

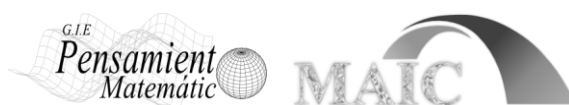
Historias de Matemáticas

Curvatura media y Relatividad General

Mean curvature and General Relativity

José Rojo Montijano, M^a Carmen Escribano y Juan Tarrés Freixenet

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 047–056, ISSN 2174-0410

Recepción: 15 Ago'14; Aceptación: 11 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

Desde que se definió por primera vez la noción de curvatura media en el siglo XIX, este concepto ha impactado de forma fundamental tanto en la geometría como en la física y en la cosmología matemática.

En este trabajo estudiamos la formación de singularidades en el proceso en el que una superficie del espacio se mueve, tomando como velocidad su propio vector de curvatura media. Este flujo nos sirve para ilustrar la emergencia en cosmología matemática de singularidades como el big-bang y los agujeros negros.

Resaltamos, además, el papel que juega la curvatura media en algunas desigualdades habituales de la Relatividad General y su relación con el problema abierto de lograr una descripción cuasi-local del concepto de masa.

Palabras Clave: Curvatura media, flujos geométricos, Relatividad General, singularidades, superficies atrapadas.

Abstract

Since the notion of mean curvature was first defined in the 19thC, this concept has impacted geometry, physics and mathematical cosmology in a fundamental way.

In this paper we study the formation of singularities in the process of a surface moving in space, taking the vector of its mean curvature as its velocity. This flow is useful to illustrate the emergence of singularities such as the big-bang and the black holes in mathematical cosmology.

We highlight, moreover, the role that mean curvature plays in some usual inequalities in General Relativity and its relation with the open problem of achieving a quasi-local description of the concept of mass.

Keywords: Mean curvature, geometric flows, General Relativity, singularities, trapped surfaces.

1. Introducción.

Sophie Germain (1776-1831) es quien introduce el término de curvatura media en la segunda década del siglo XIX en sus estudios sobre superficies elásticas¹ [12].

La curvatura media desempeñó en el siglo XIX un papel importante dentro de las matemáticas (recuérdese la descripción de la geometría extrínseca de una superficie en el espacio euclídeo tridimensional, el estudio de superficies minimales y de superficies de curvatura media constante, el análisis de las fórmulas de variación del área, ...). Pero no hay que olvidar que a la vez tiene una presencia pujante en el mundo de las aplicaciones a la física clásica (elasticidad, ciencia de los materiales, superficie de equilibrio entre dos medios, ...).

Desde finales del siglo XX y en esta segunda década del nuevo siglo XXI estamos comprobando cómo la relación de este concepto tanto con problemas geométricos básicos como con aplicaciones a la Física fundamental se ha vuelto todavía más intensa y fructífera.

Siendo la Relatividad General una teoría geométrica de la gravitación, resulta natural encontrar en ella desigualdades geométricas con un claro significado físico; a menudo son resultados matemáticos que sin esa interpretación física difícilmente hubieran llegado a ser siquiera imaginados. Entre los objetos de la Naturaleza, los agujeros negros son, a la vez, objetos macroscópicos predichos por la Relatividad General y matemáticamente simples. En su estudio se refleja con especial claridad esta relación entre Física y Geometría. La métrica de Kerr [11], por ejemplo, depende de dos parámetros: la masa (m) y el momento angular (J). Como es sabido, esta métrica representa el espaciotiempo de un agujero negro si y sólo si

$$\sqrt{|J|} \leq m$$

Si no es así, el espaciotiempo correspondiente contiene una singularidad desnuda. El área correspondiente resulta ser:

$$A = 8\pi \left(m^2 + \sqrt{m^4 - J^2} \right)$$

de donde se sigue que, en la conocida desigualdad

$$\sqrt{\frac{A}{16\pi}} \leq m$$

conjeturada por Penrose, la igualdad caracteriza precisamente a la métrica de Schwarzschild (es decir, al caso en el que no hay rotación y por lo tanto su momento angular es nulo: $J = 0$).

¹ Tras dos intentos fallidos, la Academia de Ciencias de Paris le concede el Premio Extraordinario por su trabajo sobre estas superficies elásticas, presentado en 1815, y que se publicará en 1821 con el título *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques* (Veuve Courcier. Paris. 1821)

A continuación se van a resaltar algunos ejemplos en los que un mejor entendimiento de la noción de curvatura media juega un papel protagonista en el desarrollo de nuevas investigaciones.

2. La curvatura media de una superficie tridimensional en el espacio euclídeo y la desigualdad de Heinz.

Para visualizar mejor este tipo de curvatura vamos a ambientarnos dentro del espacio euclídeo tridimensional \mathbb{R}^3 . En cada punto de una superficie del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 existen direcciones especiales en las que la superficie se curva más o menos que en las demás direcciones ("las direcciones principales"). La media aritmética de las curvaturas en dichas direcciones ("las curvaturas principales" K_1, K_2) es denominada la curvatura media de la superficie en ese punto, H . Resulta frecuente en la literatura tomar simplemente a H como la suma $K_1 + K_2$.

La curvatura media es una cantidad extrínseca, ya que refleja cómo se ve la superficie desde fuera.

En el caso sencillo de que la superficie sea una esfera de radio r , la curvatura media es el inverso del radio:

$$H = \frac{1}{r} ;$$

Y así se puede observar que si el valor de la curvatura media es grande, entonces la esfera es pequeña (y viceversa).

Para una superficie general también se debe dar esta propiedad: cuando la curvatura media se acrecienta, la superficie mengua, como indica la siguiente "desigualdad de Heinz"².

Si $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ donde D es un disco abierto de centro O y de radio r en el plano y S es la gráfica de f , siendo H su curvatura media.

$$|H| \geq \alpha > 0 \text{ para algún número real } \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow r \leq \frac{1}{\alpha} .$$

3. La formación de singularidades: la curvatura media y los flujos geométricos.

En cada punto de una hipersuperficie S de \mathbb{R}^{n+1} elegida una normal unitaria continua N , se consideran las n curvaturas principales K_1, K_2, \dots, K_n . Al número que resulta de su suma se le llama curvatura media (escalar) H y al vector producto de esa curvatura media por la normal unitaria, $\vec{H} = HN$, se le denomina vector de curvatura media (que no depende de la

² Para funciones reales de clase dos definidas en un disco abierto en \mathbb{R}^3 .

elección de N , ya que si se reemplaza N por $-N$, también cambia el signo de la curvatura media escalar).

En el “flujo por la curvatura media”, la hipersuperficie S evoluciona de manera que su velocidad en cada instante coincide con el vector de curvatura media. ¿Qué sucede a largo plazo?

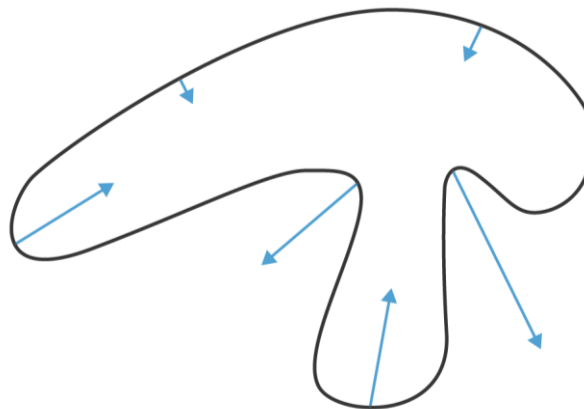
Estas son sus propiedades básicas cuando $n = 2$:

1. Las superficies se van suavizando.
2. Su área va decreciendo: el flujo se puede caracterizar como el opuesto del gradiente del funcional de área.
3. Superficies inicialmente disjuntas permanecen disjuntas y superficies embebidas permanecen embebidas.
4. Superficies compactas tienen su tiempo de vida limitado.
5. Superficies compactas convexas se redondean y se contraen a un punto.

La demostración de este último punto puede realizarse probando que la forma asintótica es totalmente umbilical: en cada punto las curvaturas principales son iguales todas (aunque a priori pudieran variar de punto a punto). Las únicas superficies compactas totalmente umbilicales son las esferas.

Obsérvese que la explicación anterior está vacía de contenido si $n = 1$, es decir, cuando consideramos el flujo por la curvatura de curvas cerradas en el plano. Recordemos a grandes rasgos las características del proceso por el que una curva cerrada plana se mueve, en el instante t , en la dirección del vector normal principal en cada punto, tomando como velocidad al vector de curvatura de la curva en ese punto.

Los tramos fuertemente curvados de la curva se mueven rápidamente; los tramos casi rectilíneos, poco curvados, avanzan lentamente. En los puntos con curvatura positiva, la curva se mueve hacia el interior; en los puntos con curvatura negativa, hacia fuera.



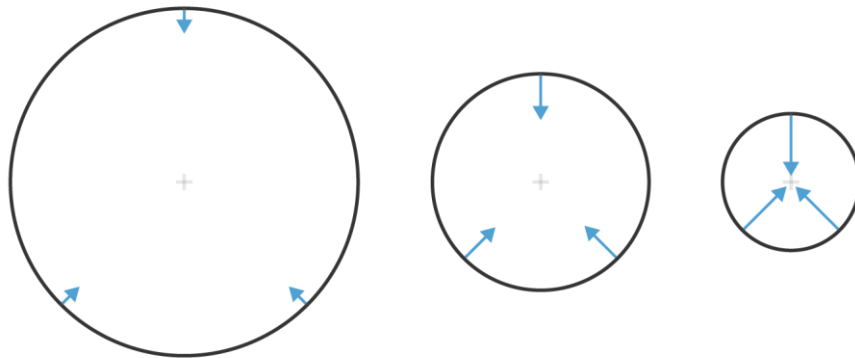
¿Y qué sucede “al final”?

En el caso particular de que la curva sea una circunferencia, entonces sólo cambia su radio, $r(t)$, de acuerdo con la siguiente ley:

$$r'(t) = -\frac{1}{r(t)}.$$

Así, si comenzamos con un radio inicial R , en el instante t , el radio de la circunferencia es

$$r(t) = \sqrt{R^2 - 2t}$$



y este proceso deja de tener sentido en el instante

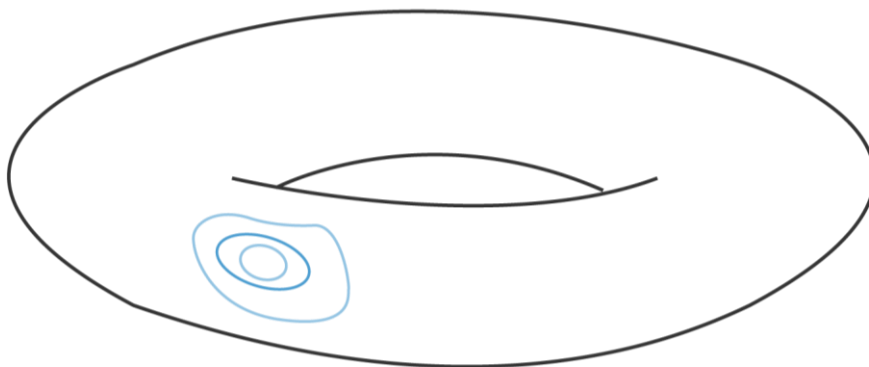
$$T = \frac{R^2}{2}$$

Al número T se le llama “tiempo de vida” de la circunferencia inicial. En ese instante hemos llegado a “tocar una singularidad”, que en este caso sería el centro de la circunferencia.

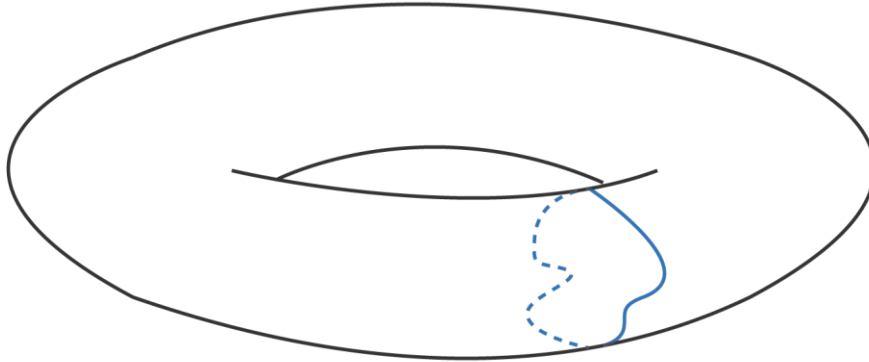
El “principio de comparación” es una de las propiedades más importantes de esta evolución, ya que establece que dos curvas disjuntas (donde una encierra a la otra) no pueden dejar de ser disjuntas en el futuro. De ahí que cada curva cerrada tenga sólo un tiempo finito de vida, pues está encerrada por una circunferencia.

Grayson probó en 1987 que en un tiempo finito la curva inicial evoluciona hacia una curva convexa y Gage y Hamilton probaron un año antes que la curva inicial progresivamente se redondea, hasta que desaparece.

Cuando se considera este flujo entre curvas cerradas sobre una superficie, que avanzan tomando como velocidad su curvatura geodésica, hay curvas que (como en el plano) se contraen en tiempo finito, redondeándose.



Pero a veces el comportamiento es más sutil: si se elige una curva no contraíble, ésta se deformará hasta que su curvatura dentro de la superficie (la “curvatura geodésica”) se anule y surja una geodésica cerrada.



Este proceso es “infinitamente largo” y demuestra el potencial del recurso de los flujos geométricos para obtener automáticamente objetos geométricos óptimos.

Así pues se comprueba que las singularidades pueden no ser puntuales y que el tiempo de vida puede ser “eterno”.

Volviendo al caso de las superficies en \mathbb{R}^3 moviéndose bajo el flujo de la curvatura media, el análogo del teorema de Grayson es falso en este contexto, ya que es fácil encontrar un contraejemplo. Se puede considerar, por ejemplo, dos esferas con radio muy grande, unidas por un tubo largo y delgado. Tanto las esferas como el tubo se contraen. Pero como la curvatura media a lo largo del tubo es mucho mayor que sobre las esferas, la zona central del tubo colapsa pronto a un punto, formando una singularidad; la superficie se separa entonces en dos componentes, que eventualmente se harán convexas y colapsarán, redondeándose a un par de puntos.

A diferencia del proceso que seguían las curvas, resulta que en la evolución de una superficie pueden formarse singularidades antes de contraerse y desaparecer.

En cosmología matemática estas propiedades ayudan a entender la evolución de un espaciotiempo con singularidades, que puedan desarrollarse no sólo “al final” (o “al principio”), sino incluso en cualquier instante. El estudio de las singularidades geométricas anteriores (¿cómo es una superficie cerca de un punto singular?, ¿cómo afecta la formación de una singularidad a la evolución subsiguiente de la superficie?, ...) es una herramienta para considerar los problemas análogos (considérese el big-bang o la formación de agujeros negros) en el Universo.

4. Caracterización cuasi-local del concepto matemático de agujero negro.

Un agujero negro se suele definir por su horizonte de sucesos: una frontera en el espaciotiempo tal que ningún suceso de un interior pueda “nunca” ser observado desde su exterior. Este concepto es global y “teleológico”: usa expresamente el futuro infinito.

En los últimos años se ha buscado una caracterización que carezca de esta referencia. Una idea es usar superficies atrapadas, como en el siguiente resultado:

“la existencia de una superficie atrapada implica la formación de una singularidad espaciotemporal en el futuro”.

Este teorema de singularidad fue probado por Penrose en dimensión cuatro y hoy en día ya se ha demostrado en dimensión arbitraria.

Para explicar a grosso modo qué es una “superficie atrapada” e intentar entender el enunciado de este teorema se proponen los siguientes asertos.

1. El vector de curvatura media, H , se puede definir sobre superficies (de cualquier codimensión) en cualquier espaciotiempo. H está íntimamente ligado con la energía gravitacional.
2. Cuando emanan rayos de luz de una superficie cerrada S en $\mathbb{R}^{3,1}$, podrían hacerlo hacia el exterior (“divergen”), o hacia el interior (“convergen”). Una superficie atrapada es una superficie cerrada, espacial, tal que las familias de rayos luminosos que le son ortogonales convergen. “Nada” puede escapar de su interior, por tanto: ésta es una indicación de la presencia de un campo gravitacional tan intenso que consigue que todos los rayos de luz converjan.
3. Respecto al contenido matemático de estas ideas se pueden considerar las siguientes ideas. En el espacio euclídeo, la curvatura media de una superficie S está relacionada con la variación del área: si deformamos S en la dirección normal N con rapidez s , se tiene

$$\partial(|S|) = -\int_S sH = -\int_S \langle \bar{H}, \bar{N} \rangle$$

Si deformamos S en la dirección \bar{v} ,

$$\partial_{\bar{v}}(|S|) = -\int_S \langle \bar{H}, \bar{v} \rangle,$$

donde $|S|$ indica el área de la superficie S .

En $\mathbb{R}^{3,1}$, el espacio de Minkowski, si S es una superficie espacial y g su primera forma fundamental (que es definida positiva), existe también un campo de vectores normal, el campo vectorial de curvatura media \bar{H} , que mide cómo cambia el área cuando se deforma la superficie, pues también está caracterizado por :

$$\partial_{\bar{v}}(|S|) = -\int_S g(\bar{H}, \bar{v})$$

Para medir la divergencia de los rayos de luz que emanan de S , podemos tomar dos campos vectoriales normales a S , L y L^- , luminosos ($\langle L, L \rangle = 0 = \langle L^-, L^- \rangle$), normalizados (es frecuente tomar $\langle L, L^- \rangle = -2$). Lo habitual es elegir $L^- = \frac{\partial}{\partial t}(-N)$, $L = \frac{\partial}{\partial t}(+N)$.

Con estas notaciones, que una superficie sea atrapada se distingue por que las dos cantidades

$$-\int_S \langle \bar{H}, L \rangle, \quad -\int_S \langle \bar{H}, L^- \rangle$$

son negativas.

Obérvese que este concepto de superficie atrapada no es global: sólo concierne a la propia superficie y sus alrededores. Es “cuasilocal”.

5. Comentarios finales

A pesar de haber transcurrido ya prácticamente dos siglos³ desde la definición de curvatura media de Sophie Germain, este concepto sigue dando pie a nuevas ideas en física matemática.

Roger Penrose propuso en 1982 una lista de los principales problemas no resueltos en Relatividad General. El primero de ellos era buscar una definición cuasi-local de masa para una superficie cerrada S en un espaciotiempo general. Aun cuando todavía hoy en el siglo XXI no se ha encontrado una solución completamente satisfactoria, parece claro que la solución considerará una vez más al vector de curvatura media de la superficie S , \bar{H} . La propuesta de S. Hawking es, por ejemplo:

$$M_H(S) = \sqrt{\frac{|S|}{16\pi}} \left[1 - \frac{1}{16\pi} \int_S \langle \bar{H}, \bar{H} \rangle \right]$$

En la actualidad la curvatura media sigue sugiriendo nuevos caminos en las investigaciones de la geometría, la física y la cosmología matemática. Un bello ejemplo aparece en el reciente trabajo de Brendle y Wang [3] en el que, además, se motiva la anterior fórmula de la masa de Hawking.

Referencias

- [1] BRAY, H.; JAUREGUI, J.; MARS, M. *Time flat surfaces and the monotonicity of the spacetime Hawkings mass II*, ArXiv 1402.3287, 13 de febrero de 2014.
- [2] BRAY, H. *Black holes and the Penrose inequality in General Relativity, International Congress of Mathematicians, vol.II*, pp. 257-371, Beijing, 2002.
- [3] BRENDLE, S.; WANG, M.T. *A Gibbons-Penrose inequality for surfaces in Schwarzschild spacetime*, pp. 33-44, Comm. Math. Phy. 330, 2014.

³ La última memoria por la que le concedieron el premio extraordinario de la Academia de Ciencias de París se presentó en 1815.

- [4] CHRUSCIEL, P.; GALLOWAY, G.; POLLACK, D., *Mathematical General Relativity: a Sampler*, pp. 567-638, Bulletin of American Soc. 47, 2010.
- [5] DAIN, S., *Proof of the angular momentum-mass inequality for axisymmetric black holes*. *J. Differential Geometry*, 79(1): 33-67, 2008.
- [6] GAGE, M.; HAMILTON, R., *The heat equation shrinking convex plane curves*, pp. 417-491, *Journal of Diff. Geo.* 23, 1986.
- [7] GRAYSON, M. *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, pp. 285-314, *Journal of Diff. Geo.* 31, 1987.
- [8] PENROSE, R. *Gravitational collapse and spacetime singularities*, pp. 57-59, *Physical Review Letters* 14, 1965.
- [9] ROJO, J. *De Dido a Penrose, pasando por Minkowski*, pp. 109-118, *Un paseo por la geometría*, 2009.
- [10] ROJO, J. *Dinámica de curvas cerradas en agujeros negros esféricos*, pp. 327-324, *Contribuciones matemáticas en homenaje a Juan Tarrés*, UCM, 2012.
- [11] SCHOEN, R., *Mean curvature in Riemannian Geometry and General Relativity*, MSRI, 2002.
- [12] TARRÉS, J.; ESCRIBANO, M.C.; ROJO, J. *La curvatura media y Sophie Germain*. *Historias de Matemáticas*, Revista Pensamiento Matemático, Universidad Politécnica de Madrid, Vol.IV, núm. 2, octubre, 2014.
- [13] WHITE, B. *Lectures on minimal surface theory*, ArXiv 1308.3325, 15 de agosto de 2013.
- [14] WONG, W. *A spacetime characterization of the Kerr-Newman metric*, ArXiv 0807.1904, 30 de enero de 2009.

Sobre los autores:

Nombre: José Rojo Montijano

Correo Electrónico: jrojo.eps@ceu.es

Institución: Universidad CEU- San Pablo, Madrid, España.

Nombre: M.Carmen Escribano Ródenas

Correo Electrónico: escrodenas@ceu.es

Institución: Universidad CEU- San Pablo, Madrid, España.

Nombre: Juan Tarrés Freixenet

Correo Electrónico: tarres@mat.ucm.es

Institución: Universidad Complutense de Madrid, España.

