# Críticas

# Informe sobre el libro: “El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática”, Albert Violant

# A report of the book: “El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática”, Albert Violant

Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación

Volumen IV, Número 1, pp. 149–156, ISSN 2174-0410
Recepción: 21 Jun’13; Aceptación: 20 Dic’13

1 de abril de 2014

**Resumen**

En este artículo se presenta un informe sobre el libro “El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática”, perteneciente a la colección “El mundo es matemático”, de la que ya se comentó otro libro en un artículo anterior del autor.

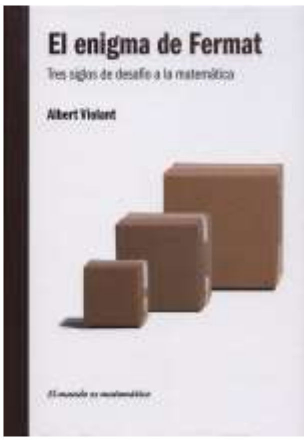
**Palabras Clave:** Divulgación matemática, teoría de números, teorema de Fermat

**Abstract**

This paper presents a report of the book “El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática”, that belongs to the collection “El mundo es matemático”. Another book from this collection was commented by the author in a previous paper.

**Keywords:** Mathematic divulgation, number theory, Fermat theorem

## 1. Ficha técnica




Título: El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática.

Autor: Albert Violant.

De la colección “El mundo es matemático”

Editado por: RBA

Ver [1] para una información más detallada sobre el libro.

## 2. Crítica

El libro del que se hace el informe pertenece a una colección de divulgación de las matemáticas de la que ya se comentó otro libro (Los números primos. Un largo camino al infinito. Ver [2]). Destaca principalmente por su esfuerzo para hacer asequibles para el público general temas de mucha dificultad matemática, sin perder el rigor necesario en un texto científico.

Es especialmente notable en el texto que nos ocupa el tratamiento que se hace de las teorías de Kummer, explicando de forma amena y brillante conceptos revolucionarios en su día como el de los números ideales ó el de los primos regulares, nada elementales y difíciles de asimilar. Se pone muy bien de manifiesto la importancia de estas teorías como avances en el intento de demostrar el teorema de Fermat.

Como aspectos mejorables, destacar el desarrollo desigual de los diferentes capítulos del libro: la introducción "prehistórica" al teorema de Fermat desarrollada en los primeros capítulos, en la que se trata el teorema de Pitágoras, es quizás algo larga, remontándose a tiempos demasiado antiguos y, aunque es de gran interés cultural, desvía la atención del tema principal del libro.

A este respecto, se puede decir que se dedican unas 128 páginas a los preliminares y sólo 15 páginas a la prueba del teorema. Por la gran dificultad de la misma, quizás el capítulo que la trata es uno de los más débiles del libro, deslizándose algún error que se comenta posteriormente en este informe.

A pesar de esto, se puede decir que es un libro altamente recomendable incluso para aquellos que no tengan noticias previas del teorema de Fermat, ni una formación matemática elevada (ver [3] y [4] como referencias de libros sobre el teorema de Fermat más avanzados).

## 3. Conceptos matemáticos que se definen ó a los que se alude

A lo largo del libro surgen los conceptos matemáticos que se exponen a continuación.

- Números altamente compuestos: números que tienen más divisores que cualquiera más pequeño que él.

- Sistema de numeración aditivo: forma de expresar los números en la que la posición de las cifras no influye en su valor

- Sistema de numeración posicional: forma de expresar los números en la que la posición de las cifras influye en su valor

- Ternas pitagóricas: soluciones a la ecuación diofántica $x^2 + y^2 = z^2$

- Cicloide: lugar geométrico que describe un punto de la circunferencia al girar sobre una recta

- Braquistócrona: curva que da la forma más rápida posible de ir de un punto "A" a otro "B" sometidos únicamente a la acción de la gravedad

- Números perfectos: números que son suma de sus divisores propios

- Números abundantes: la suma de sus divisores propios es mayor que el número

- Números deficientes: la suma de sus divisores propios es menor que el número

- Números de Fermat: números de la forma $2^{2^n}+1$, con $n$ natural

- Primos de Mersenne: primos de la forma $2^n-1$

- Enteros gaussianos: números de la forma $x+y\,i$, con $x, y$ enteros, $i$ la unidad imaginaria

- Números ciclotómicos: combinaciones enteras de las raíces $p$-ésimas de la unidad

- Curvas elípticas: curvas de la forma $y^2=x^3+a\,x^2+b\,x+c$, con $a, b, c \in \Re$

- Aritmética modular: aritmética basada en congruencias dado un determinado módulo

- Formas modulares (intuidas)

- Curva de Frey: curva elíptica de la forma $y^2=x\left(x-a^p\right)\left(x-b^p\right)$, donde $a, b$ son enteros positivos primos relativos tales que $a^p+b^p=c^p$ para un natural $c$ y un primo $p$ mayor que 2

- Números poligonales: aquellos que pueden ser representados con puntos dispuestos en forma de polígono regular, empezando por el 1

## 4. Conjeturas de las que se habla

En el libro se alude a los siguientes problemas abiertos en el momento de su publicación.

- Existen infinitos números perfectos

- Todos los números perfectos son pares

- No hay primos de Fermat mayores que 65537.

- Hay infinitos primos de Mersenne

- Conjetura ABC. Intuitivamente: dados enteros primos entre sí $a$, $b$, $c$ tales que $a+b=c$, el producto de los factores primos distintos de $a$, $b$, $c$ raramente será menor que $c$

- Conjetura de Taniyama-Shimura: toda curva elíptica es modular (bosquejada)

## 5. Resultados que se exponen

En el libro se detallan los siguientes resultados matemáticos, casi todos relacionados con la Teoría de Números (en rojo, los resultados también contenidos en el libro Los números primos)

- Último teorema de Fermat: si $n$ es un entero mayor que 2, no existen enteros no nulos $x, y, z$ tales que $x^n+y^n=z^n$

- Teorema de Pitágoras: el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

- 60 es el número más pequeño que se puede expresar de 6 formas distintas como suma de 2 primos

- Si $n$ es un entero positivo tal que sus divisores menores que $\sqrt{n}$ son consecutivos, entonces $n$ es primo ó el doble de un primo ó uno de los números 1, 8, 12, 24, 60.

- Los números con sólo factores primos 2, 3 ó 5 cumplen que sus inversos siempre tienen un número finito de cifras decimales en el sistema sexagesimal

- La longitud de un arco de cicloide es 8 veces el radio de la circunferencia que gira.

- Si se deja caer un objeto sobre un arco de cicloide invertida, no importa desde qué altura, siempre tarda lo mismo en llegar a la base

- Principio de Fermat: la luz sigue trayectorias de tiempo mínimo (relacionado con la ley de refracción de Snell)

- El área de un triángulo rectángulo de lados enteros no puede ser nunca un número cuadrado

- Un número par es perfecto si y sólo si es de la forma $2^{n-1}\left(2^n-1\right)$, con $2^n-1$ primo (primo de Mersenne, por tanto. Demostrado por Euler)

- No hay números perfectos impares menores que $10^{300}$

- Un polígono regular es construible con regla y compás si la factorización en primos de su número de lados contiene doses ó números de Fermat distintos.

- $2^{43112609}-1$ es el mayor primo de Mersenne que se conoce (hasta el 12 de Junio de 2009)[1]

- Una ecuación de primer grado con coeficientes enteros tiene soluciones enteras si y sólo si el máximo común divisor de los coeficientes divide al término independiente.

- Todo número natural se puede expresar como suma de cuatro cuadrados (demostrado por Lagrange)

- Todo número natural se puede expresar como suma de como mucho tres números triangulares (demostrado por Gauss)

- Todo número natural se puede expresar como suma de como mucho $n$ números $n$-gonales (generalización de las anteriores. Demostrado por Cauchy)

- Todo número primo de la forma $4k+1$ puede expresarse como suma de dos cuadrados (demostrado por Euler)

- Teorema fundamental de la aritmética: Todo número se descompone de manera única como producto de factores primos

- Si el producto de dos números primos entre sí es un cuadrado, cada uno de ellos es un cuadrado

[1] Actualmente el mayor número primo de Mersenne es el $2^{57885161}-1$, descubierto el 25 de enero de 2013 por Curtis Cooper con el proyecto GIMPS -Great Internet Mersenne Prime Search - ("Gran búsqueda de números primos de Mersenne por Internet") un proyecto colaborativo de voluntarios que utilizan los programas gratuitos Prime95 y MPrime con el fin de buscar números primos de Mersenne.

- En los números ciclotómicos (combinaciones enteras de las raíces $p$-ésimas de la unidad) con $p = 23$ no hay factorización única

- Existen tres primos regulares menores que 100: 37, 59 y 67

- Toda curva algebraica de género mayor que 1 tiene un número finito de puntos racionales (conjeturado por Mordell, demostrado por Hastings)

- Las curvas de Frey no son modulares (conjeturado por Frey-Serre, demostrado por Ribet).

- La ecuación $x^4 + y^4 + z^4 = u^4$ tiene soluciones enteras no triviales (demostrado por Elkies, refutando una conjetura de Euler)

## 6. Problemas del libro la aritmética de Diofanto que se tratan

El origen del teorema de Fermat está ligado a la obra aritmética de Diofanto de Alejandría, por lo que esta obra es ampliamente citada en el libro que nos ocupa. En concreto se comentan los siguientes problemas de la aritmética de Diofanto:

- Encontrar tres números de manera que el cuadrado de cualquiera de ellos añadido al siguiente nos da un cuadrado (problema 32 del libro II)

- Encontrar cuatro cuadrados cuya suma, aumentada en la suma de sus lados, sea un número dado. Dicho de otra forma, resolver en los racionales la ecuación:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$, para un $n$ dado (problema 29 del libro IV)

- Dividir un número cuadrado en suma de dos cuadrados (problema 8 del libro II. Inspiró el teorema de Fermat)

## 7. Erratas, errores, aspectos mejorables

En esta sección se comentan algunas erratas, principalmente de redacción, que se observan en el libro y que se podrían quitar en próximas ediciones para mejorar en el aspecto formal este interesante libro.

- En la página 10, pone todos ellos se ha escrito por todos ellos se han escrito

- En la página 14, pone permanecía un secreto por permanecía en secreto

- En la página 14, pone resultado de los años 50 por conjetura de los años 50

- En la página 16 pone comtemplaba por contemplaba

- En la página 22 se dice que 60 es el compuesto mayor tal que sus divisores menores que $\sqrt{n}$ son consecutivos. Esto lo cumplen también los números de la forma $2p$, con $p$ primo

- La definición que se da de terna pitagórica en la página 32 (números enteros que verifican el teorema de Pitágoras) no es del todo correcta, ya que el teorema habla de medidas de lados, no de números. Quizás sea más precisa la definición: números enteros que pueden ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo

- En los ejemplos de ternas pitagóricas que se dan en la página 32: $(3,4,5)$, $(6,8,10)$, $(5,12,13)$, la segunda se deduce de la primera (es su doble). Sería mejor que los tres ejemplos fueran de ternas pitagóricas primitivas.

- En la fórmula de la página 34 falta un cuadrado en $tga$

- En la página 39 pone un proporción por una proporción

- En la página 78, en la definición de número de Fermat, pone $2^{2n}+1$ por $2^{2^n}+1$

- En la página 93, pone $x_3++x_4$ por $x_3+x_4$

- En la página 94, pone $\left.\begin{array}{l} x_2+\frac{1}{2}=\frac{8}{5} \\ x_3+\frac{1}{2}=\frac{8}{5} \\ x_4+\frac{1}{2}=\frac{8}{5} \end{array}\right\}$ por $\left.\begin{array}{l} x_2+\frac{1}{2}=\frac{6}{5} \\ x_3+\frac{1}{2}=\frac{12}{5} \\ x_4+\frac{1}{2}=\frac{9}{5} \end{array}\right\}$

- En la página 99 se dice que Fermat demostró su teorema para la mitad de los exponentes, cuando en realidad lo demostró para la cuarta parte: los múltiplos de 4

- En la página 102, pone haber encontrar la solución por haber encontrado la solución

- En la página 105, pone diciéndo por diciendo

- En la página 116, pone desarolladas por desarrolladas

- En el dibujo de la página 118, en la primera columna, pone $b=1$ por $b=-1$

- En la misma página pone $x^3=25$, $y^2=27$ por $x^3=27$, $y^2=25$

- En la página 119, pone las las curvas elípticas por las curvas elípticas

- En la página 123, pone desanimar hasta el más por desanimar hasta al más

- En la página 125, pone dada una una solución por dada una solución

- En el final de la misma página, pone el último teorema no tiene soluciones. Sería más correcto decir: la ecuación de Fermat no tiene soluciones no triviales

- En la página 126, pone estadounindense por estadounidense y asisistido por asistido

- En la página 127, se dice que la conjetura $\varepsilon$ conlleva una relación necesaria entre la conjetura de Taniyama-Shimura y el último teorema: si la primera era cierta, la otra no podía serlo. En realidad es: si la primera era cierta, el otro lo sería

- En la página 137, pie de foto: y el interviene por y en él interviene

- En la página 138, un documento de complejidad por un documento de la complejidad

- En la página 143, falta la interrogación en ¿quién de nosotros…?

## Referencias

[1] VIOLANT, Albert. *El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática*, RBA. Colección El mundo es matemático, Madrid, 2010.

[2] GRACIÁN, Enrique. *Los números primos. Un largo camino al infinito*, RBA. Colección El mundo es matemático, Madrid, 2010.

[3] EDWARDS, Harold M. *Fermat's last theorem*, Springer Verlag, New York, 1977.

[4] RIBENBOIM, Paulo. *13 lectures on Fermat's last theorem*, Springer Verlag, New York, 1979.

**Sobre el autor:**
*Nombre:* Javier Rodrigo Hitos
*Correo Electrónico:* jrodrigo@upcomillas.es
*Institución:* Universidad Pontificia Comillas, Madrid, España.