MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

ALGUNAS HISTORIAS SOBRE ÁLGEBRAS NO ASOCIATIVAS Y SUPERÁLGEBRAS

PETRA M. ARNAL, JESÚS LALIENA Y SARA SACRISTÁN

En memoria de José Javier Guadalupe, Chicho

Abstract. Jordan and Lie algebras and superalgebras are introduced, and the big relationship with associative algebras and superalgebras is shown. This relationship has been classically used to study several questions, as for example simplicity, semisimplicity, ideals or maximal subalgebras of Lie and Jordan algebras obtained from a simple associative algebra. The same problems are again interesting in superalgebras.

1. Álgebras no asociativas

Como es bien sabido un álgebra es un conjunto con tres operaciones binarias $(A, +, \cdot_\phi, \cdot)$ de modo que $+$ y $\cdot$ son internas y $\cdot_\phi$ es externa, siendo ϕ un anillo conmutativo, asociativo y unitario (o un cuerpo). Además se pide que $(A, +, \cdot_\phi)$ sea un ϕ-módulo o un ϕ-espacio vectorial, si ϕ es un cuerpo, y también que la tercera operación «$\cdot$» sea bilineal respecto de las dos anteriores, es decir, distributiva respecto de $+$ y verificando que $(\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b)$ $\forall \lambda \in \phi$ y $\forall a, b \in A$.

Si pensamos en los polinomios sobre un cuerpo, por ejemplo el de los números reales, $\mathbf{R}[X]$, con las operaciones usuales, se tiene un álgebra en la que el producto interno es conmutativo. Esto ya no es así si pensamos en las matrices 2×2 sobre los reales, $M_2(\mathbf{R})$, porque el producto de matrices no es conmutativo. Sin embargo en ambos ejemplos lo que sí es cierto es que el producto interno es asociativo. Son por tanto ejemplos de álgebras llamadas álgebras asociativas, y notemos que otro modo de definir un álgebra asociativa sería tomar un ϕ-módulo $(A, +, \cdot_\phi)$ que además fuera un anillo, un anillo asociativo $(A, +, \cdot)$, y que verificase que $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$.

Pero los anillos, o las álgebras, no son siempre asociativos, y podríamos citar aquí ahora varios ejemplos sencillos donde la asociatividad no se verifica. Uno bastante común y básico es el álgebra de los vectores fijos del espacio, es decir, $(\mathbf{R}^3, +, \cdot_{\mathbf{R}}, \times)$, donde $\times$ denota el producto vectorial. El producto vectorial en $\mathbf{R}^3$ no es ni conmutativo, ni asociativo. Verifica, eso sí, que

$$a \times a = 0, \qquad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c + b \times (a \times c).$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 17A70; Secondary: 16W10, 16W55, 17C50.

Key words and phrases. associative algebras, involutions, associative superalgebras, superinvolutions, Jordan structure, Lie structure.

El primer y segundo autor están subvencionados por los proyectos PB97-1291-CO3-02 y API-00/B04.

Y estas dos identidades definen lo que se denomina un *álgebra de Lie*. Las álgebras de Lie son por tanto un tipo de álgebras no asociativas, quizás el tipo más importante.

Una forma natural de hacerlas aparecer es tomar un álgebra asociativa $(A, +, \cdot_\phi, \cdot)$ y cambiar el producto interno «·» por el siguiente producto que denotamos con corchetes: $[a, b] = ab - ba$, donde hemos omitido el punto de la operación interna originaria, como haremos de aquí en adelante (es decir hemos puesto ab en vez de $a \cdot b$). Lo que se obtiene entonces es un álgebra de Lie y se denota A^-. El Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt prueba que en realidad cualquier álgebra de Lie es una subálgebra de una A^-. De hecho se puede construir para un álgebra de Lie, L, un álgebra asociativa, A, de modo que L es una subálgebra de A^-. Éste es un resultado que resulta bastante útil en el trabajo con álgebras de Lie.

Otra forma de conseguir álgebras de Lie es tomar un álgebra asociativa $(A, +, \cdot_\phi, \cdot)$ (por ejemplo $M_3(\mathbf{R})$ con las operaciones usuales), considerar una involución en A, es decir, una aplicación ϕ-lineal $*\colon A \to A$ tal que $(ab)^* = b^*a^*$ (por ejemplo la trasposición de matrices en $M_3(\mathbf{R})$), y tomar el conjunto de elementos antisimétricos de A, usualmente denotado $K(A)$, es decir $K(A) = \{a \in A : a^* = -a\}$. Entonces $K(A)$, con la operación corchete anteriormente definida, es un álgebra de Lie, es decir, $(K(A), +, \cdot_\phi, [\,,\,])$ es álgebra de Lie (en nuestro ejemplo, las matrices antisimétricas 3×3 reales serían un álgebra de Lie con la operación corchete). De esta manera se obtienen interesantes ejemplos de álgebras de Lie.

Al efectuar el proceso anterior uno se podría preguntar qué pasa con el otro trozo del espacio vectorial A, y pensemos que en adelante ϕ es un cuerpo con característica distinta de 2. Queremos decir que la involución * permite partir A en suma directa de dos subespacios vectoriales: el que forman los elementos antisimétricos $K(A)$, y el que forman los elementos simétricos, que usualmente se denota $H(A)$ (en el ejemplo propuesto, las matrices 3×3 simétricas reales):

$$A = K(A) \oplus H(A).$$

En efecto, claramente dado un elemento $a \in A$, se puede poner como suma de uno antisimétrico $\frac{a-a^*}{2}$ y uno simétrico $\frac{a+a^*}{2}$. $H(A)$ no es una subálgebra de A y tampoco de A^- debido a que el producto de elementos simétricos con el producto normal o con el corchete no da otra vez un elemento simétrico (en el ejemplo, el producto de matrices simétricas no es una matriz simétrica).

Esto fue un hándicap para los físicos que trabajaban en mecánica cuántica a principios del siglo XX. Como cuenta K. McCrimmon en [15], de hecho, ellos buscaban un objeto algebraico infinito dimensional esencialmente diferente de las conocidas matrices complejas. Porque éstas, en efecto, constituyen un álgebra asociativa, pero en ella las operaciones usuales de suma, multiplicación por escalar o producto no tienen significado físico, porque no dan lugar a operaciones observables. Sin embargo al tomar únicamente las matrices hermitianas, es decir, las simétricas respecto de la involución que consiste en trasponer y conjugar la matriz, sí eran operaciones observables la suma de matrices simétricas, el producto por escalar y las siguientes:

$$ab + ba, \quad aba, \quad a^n.$$

Fue Pascual Jordan quien, en 1934, pensó en que lo mismo que de un álgebra asociativa A se puede obtener una de Lie, A^-, cambiando el producto de A por el corchete, igualmente se podría cambiar el producto de A por el producto definido por

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba),$$

y de este modo obtener una nueva álgebra, denotada A^+. La nueva álgebra, con el nuevo producto llamado simetrizado, tiene la particularidad de que si tiene una involución, *, entonces $H(A)$, los elementos simétricos de A por la involución, son una subálgebra de A^+. Esto quiere decir que en en el caso de matrices complejas hermitianas, el nuevo producto permite obtener nuevamente matrices hermitianas. E incluso que, teniendo en cuenta que $x^2 = x \circ x$ y que $xyx = 2(x \circ y) \circ x + x^2 \circ y$, las operaciones observables $x^n, xyx, xy + yx$ pueden expresarse a partir de las de A^+.

La cuestión es que al igual que ocurre con la A^-, A^+ no es asociativa, aunque sí conmutativa. Verifica las dos siguientes propiedades algebraicas de las que parecen derivar todas las demás:

$$a \circ b = b \circ a, \qquad (a^2 \circ b) \circ a = a^2 \circ (b \circ a).$$

A las álgebras $(J, +, \cdot_\phi, \circ)$ que verifican estas dos identidades se les llamó *álgebras de Jordan* en honor a P. Jordan.

Al contrario de lo que ocurre con las álgebras de Lie, no toda álgebra de Jordan J es subálgebra de una A^+ con A álgebra asociativa. Las que verifican esto se les dice *especiales* y las que no *excepcionales*. Algo que da una idea de la importancia de estas últimas, así como de la importancia de las álgebras de Jordan del tipo $H(A)$, para un álgebra asociativa con involución, A, es por ejemplo la clasificación de las álgebras de Jordan finito dimensionales sobre $\mathbf{R}$ formalmente reales (es decir de modo que $a^2 + b^2 = 0$ en el álgebra implica que $a = 0, b = 0$). De los cinco tipos de álgebras de Jordan que aparecen en la clasificación (ver [9]) uno es un álgebra de Jordan excepcional y cuatro son especiales, y de entre estos cuatro, tres son del tipo $H(A)$ donde A es un álgebra asociativa con involución (en concreto $A = M_n(D)$ donde D es el cuerpo de los números reales, ó el cuerpo de los números complejos ó el álgebra de cuaternios de Hamilton).

Estos hechos referentes a estos dos importantes tipos de álgebras no asociativas, las de Lie y de Jordan, nos llevan al siguiente planteamiento. Si uno coge un álgebra asociativa, A, básica, estructuralmente hablando, es decir, simple (sin ideales propios y con producto no cero), y suponemos que A tiene una involución. ¿También $K(A)$, el álgebra de Lie de los elementos antisimétricos, es simple?, ¿o cómo es $K(A)$? Y H(A), el álgebra de Jordan de elementos simétricos, ¿es simple? Estas cuestiones fueron respondidas por Herstein en los años 50 y aparecen en [8]. Pero antes de continuar con esto hablemos primero de otro ente matemático surgido también de la Física.

2. Superálgebras

A mediados de los años 70 empezaron a ser de interés las álgebras A que pudieran partirse en suma directa de dos espacios vectoriales $A = A_0 \oplus A_1$ de modo que

$A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ (con los índices sumados módulo 2). En parte lo que se conocía ya antes con el nombre de álgebras Z_2-graduadas, aunque luego ya explicaremos lo que se quiere decir con lo de en parte.

En la física de partículas, al estudiar el fenómeno de la supersimetría, era necesaria una estructura algebraica con una componente par (A_0) que recogiera el comportamiento de los bosones y una componente impar (A_1) representando a los fermiones. Los físicos denominaron a estas álgebras superálgebras y con ellas era posible estudiar a la vez objetos simétricos y antisimétricos.

Una *superálgebra asociativa* es un álgebra asociativa Z_2-graduada. Dos ejemplos de superálgebras asociativas son los siguientes:

1) $A = M_n(F)$ con F un cuerpo, donde

$$A_0 = \Big\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : A \in M_r(F), B \in M_s(F) \Big\},$$

$$A_1 = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix} : C \in M_{r\times s}(F), D \in M_{s\times r}(F) \Big\},$$

con $r + s = n$. Esta superálgebra asociativa se denota $M_{r,s}(F)$.

2) $A = A_0 \oplus A_1$ con

$$A_0 = \Big\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A \in M_r(F) \Big\},$$

$$A_1 = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} : B \in M_s(F) \Big\}.$$

Otro ejemplo es el álgebra $G = G_0 \oplus G_1$ donde G_0 tiene como base sobre un cuerpo F el conjunto $\{1, e_{i_1} \dots e_{i_n}\}_{n\in 2Z}$ y G_1 tiene como base sobre F el conjunto $\{e_{i_1} \dots e_{i_n}\}_{n\in 2Z+1}$ con $e_{i_j} \in \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$, y el producto de G viene dado a partir del hecho de que $e_ie_j = -e_je_i$. G es una superálgebra asociativa, y es conocida con el nombre de superálgebra de Grassmann. Aunque no es tan sencillo como los anteriores, sin embargo resulta particularmente interesante. La razón de su interés radica en que, en realidad, lo que desde el punto de vista físico importaba no era analizar álgebras Z_2-graduadas sin más que fueran asociativas o de Lie o de Jordan, y ahora vamos a explicar lo que decíamos antes de que una superálgebra es sólo en parte un álgebra Z_2-graduada. Lo que originariamente interesó fue un álgebra Z_2-graduada $A = A_0 \oplus A_1$ de modo que al tomar el producto tensorial $G \otimes_F A$, y quedarse con la parte par $G(A) = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$, lo que se denomina envolvente de Grassmann, se obtenga un álgebra de Lie. Esto es lo que se conoce con el nombre de *superálgebra de Lie*, que es diferente de un álgebra de Lie Z_2-graduada. De hecho, una superálgebra de Lie $(L = L_0 \oplus L_1, +, \cdot_\phi, [\,,\,])$ verifica las identidades

$$[a, b] = -(-1)^{\bar a \bar b}[b, a],$$

$$(-1)^{\bar a \bar c}[[a, b], c] + (-1)^{\bar b \bar c}[[b, c], a] + (-1)^{\bar c \bar b}[c, a], b] = 0,$$

donde $\bar a = 0$ si $a \in L_0$, $\bar a = 1$ si $a \in L_1$, y $[\,,\,]$ denota el producto interno de L. Como puede observarse L_0 es en realidad un álgebra de Lie, pero sin embargo el producto de elementos de L_1 es conmutativo.

Ejemplos de superálgebras de Lie se pueden obtener de una manera similar a como obteníamos ejemplos de álgebras de Lie a partir de álgebras asociativas. Es decir, tomemos una superálgebra asociativa $A = A_0 \oplus A_1$ y cambiemos el producto interno de A por el siguiente producto:

$$[a, b]_s = ab + (-1)^{\bar{a}\bar{b}} ba.$$

A la nueva superálgebra se le denota A^{s-}, y uno puede probar que la envolvente de Grassmann, $G(A^{s-})$, es un álgebra de Lie, con lo que A^{s-} es una superálgebra de Lie.

Lo cierto es que casi a la vez que se estudiaban las superálgebras de Lie, se empezaron a estudiar otros tipos de superálgebras. En efecto, en 1975, V. Kac (ver [10]) clasificaba las superálgebras de Lie simples (aquí simples significa sin ideales graduados) finito dimensionales sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, y en 1977 (ver [11]), las superálgebras de Jordan simples finito dimensionales sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

El motivo no era únicamente extender la teoría. En seguida se pudo observar que cuestiones complicadas al tratar un tipo de álgebras se aclaraban al tomar la superálgebra del tipo correspondiente. Por citar algunos ejemplos, la pregunta sobre si es resoluble el radical de Jacobson de un álgebra de Jordan libre de rango numerable, se responde negativamente debido a la existencia de la superálgebra de Jordan de Kac 10-dimensional. O el problema en álgebras de Jordan de saber si era nilpotente el ideal generado en el álgebra por un divisor de cero absoluto. Este problema tenía y tiene una respuesta negativa conocida, debido a la existencia del contraejemplo conocido por el sugerente nombre de Monstruo de Pchelintsev (que hacía honor a su complejidad). Pues bien, este monstruo, a la luz de las superálgebras de Jordan de corchetes de Poisson resulta muy poco monstruoso.

Las superálgebras de Jordan se manifestaron así como útiles, y no sólo como motivo de curiosidad. Algo parecido había ocurrido ya con sus parientes ancestros, las álgebras de Jordan, que por ejemplo sirvieron, en 1989, a E. Zelmanov para probar el casi centenario problema de la teoría de grupos, conocido como «Problema restringido de Burnside» (lo que le valió una medalla Fields en 1994).

Así que las superálgebras de Jordan comenzaron muy pronto a estudiarse, como decíamos. Y una superálgebra de Jordan es un álgebra Z_2-graduada, $J = J_0 \oplus J_1$ de modo que su envolvente de Grassmann $G(J)$ es un álgebra de Jordan. En una superálgebra de Jordan se verifican las identidades

$$ab = (-1)^{\bar{a}\bar{b}} ba, \qquad \sum_{\mathrm{ciclic}(a,b,c)} (-1)^{\bar{c}(\bar{a}+\bar{d})} [ab, d, c],$$

donde $[ab, d, c] = ((ab)d)c - (ab)(dc)$, y el sumatorio es en los sumandos que resultan de rotar cíclicamente a, b, c. Al igual que pasaba con las superálgebras de Lie, las de Jordan no son por tanto álgebras de Jordan Z_2-graduadas: J_0 sí es un álgebra de Jordan, pero el producto en J_1 es anticonmutativo.

Nuevamente aquí, como en el caso de álgebras de Jordan, uno puede obtener a partir de una superálgebra asociativa, $A = A_0 \oplus A_1$, una superálgebra de Jordan cambiando el producto interno de A por el producto supersimetrizado:

$$a \circ_s b = \frac{1}{2}(ab + (-1)^{\bar{a}\bar{b}} ba).$$

En efecto, en este caso el álgebra resultante que se denota A^{s+} verifica que $G(A^{s+})$ es un álgebra de Jordan.

Podríamos preguntarnos si en superálgebras se pueden obtener a partir de una superálgebra asociativa con involución, una superálgebra de Lie y una de Jordan. La respuesta es que sí, pero cambiando algo la definición de involución en la línea que empieza a ser ya habitual.

Si echamos un vistazo a los «superconceptos» que hemos introducido, se observa que la línea habitual hasta ahora ha consistido en tomar los viejos y cambiar los signos en las identidades, de modo que si tomamos el primer sumando como referencia, en los demás hay que multiplicar en cada uno por menos uno tantas veces como trasposiciones de elementos impares hagamos.

Así que con esta regla la definición de *superinvolución* en $A = A_0 \oplus A_1$ sería la de un aplicación lineal $^*: A \to A$ que respete la graduación (es decir, que $A_i^* \subseteq A_i$ con $i = 0, 1$) y tal que

$$a^{**} = a, \qquad (ab)^* = (-1)^{\bar{a}\bar{b}} b^* a^*.$$

En esta situación, si A es una superálgebra asociativa, se tiene que $K(A) = \{a \in A : a^* = -a\}$ es una superálgebra de Lie y una subálgebra de A^{s-}. Y $H(A) = \{a \in A : a^* = a\}$ es una superálgebra de Jordan y una subálgebra de A^{s+}. Ambos ejemplos de superálgebras, junto con las superálgebras A^{s-} y A^{s+} juegan un relevante papel en el estudio de las superálgebras correspondientes, por ejemplo en la clasificación de las superálgebras simples de Lie y Jordan (ver [10] y [11]).

Estos hechos, que repiten la situación que ya se tenía en el estudio de álgebras de Lie y Jordan, y que fueron tratados entonces por I. Herstein y otros discípulos suyos (T. Erickson, C. Lanski, ...), motivaron el trabajo que en el siguiente párrafo se va a describir.

3. Superálgebras de Lie de elementos antisimétricos

En [7], C. Gómez-Ambrosi y I. Shestakov investigaron la estructura de Lie de los elementos antisimétricos de una superálgebra asociativa simple A con superinvolución sobre un cuerpo de característica $\neq 2$, salvo para unos pocos casos de dimensión pequeña que fueron estudiados por P. Arnal y J. Laliena en [1].

El tema no estaba agotado aquí porque cabía estudiar la estructura de Lie de los elementos antisimétricos en otras situaciones menos exigentes para A. Ya en los años 70, T. Erickson y C. Lanski habían estado buscando cómo es la estructura de $K(A)$ y también de $[K(A), K(A)]$ (donde $[K(A), K(A)]$ denota el subespacio vectorial generado por los elementos de la forma $[a, b]$ con $a, b \in K(A)$, que en efecto son un álgebra de Lie, subálgebra de A^-) cuando A es un álgebra prima o semiprima con involución (ver [3] y [13]).

Así que los resultados sobre superálgebras asociativas simples con superinvolución podía pensarse que podrían ser extendidos a superálgebras asociativas primas (es decir, sin $I = I_0 \oplus I_1$, $J = J_0 \oplus J_1$ ideales graduados distintos de cero de A tales que $IJ = 0$).

Así fue, y en [5] C. Gómez-Ambrosi, I. Shestakov y J. Laliena probaron que las superálgebras de Lie $K(A)$ y también $[K(A), K(A)]_s$ no tienen por qué ser simples, al igual que ocurre con álgebras, y tienen como ideales los del tipo $[J \cap K, K]_s$ con J un ideal de A, verificándose que si A tiene parte impar no cero entonces estos ideales son siempre distintos de cero. Además, salvo casos excepcionales, todos los ideales de las superálgebras de Lie K y $[K, K]$ son de esta clase, con la excepción de los obvios subespacios U contenidos en $Z = \{a \in A_0 : [a, b] = 0 \ \forall b \in A\}$.

Respecto a la estructura de ideales de A^{s-}, ya antes, en 1993, F. Montaner había probado que eran subespacios que debían contener a $[A, A]_s$ o que debían estar contenidos en Z, salvo si A era un álgebra de cuaternios.

4. Subálgebras maximales de superálgebras asociativas

Una vez conocido lo que ocurre con las estructuras de Lie de A^{s-} y $K(A)$, cabría preguntarse por lo que ocurre con la estructura de Jordan de las superálgebras de Jordan A^{s+} y $H(A)$ cuando A es una superálgebra asociativa simple con superinvolución. F. Montaner, en 1993, probó que si A es no conmutativa entonces A^{s+} es superálgebra de Jordan simple (ver [6]); y D. King, en 1993, que si además A no es un álgebra de cuaternios, entonces $H(A)$ es superálgebra de Jordan simple (ver [12]).

Con esto queda puesto de manifiesto que éste es un método de obtener superálgebras de Jordan simples, que se confirma al ver la clasificación de Kac a la que ya hemos aludido varias veces (ver [11]).

La cuestión que surge es si esto se puede usar para estudiar otras cuestiones estructurales de las superálgebras de Jordan. Y en efecto así se demuestra, por ejemplo, en los hechos siguientes probados por C. Gómez-Ambrosi y J. Laliena en [4]: Que se puede construir un radical de Jacobson en superálgebras de Jordan inspirado en el radical de Jacobson para superálgebras asociativas; que con respecto a este radical dada una superálgebra A asociativa, no conmutativa y prima entonces A es semisimple si y sólo si A^{s+} es semisimple; y que si A es asociativa, no conmutativa, con superinvolución y prima respecto de * entonces A es semisimple si y sólo si $H(A)$ es semisimple.

Una manera de conocer a fondo una estructura es estudiar su retículo de subestructuras. Entre las subestructuras resultan significativas, por ejemplo, las subestructuras maximales. Volviendo al caso de álgebras, el asunto es si lo mismo que la simplicidad o semisimplicidad de un álgebra asociativa A llevaba a la simplicidad o semisimplicidad de A^+ ó de $H(A)$ (algo que también era conocido en álgebras por el trabajo de K. McCrimmon de 1969, [14]), se trataba de ver si las subálgebras maximales de A llevan o tienen algo que ver con las de A^+ ó las de $H(A)$.

Un artículo de M. Racine, [16], de 1974, respondía a esta pregunta estudiando las subálgebras maximales de álgebras de Jordan simples especiales finito dimensionales sobre un cuerpo de característica no 2. Para ello aprovechó la situación anterior, y fue dando los siguientes pasos:

— Primero describió las subálgebras maximales de álgebras asociativas simples centrales finito dimensionales.

— Después, y a partir de los resultados anteriores, describió las subálgebras maximales de álgebras asociativas simples centrales finito dimensionales con involución, salvo un error que le llevó a omitir un caso.

— Finalmente, y usando todo esto, clasificó las subálgebras maximales de álgebras de Jordan especiales simples y finito dimensionales.

En 1999, A. Elduque, J. Laliena y S. Sacristán descubrieron y enmendaron el error de M. Racine para álgebras, y describieron las subálgebras maximales de superálgebras asociativas simples centrales finito dimensionales, y de superálgebras asociativas simples centrales finito dimensionales con superinvolución (y cuando decimos subálgebras de superálgebras queremos decir subálgebras graduadas).

El objetivo es llegar, a partir de estos resultados, a describir las subálgebras maximales de las superálgebras especiales de Jordan simples finito dimensionales. Por especial entenderemos que sea subálgebra de una A^{s+}. Éste es el trabajo que nos ocupa ahora.

Referencias

[1] P. M. Arnal y J. Laliena, Lie and Jordan structures in associative superalgebras with superinvolution: special cases, en *Proceedings of the International Conference on Jordan Structures* (Málaga, 1997), Univ. Málaga, Málaga (1999), 15–23.

[2] A. Elduque, J. Laliena y S. Sacristán, Maximal subalgebras of associative superalgebras, enviado a publicar.

[3] T. E. Erickson, The Lie structure in prime rings with involution, *J. Algebra* **21** (1972), 523–534.

[4] C. Gómez-Ambrosi y J. Laliena, On the semisimplicity of special Jordan superalgebras, en *Nonassociative algebra and its applications* (São Paulo, 1998), *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **211**, Marcel Dekker, Nueva York (2000), 181–187.

[5] C. Gómez-Ambrosi, J. Laliena y I. P. Shestakov, On the Lie structure of the skew elements of a prime superalgebra with superinvolution, *Comm. in Algebra* **28** (2000), 3277–3291.

[6] C. Gómez-Ambrosi y F. Montaner, On Herstein's constructions relating Jordan and associative superalgebras, *Comm. in Algebra* **28** (2000), 3743–3762.

[7] C. Gómez-Ambrosi y I. P. Shestakov, On the Lie structure of the skew elements of a simple superalgebra with superinvolution, *J. Algebra* **208** (1998), 43–71.

[8] I. N. Herstein, *Rings with involution*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, 1976.

[9] P. Jordan, J. von Neumann y E. Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, *Ann. of Math.* **35** (1934), 29–64.

[10] V. G. Kac, A sketch of Lie superalgebra theory, *Comm. Math. Phys.* **53** (1977), 31–64.

[11] V. G. Kac, Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras, *Comm. in Algebra* **5** (1977), 1375–1400.

[12] D. L. King, *Linear and quadratic Jordan superalgebras*, Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad de Virginia, 1993.

[13] C. Lanski, Lie structure in semiprime rings with involution, *Comm. in Algebra* **4** (1976), 731–746.

[14] K. McCrimmon, On Herstein's theorems relating Jordan and associative algebras, *J. Algebra* **13** (1969), 382–392.

[15] K. McCrimmon, The Russian revolution in Jordan algebras, *Algebras Groups Geom.* **1** (1984), 1–61.

[16] M. Racine, On maximal subalgebras, *J. Algebra* **30** (1974), 155–180.

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain

Correo electrónico: `pearnal@dmc.unirioja.es`, `jesus.laliena@dmc.unirioja.es`, `ssacristan@virtualcom.es`