciado general de estos problemas es el siguiente: "Se desean comprar 100 animales de tres clases a un precio total de 100 sueldos. Los animales del primer tipo cuestan a sueldos, los del segundo tipo cuestan b y, por último, c animales del tercer tipo cuestan 1 sueldo. ¿Cuántos animales de cada clase deben comprarse?". En el texto de Alcuino se resuelven los problemas $C(10,5,2)$; $C(3,1,24)$ y $C(5,1,20)$ y las soluciones presentadas son, respectivamente: 1 macho, 9 hembras y 90 lechones; 23 caballos, 29 bueyes y 48 ovejas y 19 camellos, 1 asno y 80 ovejas.

8.1 Enfoque moderno

Como venimos haciendo hasta ahora, el problema puede traducirse en un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ ax+by+\dfrac{z}{c}=100 \end{cases}$$

Donde x es el número de animales del primer tipo (que cuestan a sueldos cada uno), y la cantidad de animales del segundo tipo (cuyo precio unitario es de b sueldos) y z es la cantidad de animales del tercer tipo (que cuesta 1 sueldo cada grupo de c de ellos). Podemos transformar el sistema en otro equivalente:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ c(a-1)x+c(b-1)y-(c-1)z=0 \end{cases}$$

Que, de nuevo, posee infinitas soluciones dadas por (si $ac \neq 1$):

$$\begin{cases} x=\dfrac{100(c-1)-(bc-1)\lambda}{ac-1} \\ y=\lambda \\ z=\dfrac{100c(a-1)+c(b-a)\lambda}{ac-1} \end{cases}$$

Discutir el carácter entero y no negativo de las soluciones es en este caso bastante más complicado que en los ejercicios anteriores – y lo omitiremos – debido al mayor número de parámetros. Sin embargo es interesante indicar que cuando b=1, como sucede en los Problemas 38 y 39 (que además son consecutivos en el texto), la discusión es algo más sencilla.

Las soluciones dadas por Alcuino se obtienen para $\lambda = 9, 48\, y\, 1$ respectivamente. La unicidad de las soluciones aparece discutida en (Hadley y Singmaster, 1992).

8.2 ¿Cómo pudo haberlo hecho Alcuino?

A la hora de intentar indagar el proceso que pudo haber seguido Alcuino para dar sus soluciones a estos problemas, hemos de tratar por separado el problema $C(10,5,2)$ de los otros. En los otros dos casos, $C(3,1,24)$ y $C(5,1,20)$ se tiene que el precio de los animales del segundo tipo coincide con el precio medio que se quiere pagar. Esto hace que el problema admita un análisis mucho más sencillo.

Para justificar la afirmación anterior vamos a analizar en detalle el problema $C(5,1,20)$. Como el precio medio que se quiere obtener es de 1 sueldo, cada vez que compramos un animal del primer tipo empeoramos ese precio en 4 sueldos y cada vez que compramos un animal del tercer tipo lo mejoramos en diecinueve veinteavos de sueldo. Como el precio de los animales del segundo tipo es justamente el precio medio que se busca, el número de animales de este tipo que compremos no influye en absoluto en el precio medio. Como en el Problema 47, la pérdida que se produce al comprar animales del primer tipo se debe compensar con la ganancia al comprar animales del tercero; es decir, cada animal del primer tipo debe compensarse con $\frac{80}{19}$ del tercer tipo. Para que los valores obtenidos sean enteros es obvio que habremos de tomar 19 animales del primer tipo (camellos en este caso) que se compensarán con 80 del tercero (ovejas en este caso). El resto de animales hasta llegar a 100 habrán de ser asnos.

El problema $C(3,1,24)$ admite un análisis similar, sólo que en este caso cada animal del primer tipo debe compensarse con $\frac{48}{23}$ del tercero y de ahí se sigue el resultado. De hecho, el problema $C(a,1,c)$ admite en general la solución $(x,y,z) = (c-1, 101-ac, c(a-1))$ que se obtiene razonando de forma idéntica a la anterior y que, en general, no será única.

En el caso del problema $C(10,5,2)$ el análisis en más complejo puesto que no podemos despreocuparnos de ninguno de los tipos de animales. Lo que podemos hacer es estudiar separadamente la relación entre cada uno de los dos primeros tipos de animales (los que tienen un precio superior a la media) y los animales del tercer tipo (que tienen un precio inferior a la media). Haciendo esto se obtiene que por cada macho debe haber 18 lechones y que por cada hembra ha de haber 8 lechones. Como en total ha de haber 100 animales se sigue que, a lo sumo, hay 9 hembras (si hubiera 10, habría 80 lechones y si hubiera al menos 1 macho con los 18 lechones que conlleva excederíamos los 100 animales). Así pues, procediendo por tanteo, la primera opción es comprar 9 hembras, que se han de compensar con 72 lechones; quedan por comprar 19 animales que, casualmente (si es que existen las casualidades), se pueden completar con 1 macho y los 18 lechones que conlleva. Así pues podemos afirmar que la solución dada por Alcuino es la primera que se obtiene por tanteo después de un sencillo análisis inicial.

9. Conclusiones

Hemos presentado un análisis pormenorizado de los problemas "de mezclas" que aparecen en las *Propositiones ad acuendos juvenes* de Alcuino de York. Además de resolverlos mediante técnicas algebraicas modernas, hemos llevado a cabo una discusión sobre los procedimientos que pudo haber seguido el autor a la hora de presentar sus soluciones, aunque se ha de tener en cuenta que las ideas presentadas no pueden ser más que meras hipótesis dado que Alcuino tan sólo indica las soluciones numéricas a sus problemas sin dar la más mínima pista sobre cómo llegó hasta ellas.

Pensamos que un análisis de estos hipotéticos procesos de resolución, además de por su interés puramente histórico, puede ser beneficioso, entre otras, por las siguientes razones:

1. Entender los procesos puramente aritméticos de resolución de estos problemas obliga a tener una mayor y más profunda comprensión de la situación problemática a la que se enfrenta. Por ejemplo:

- ¿Qué tipo de valor es admisible como solución?
- ¿Qué restricciones impone el enunciado del problema?
- ¿De qué forma están relacionadas las magnitudes involucradas?
- ¿Qué relación hay entre las soluciones de dos problemas de similar estructura?

2. Un análisis detenido de los pasos seguidos al resolver aritméticamente el problema puede ayudar a entender y justificar la modelización algebraica del problema así como las manipulaciones necesarias para resolverlo.

3. Los posibles errores o vacíos en los razonamientos aritméticos pueden ayudar a explicar el porqué de algunos de los errores que cometen los alumnos.

Referencias

[1] COOPERATORUM VERITATIS SOCIETAS. *Documenta Catholica Omnia*, http://www.documentacatholicaomnia.eu

[2] FERNÁNDEZ, F. (1997) *Aspectos históricos del paso de la aritmética al Álgebra*, Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, Nº 14, pp. 75-98.

[3] GAIRÍN, J.M. Y ESCOLANO, R. (2009). *Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional*. Revista SUMA, Nº 62, pp. 35-48.

[4] GÓMEZ, B. (1999). *Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de "compañías"*, RELIME, Nº 2(3), pp. 19-29.

[5] GÓMEZ, B. (2006). *Los ritos en la enseñanza de la regla de tres*. En *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática*, pp. 49-69. Publicaciones Universidad de Córdoba.

[6] HADLEY, J. Y SINGMASTER, D. (1992). *Problems to sharpen the young. An annotated translation of 'Propositiones ad acuendos juvenes' the oldest mathematical problem collection in Latin attributed to Alcuin of York*, Math. Gaz. Nº 76, pp. 102-126.

[7] LIVNEH, D. Y LINCHEVSKI, L. (2007). *Algebrification of Arithmetic: Developing algebraic structure sense in the context of Arithmetic*. En *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 217-224. Melbourne.

[8] MEAVILLA, V. (2004). *Resolución no algebraica de problemas de móviles: un enfoque histórico.* Sigma: revista de matemáticas, Nº 24, pp. 113-118.

[9] MEAVILLA, V. (2011). *El lobo, la cabra y la col: Antología de problemas matemáticos recreativos*. Editorial Almuzara, Córdoba.

[10] RICHARD, P.R; MEAVILLA, V. Y FORTUNY, J.M. (2010). *Textos clásicos y geometría dinámica: estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría.* Enseñanza de las Ciencias, Nº 28(1), pp. 95-112.

[11] SIGLER, L.E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Springer Verlag, New York.

Sobre el autor:
Nombre: Antonio M. Oller Marcén
Correo Electrónico: oller@unizar.es
Institución: Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, España.