MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

UNICIDAD Y ESTABILIDAD PARA EL PROBLEMA DE CONDUCTIVIDAD INVERSO

JUAN ANTONIO BARCELÓ, TOMEU BARCELÓ Y ALBERTO RUIZ

En memoria de Chicho

Abstract. The inverse conductivity problem deals with the determination of the conductivity γ in the interior of a domain Ω appearing on the equation

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0$$

from the measurements of u and $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ at the boundary $\partial\Omega$ (Dirichlet-to-Neumann map Λ_γ).

A survey of the problem is done. We show the main results and techniques since the original and pioneering work of A. P. Calderón in 1980, pointing out on the stability in dimension 2, where the problem is formally well determined.

1. Introducción

En los problemas inversos de frontera, uno espera descubrir propiedades internas de un cuerpo acotado Ω al hacer mediciones en la frontera $\partial\Omega$. Estos problemas surgen en campos tales como medicina (detección de embolia pulmonar), [20], geología (determinación de depósitos minerales en la Tierra), industria, economía, etc. (puede verse [9], donde se presenta una panorámica de las aplicaciones de este tipo de problemas a distintos campos, especialmente la medicina). El modelo matemático apropiado para estos problemas está dado, normalmente, por una ecuación (o sistema) en derivadas parciales en Ω y las mediciones en la frontera quedan reflejadas por una cierta aplicación entre funciones sobre el contorno. El problema inverso trata de determinar los coeficientes de la ecuación a partir del conocimiento de dicha aplicación sobre el contorno.

Quizás el ejemplo más representativo es el problema de conductividad inverso, también llamado *tomografía de impedancia eléctrica*. Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dominio acotado con frontera suave, representa un cuerpo conductor eléctrico. La conductividad del cuerpo, en un principio puede depender de la dirección (el tejido musculoso del cuerpo humano), la representamos por una matriz simétrica y definida positiva $\gamma = (\gamma^{ij})$ en Ω. Si suponemos que no existen sumideros o fuentes

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35R30; Secondary 35R25, 35B35, 31B20, 31A25.

Key words and phrases. Inverse conductivity problem, stability, Dirichlet-to-Neumann map.

de corriente, por la ley de Ohm la ecuación para el potencial u en Ω está dada por

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\gamma^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega. \tag{1.1}$$

Si conocemos el potencial f en $\partial\Omega$, el potencial inducido u en Ω satisface el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) = 0 & \text{en} \quad \Omega, \\ u = f & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

La aplicación voltaje a corriente o Dirichlet a Neumann Λ_γ, mide el flujo de corriente generado en la frontera por un potencial aplicado sobre la misma. Se define dicha aplicación por

$$\Lambda_\gamma(f) = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma^{ij}\nu_i\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|_{\partial\Omega} \tag{1.3}$$

donde u es la solución de (1.2) y ν_i es la componente i-ésima del vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$. El problema de conductividad inverso trata de la determinación de γ a partir del conocimiento de Λ_γ.

El primero que planteó este problema fue Calderón [8], quien consideró la cuestión para conductividades isótropas, es decir aquellas que no dependen de la dirección. Si suponemos que $\gamma(x)$ es una función real y positiva y consideramos la matriz real $\gamma(x)I$, donde I es la matriz identidad, (1.1) se reduce a la ecuación en forma divergencia

$$\operatorname{div}(\gamma\nabla u) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.4}$$

y la aplicación Dirichlet a Neumann (1.3) a

$$\Lambda_\gamma(f) = \gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} \tag{1.5}$$

donde $\frac{\partial}{\partial\nu}$ indica la derivada con respecto al vector normal unitario exterior ν a $\partial\Omega$. Calderón demuestra que la derivada de Frechet (primera aproximación) en conductividades constantes de la aplicación $\gamma \to Q_\gamma$, donde Q_γ es la forma cuadrática asociada a Λ_γ, es inyectiva. Utiliza las soluciones complejas de la óptica geométrica asociadas al laplaciano

$$e^{x\cdot\rho}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \rho \in \mathbb{C}^n, \qquad \rho\cdot\rho = 0,$$

y da un procedimiento para aproximar conductividades «casi constantes» a partir de la aplicación Dirichlet a Neumann (también utilizando este tipo de soluciones especiales). Muchos de los avances que se han hecho en este campo, han sido consecuencia de la construcción de las soluciones complejas de la óptica geométrica para la ecuación en derivadas parciales que se estudia. En la siguiente sección, daremos un esbozo de la demostración de Calderón y de cómo se ha generalizado su procedimiento, de lo que da idea la amplia literatura aparecida desde este trabajo pionero.

En términos generales el problema de conductividad inverso está centrado en el estudio de la aplicación

$$\Lambda : \gamma \to \Lambda_\gamma. \tag{1.6}$$

La naturaleza del problema inverso de la conductividad es diferente según tratemos dominios en el plano, $n = 2$, o en dimensión superior. Veremos en las secciones siguientes que el uso de las llamadas soluciones complejas de la óptica geométrica hace que el problema esté sobredeterminado si $n \geq 3$ y formalmente bien determinado en el plano. Las soluciones complejas de la óptica geométrica vienen dadas por las funciones de la forma (próximas a las exponenciales de Calderón)

$$e^{x\cdot\rho}(1 + \psi(x, \rho)), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \rho \in \mathbb{C}^n, \qquad \rho \cdot \rho = 0, \tag{1.7}$$

con $\psi(x, \rho) \to 0$ cuando $|\rho| \to \infty$ en algún sentido. Intuitivamente, en el caso de dimensión mayor que dos, los resultados conocidos en el problema inverso de conductividad, dependen solamente del comportamiento de funciones del tipo (1.7) en alta frecuencia (es decir, para $|\rho|$ grande), mientras que en $n = 2$ es preciso el estudio en toda la gama de frecuencias.

En este trabajo nos vamos a ocupar solamente de las propiedades de inyectividad de Λ, llamado <u>problema de unicidad</u> inverso y la continuidad de la aplicación inversa de Λ, Λ^{-1}, <u>problema de estabilidad</u>. Hay, sin embargo, otros aspectos de igual o mayor interés que estos, cuya mención no queremos omitir:

<u>Problema de caracterización</u> de Λ, es decir ¿cuál es el rango de Λ? Este es un problema abierto, su solución sería muy útil para el tratamiento de datos numéricos reales que son aproximaciones discretas de valores en el rango de Λ. Su conocimiento permitiría entender mejor cuáles son los datos experimentales más relevantes.

<u>Problema de reconstrucción</u> de γ a partir de Λ_γ. Es de mucho interés y casi todos los resultados positivos están basados en las soluciones complejas de la óptica geométrica [18], [21].

Por último está el <u>problema de reconstrucción numérica</u>. Dar un algoritmo para encontrar una aproximación de la conductividad a partir de un número finito de medidas de voltaje y corriente [9], [15], [11].

Sobre la unicidad, esto es, inyectividad de la aplicación Λ, en el caso isotrópico el primer resultado fue obtenido por Kohn y Vogelius [13], [14] para conductividades reales y analíticas a trozos. Sin embargo, relajar la regularidad es uno de los objetivos fundamentales de modelos reales, ya que, por ejemplo, en el cuerpo humano la conductividad sufre cambios muy bruscos al pasar de un tejido interno a otro. Para $n \geq 3$, Sylvester y Uhlmann generalizan la idea de Calderón [27], [28] y prueban unicidad para conductividades en $C^2(\overline{\Omega})$. Afinando las técnicas de Sylvester y Uhlmann, R. Brown [6] obtiene unicidad ($n \geq 3$) para conductividades en $C^{3/2+\epsilon}(\overline{\Omega})$ para $\epsilon > 0$. Recientemente Paivarinta, Pachenko y Uhlmann han obtenido el resultado de unicidad para conductividades en $C^{3/2}(\overline{\Omega})$, [22]. En $n = 2$ y con técnicas diferentes a las usadas en $n \geq 3$, Nachman [19] obtiene unicidad para conductividades en $W^{2,p}(\Omega)$ para algún $p > 1$. La reducción de la ecuación (1.4) a un sistema de orden 1, permite a Brown y Uhlmann [7] obtener el resultado de unicidad para conductividades en $W^{1,p}(\Omega)$ y $p > 2$. Las principales ideas en $n \geq 3$ y $n = 2$ serán descritas en la siguiente sección.

En el caso anisotrópico, donde la conductividad depende de la dirección, el problema de unicidad en el plano está resuelto para conductividades suficientemente suaves, al poder ser reducido, usando coordenadas isotermales, al caso isotrópico [25]. Aparte de que este tipo de coordenadas no existen en $n \geq 3$, hay que observar que si $\Psi : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ es un difeomorfismo de clase C^∞ tal que $\Psi_{|\partial\Omega} = \mathrm{Id}$ y

$$\tilde{\gamma} = \frac{((D\Psi)^t \cdot \gamma \cdot (D\Psi)) \circ \Psi^{-1}}{|\det D\Psi|}$$

donde $D\Psi$ designa la diferencial de Ψ y $(D\Psi)^t$ su traspuesta, entonces $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ y $\Lambda_{\tilde{\gamma}} = \Lambda_\gamma$, véase [12]. Esto supone una obstrucción a la unicidad, que es la existencia del difeomorfismo Ψ con la condición en $\partial\Omega$ antes indicada. Se conjetura que hay unicidad salvo este difeomeorfismo. Esta conjetura es equivalente al problema de determinar una métrica riemanniana a partir de la aplicación Dirichlet a Neumann asociada a su operador de Laplace-Beltrami [16].

Los resultados de estabilidad conocidos hasta ahora son del mismo tipo: estabilidad logarítmica. Están basados en las técnicas utilizadas para demostrar los correspondientes resultados de unicidad y por lo tanto se basan en las soluciones complejas de la óptica geométrica, cuyo carácter exponencial podría ser el motivo de una estabilidad tan débil.

El primer resultado de estabilidad interior es debido a Alessandrini [2] en $n \geq 3$ y para conductividades en $W^{2,2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha > n/2$. En $n \geq 3$, los resultados de unicidad se resuelven también en el marco del problema de scattering de energía fija para la ecuación de Schrödinger. Para este tipo de ecuación

$$(\Delta - q(x))u + k^2 u = 0,$$

Stefanov [23] obtiene estimaciones de estabilidad. En $n = 2$, el primer resultado lo obtiene Liu [17] para conductividades en $W^{2,p}(\overline{\Omega})$, $1 < p < 2$. En [3] se rebaja la regularidad de la conductividad a $C^{1+\epsilon}(\overline{\Omega})$ si $n = 2$. La sección 3 estará dedicada a comentar las principales ideas sobre estabilidad para $n \geq 3$ y $n = 2$.

Para una panorámica más general y profunda sobre el tema, recomendamos las excelentes exposiciones de G. Uhlmann [30] y [31].

2. Unicidad para el problema inverso de conductividad

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ un dominio acotado con frontera suave. Los resultados que vamos a mencionar son casi todos válidos para $\partial\Omega$ Lipschitz. $\gamma(x)$ es una función real, positiva y acotada en Ω.

Empezamos esta sección dando una idea del resultado pionero de Calderón. Dado el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma\nabla u) = 0 & \text{en} \quad \Omega, \\ u = f & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

se considera la integral de Dirichlet asociada a (2.1)

$$Q_\gamma(f) = \int_\Omega \gamma |\nabla u|^2 \, dx.$$

$Q_\gamma(f)$ mide la potencia necesaria para mantener el potencial f en la frontera. Se polariza la forma cuadrática $Q_\gamma(f)$, para obtener la forma bilineal, que seguimos designando por Q_γ,

$$Q_\gamma(f,g) = \int_\Omega \gamma \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} g \Lambda_\gamma(f) \, d\sigma$$

donde u y v son soluciones de (2.1) con dato en la frontera f y g respectivamente.

Conocer Q_γ es equivalente a conocer la aplicación Dirichlet a Neumann Λ_γ. Calderón estudia la aplicación

$$Q : \gamma \to Q_\gamma$$

y demuestra que la derivada de Frechet de esta aplicación en conductividades constantes es inyectiva. Más específicamente, considerando $\gamma = 1$,

$$dQ_{\gamma=1} : \varphi \to dQ_{\gamma=1}\varphi$$

donde

$$dQ_{\gamma=1}\varphi(f,g) = \int_\Omega \varphi \nabla u \nabla v \, dx$$

y, como antes, u y v son soluciones de (2.1) para $\gamma = 1$, con dato (en $\partial\Omega$) f y g respectivamente.

Demostrar que esta aplicación es inyectiva es equivalente a demostrar que los productos de los gradientes de las funciones armónicas son densos en $L^2(\Omega)$, o lo que es lo mismo, si $\int_\Omega \varphi \nabla u \nabla v \, dx = 0$ para u y v funciones armónicas con datos f y g, entonces $\varphi = 0$.

Calderón considera las soluciones exponenciales complejas

$$u = e^{x\cdot\rho}, \qquad v = e^{-x\cdot\overline{\rho}}, \qquad \rho \in \mathbb{C}^n, \qquad \rho\cdot\rho = 0.$$

Si $\rho = m + ik$ donde $m, k \in \mathbb{R}^n$ con $m \cdot k = 0$ y $|m| = |k|$, entonces $\rho \cdot \rho = 0$ y

$$\int_\Omega \varphi \nabla u \nabla v \, dx = -2|k|^2 \int_\Omega e^{2ix\cdot k} \varphi(x) \, dx = 0,$$

lo que nos dice que $(\varphi\chi_\Omega)\hat{}(k) = 0$ y por tanto $\varphi = 0$.

La idea de Calderón ha jugado un importante papel en los siguientes trabajos en este campo. Soluciones aproximadas a las utilizadas por Calderón fueron utilizadas por Sylvester y Uhlmann para recuperar otra vez $(\gamma\chi_\Omega)\hat{}(k)$, $k \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, [27], o para probar un resultado de unicidad local en $n = 2$, [26].

Veamos las ideas en $n \geq 3$. Para encontrar soluciones del tipo exponencial complejo, exigen a la conductividad que esté en $C^2(\overline{\Omega})$ y reducen, con el cambio $v = \gamma^{1/2}u$, el estudio de la ecuación $\operatorname{div}(\gamma\nabla u) = 0$ al estudio de la ecuación de Schrödinger de energía cero

$$(\Delta - q)v = 0 \tag{2.2}$$

para el caso particular $q(x) = \frac{\Delta\gamma^{1/2}(x)}{\gamma^{1/2}(x)}$.

Para $q \in L^\infty(\Omega)$, se definen los datos de Cauchy por

$$C_q = \left\{ \left(v|_{\partial\Omega}, \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} \right) \;:\; v \in H^1(\Omega) \text{ solución de (2.2)} \right\}.$$

Si se demuestra que 0 no es un autovalor de (2.2), el resultado de unicidad en la frontera de Kohn y Vogelius [13] haría que el resultado de unicidad para el potencial $q(x)$ a partir de C_q implicase el resultado de unicidad para conductividades $\gamma \in C^2(\overline{\Omega})$.

La clave está en las soluciones complejas de la óptica geométrica asociadas a (2.2). Se demuestra que para $\rho \in \mathbb{C}^n$ con $\rho \cdot \rho = 0$ y $|\rho|$ grande, (2.2) admite una única solución en $L^2(\mathbb{R}^n)$, con un cierto peso, de la forma

$$u(x) = e^{x\cdot\rho}(1 + \psi_q(x,\rho)) \tag{2.3}$$

con $\psi_q(x,\rho) \to 0$ cuando $|\rho| \to 0$ en algún sentido.

Sean $q_i(x) \in L^\infty(\Omega)$ y $u_i(x) = e^{x\cdot\rho_i}(1 + \psi_{q_i}(x,\rho_i))$, $i = 1,2$, las correspondientes soluciones. Si suponemos que $C_{q_1} = C_{q_2}$ el teorema de la divergencia nos asegura que

$$\int_\Omega (q_1(x) - q_2(x)) e^{x\cdot\rho_1}(1 + \psi_{q_1}(x,\rho_1)) e^{x\cdot\rho_2}(1 + \psi_{q_2}(x,\rho_2)) = 0; \tag{2.4}$$

ahora se elige de manera adecuada ρ_i de tal manera que se pueda repetir el «argumento de Calderón» y deducir que $((q_1 - q_2)\chi_\Omega)\hat{}\,(k) = 0$ cualquiera que sea $k \in \mathbb{R}^n$.

Si $k \in \mathbb{R}^n$ es fijo y $n \geq 3$, podemos elegir l y $m \in \mathbb{R}^n$ tales que $k\cdot l = k\cdot m = l\cdot m = 0$ y $|m|^2 = |k|^2 + |l|^2$. Esto asegura que la elección de

$$\rho_1 = \frac{m}{2} + i\Big(\frac{k+l}{2}\Big) \qquad \text{y} \qquad \rho_2 = -\frac{m}{2} + i\Big(\frac{k-l}{2}\Big)$$

verifica $\rho_i \cdot \rho_i = 0$, $i = 1,2$. Si hacemos $|l| \to \infty$ en (2.4) con esta elección, se obtiene el resultado deseado.

En $n = 2$ no podemos reproducir el argumento anterior. Para $k \in \mathbb{R}^2$ fijo no tendremos libertad en l para hacer $|l| \to \infty$. En este sentido indicábamos en la sección previa que el problema de unicidad para $n \geq 3$ está sobredeterminado.

Parecería que en el plano necesitaríamos la información de las soluciones complejas de la óptica geométrica cualquiera que fuese $\rho \in \mathbb{C}^2$ con $\rho \cdot \rho = 0$ y no solamente las de frecuencia alta. Sin embargo, existen potenciales $q(x) \in L^\infty(\Omega)$ tales que para algunos $\rho \in \mathbb{C}^2$ con $\rho \cdot \rho = 0$ no hay unicidad de soluciones complejas de la óptica geométrica asociadas a (2.2), [29]. Nachman [19] construye soluciones de la forma (2.3) para (2.2) cualquiera que sea $\rho \in \mathbb{C}^2$ con $\rho \cdot \rho = 0$, $\rho \neq 0$, cuando el potencial tiene la forma

$$q(x) = \frac{\Delta\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

con $q \in L^p(\mathbb{R}^2)$, φ positiva y $\nabla\varphi \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $p < 2$. Da una extensión de estas soluciones para $\rho = 0$. Utilizando estas soluciones para todo $\rho \in \mathbb{C}^2$ y el $\partial\overline{\partial}$-método de scattering inverso (como en [4] y [5], y del que daremos una idea de su utilización en esta clase de problemas en la siguiente sección), obtiene la unicidad para conductividades en $W^{2,p}(\overline{\Omega})$, $p > 1$.

El $\partial\overline{\partial}$-método de scattering inverso junto con la reducción de la ecuación

$$\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = 0$$

a un sistema de primer orden, es utilizado por Brown y Uhlmann [7] para obtener unicidad en $n = 2$ para conductividades en $W^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$. Para aplicar el $\partial\overline{\partial}$-método, tenemos que trabajar con la ecuación elíptica $\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = 0$ en todo $\mathbb{R}^2$. Para ello se extiende la conductividad γ a todo $\mathbb{R}^2$ de tal manera que $\gamma - 1$ tenga soporte compacto (esto siempre es posible hacerlo si $\partial\Omega$ es Lipschitz).

Sea u una solución de $\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = 0$ en $\mathbb{R}^2$. Si llamamos $v = \gamma^{1/2}\partial u$ y $w = \gamma^{1/2}\overline{\partial}u$ donde $\partial = (1/2)(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2})$ y $\overline{\partial} = (1/2)(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})$, entonces (v, w) satisface el sistema de primer orden

$$\begin{pmatrix} \overline{\partial} & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = Q(x) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

donde

$$Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ \overline{q}(x) & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$q(x) = -\frac{1}{2}\partial(\log\gamma) = -\frac{\partial\gamma^{1/2}}{\gamma^{1/2}}.$$

El $\partial\overline{\partial}$-método de scattering inverso trata sistemas de este tipo. Ahora vamos a construir soluciones especiales de (2.5), que se corresponden con las soluciones complejas de la óptica geométrica de Sylvester y Uhlmann.

De la igualdad

$$\{\rho \in \mathbb{C}^2 : \rho \cdot \rho = 0\} = \{(ik, -k),\ \ k \in \mathbb{C}\} \cup \{(-ik, -k),\ \ k \in \mathbb{C}\},$$

las soluciones exponenciales complejas de Calderón producen, para el sistema (2.5) con $q(x) = 0$, soluciones del tipo

$$\begin{pmatrix} e^{izk} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\overline{z}k} \end{pmatrix}, \qquad z = x_1 + ix_2 \equiv (x_1, x_2) = x, \qquad k \in \mathbb{C}.$$

Esto sugiere buscar soluciones matriciales 2×2 de (2.5) de la forma

$$\Psi(Q, x, k) = m(Q, x, k) \begin{pmatrix} e^{izk} & 0 \\ 0 & e^{-i\overline{z}k} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

La matriz $m(Q, x, k)$ es conocida como la solución matricial de Jost, y satisface el sistema

$$D_k m(Q, x, k) = Q(x) m(Q, x, k) \tag{2.7}$$

que, componente a componente, es

$$\begin{cases} \overline{\partial} m_{11}(Q, x, k) = q(x) m_{21}(Q, x, k) \\ (\partial + ik) m_{21}(Q, x, k) = \overline{q(x)} m_{11}(Q, x, k) \end{cases} \tag{2.8}$$

(la segunda columna satisface un sistema análogo).

Imponiendo que $Q \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $p > 2$, con soporte compacto, Brown y Uhlmann demuestran existencia y unicidad de solución de (2.7) en ciertos espacios $L^r(\mathbb{R}^2)$ con pesos, con la condición de que cuando $|k|$ es grande en cierto sentido $m(Q,x,k)$ tiende a la matriz identidad. Demuestran que $m(Q,x,k)$ satisface un sistema parecido a (2.7), pero con respecto a la variable k y donde el papel del potencial $Q(x)$ lo desempeña la matriz que designamos por $S(Q,k)$, conocida como matriz de scattering asociada al potencial $Q(x)$, es antidiagonal y está definida por

$$S_{21}(Q,k) = -i\int e_k(x)\overline{q(x)}m_{11}(Q,x,k)\,dx, \qquad S_{12}(Q,k)\overline{= S_{21}(Q,\overline{k})},$$

donde $e_k(x) = e_k(z) = e^{i(kz+\overline{k}\overline{z})}$.

La matriz de Jost satisface, con respecto a la variable k, el sistema

$$\text{(2.9)} \qquad \begin{cases} \overline{\partial} m_{11}(Q,x,k) = S_{21}(Q,k)\overline{e_z(k)m_{21}(Q,x,k)} \\ (\partial + iz)(\overline{e_z(k)m_{21}(Q,x,k)}) = \overline{S_{21}(Q,k)}m_{11}(Q,x,k) \end{cases}$$

(la segunda columna satisface un sistema análogo).

Esta dualidad (2.8) versus (2.9), como podrá verse más claramente en la siguiente sección, juega un papel muy importante en el $\partial\overline{\partial}$-método de scattering inverso.

Brown y Uhlmann recuperan la matriz potencial $Q(x)$ a partir del comportamiento asintótico para altas frecuencias ($|k|$ grande) de las matrices de Jost. La aplicación de Dirichlet a Neumann determina la matriz de scattering $S(Q,k)$. El resultado de unicidad lo obtienen de la $\overline{\partial}$-ecuación con respecto a k, (2.9), lo que les permite obtener las matrices de Jost a partir de la matriz de scattering ($\partial\overline{\partial}$-método de scattering inverso).

3. Estabilidad para el problema inverso de conductividad

El primer resultado significativo de estabilidad interior es debido a Alessandrini [2] para $n \geq 3$. Utilizando las técnicas desarrolladas por Sylvester y Uhlmann (reducción de la ecuación en forma divergencia a la ecuación de Schrödinger de energía cero y uso de las soluciones complejas de la óptica geométrica de «alta frecuencia»), obtiene el siguiente resultado de estabilidad logarítmica:

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\omega\left(\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2}\to H^{-1/2}}\right),$$

donde la función $\omega(t)$ satisface, si t es pequeño, $\omega(t) \leq C|\log t|^{-\alpha}$, para algún α tal que $0 < \alpha < 1$. Le exige a las conductividades que estén en $W^{2,2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha > n/2$.

Demuestra también que si las conductividades γ_i no son continuas, no hay estabilidad ($n \geq 2$). Si designamos por $B_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$ la bola centrada en el origen y de radio r, tomando como $\Omega = B_1$ la bola unidad en $\mathbb{R}^2$, $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 = 1 + \chi_{B_r}$, entonces $\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ pero $\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2}\to H^{1/2}} \leq 2r \to 0$ si $r \to 0$. Los detalles pueden encontrarse en [2].

Para $n = 2$ será necesario obtener toda la información de la aplicación Dirichlet a Neumann. Nachman en [18] y [19] da un procedimiento de reconstrucción de la conductividad γ a partir de Λ_γ. Utilizando este procedimiento de reconstrucción, Liu [17] obtiene un resultado de estabilidad como el de Alessandrini, pero en $\mathbb{R}^2$ para conductividades en $W^{2,p}(\overline{\Omega})$, $1 < p < 2$.

En [3], motivados por los trabajos [7], [17] y [19], se obtiene un resultado de estabilidad en $\mathbb{R}^2$ del tipo que han obtenido Alessandrini y Liu, pero exigiendo menos regularidad a las conductividades, esto es $\gamma_i \in C^{1+\epsilon}(\overline{\Omega})$, $\epsilon > 0$. Este resultado lo vamos a enunciar con precisión y daremos una idea de la demostración. Antes de esto, observamos que las estimaciones de estabilidad obtenidas en [2], [17] y [3] son del mismo tipo. El hecho de que se obtengan estimaciones logarítmicas depende, como veremos, fuertemente de utilizar las soluciones complejas de la óptica geométrica. En el tratamiento hecho por Calderón al problema, se refleja de una forma más clara este fenómeno.

Es natural preguntarse si estas estimaciones son óptimas (¿es óptima en el caso de Calderón?). La respuesta no se sabe para $n \geq 2$; tampoco se sabe si existen estimaciones de estabilidad tipo Hölder. En $n = 1$ se sabe que hay estabilidad tipo Hölder. También es importante señalar que la estabilidad de los valores frontera de γ a partir de la aplicación Dirichlet a Neumann es de tipo Hölder:

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|^{\alpha}_{H^{1/2}\to H^{-1/2}}, \qquad \alpha > 0,$$

véase [28] y [1]. En la demostración de este resultado no se utilizan las soluciones de la óptica geométrica compleja.

Las técnicas utilizadas en el resultado de estabilidad en [3] son la reducción de la ecuación en forma divergencia a un sistema de primer orden y el $\partial\overline{\partial}$-método de scattering inverso. Usamos la notación ya introducida en la sección anterior y cuando aparezca por ejemplo $S(Q_1, k)$, nos estamos refiriendo a la matriz de scattering asociada a la conductividad γ_1. Se necesita más regularidad en las matrices de Jost $m(Q, x, k)$, tanto en la variable x como en la k, que la que es necesaria en el resultado de unicidad de Brown y Uhlmann. Por eso a las conductividades se les exige que tengan un ϵ de derivada más. Otra diferencia es que en el resultado de estabilidad recuperamos la conductividad de los valores de las matrices de Jost para $k = 0$ y no del desarrollo asintótico para $|k|$ grande.

En [3] se demuestra el siguiente resultado de existencia y unicidad. Si $\gamma - 1 \in W_c^{1+\epsilon,2}(\mathbb{R}^2)$, entonces para cada $k \in \mathbb{C}$ existe una única solución de (2.7) con la condición de que

$$m(Q, \cdot, k) - \mathrm{Id} \in W^{\epsilon,r}(\mathbb{R}^2), \qquad r > 2.$$

Si $k \neq 0$, existe una única solución $u(Q, x, k)$ de $\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = 0$ tal que

$$e^{-izk}u(Q, x, k) - \frac{1}{ik} = (\partial + ik)^{-1}(\gamma^{-1/2}m_{11}(Q, \cdot, k) - 1)(x) \in W^{1+\epsilon,r}(\mathbb{R}^2), \quad r > 2,$$

y

$$\left\| e^{-izk}u(Q, x, k) - \frac{1}{ik} \right\|_{W^{1,r}(dx)} \leq C\Big(1 + \frac{1}{|k|}\Big). \tag{3.1}$$

Ya podemos enunciar el resultado y dar una idea de cómo se demuestra:

Teorema. *Sea Ω un dominio acotado Lipschitz en $\mathbb{R}^2$ y γ_i, $i = 1, 2$ funciones en Ω que satisfacen:*

(i) *Existe una constante $C > 0$ tal que $\frac{1}{C} < \gamma_i(x) < C$, $x \in \Omega$, $i = 1, 2$.*
(ii) *$\gamma_i \in C^{1+\epsilon}(\overline{\Omega})$ para algún $\epsilon > 0$, $i = 1, 2$.*

Entonces

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\omega(\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2}\to H^{-1/2}})$$

donde $\omega(t)$ es una función tal que, si t es suficientemente pequeño, $\omega(t) \leq |\log t|^{-\alpha}$ para algún $\alpha > 0$.

Idea de la demostración. Se extiende γ_i a $\mathbb{R}^2$ (seguimos llamando a la extensión γ_i), de tal manera que reducimos el problema al caso

$$\gamma_i - 1 \in C_c^{1+\epsilon}(\overline{\mathbb{R}^2}), \qquad \gamma_i = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega.$$

Después diremos cómo podemos hacer esta reducción.

La demostración se hace en dos partes. En la primera se trata la estabilidad de la aplicación $\Lambda_\gamma \to S(Q,\cdot)$, obteniéndose

$$\|S(Q_1,\cdot) - S(Q_2,\cdot)\|_{L^r(dk)} \leq \omega(\|\Lambda_{\tilde{\gamma}_1} - \Lambda_{\tilde{\gamma}_2}\|_{H^{1/2}\to H^{-1/2}}),$$

para un intervalo de r's alrededor de $r = 2$.

En la segunda parte se estudia la estabilidad de la aplicación $S(Q,\cdot) \to \gamma$, obteniéndose

$$\|\gamma_1^{1/2} - \gamma_2^{1/2}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|S(Q_1,\cdot) - S(Q_2,\cdot)\|_{L^r(dk)}$$

también en un intervalo de r's alrededor de $r = 2$.

Estas dos estimaciones junto con las condiciones impuestas a las conductividades nos producen el resultado de estabilidad. Observemos que la estabilidad de la transformada de scattering a la conductividad es Hölder, por lo tanto el carácter logarítmico de la estabilidad proviene de la aplicación $\Lambda_\gamma \to S(Q,\cdot)$.

Estabilidad de la aplicación $\Lambda_\gamma \to S(Q,\cdot)$. El punto principal es el control de las transformadas de scattering cuando $k \neq 0$. Este control se consigue después de la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}(3.2)\qquad &\frac{1}{\bar{k}}(S_{21}(Q_1,k) - S_{21}(Q_2,k)) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \overline{u(Q_1,x,-k)}(\Lambda_{\gamma_2} - \Lambda_{\gamma_1})u(Q_2,x,k)\,d\sigma(x),\end{aligned}$$

que junto con el teorema de la traza asegura que

$$\begin{aligned}&|S_{21}(Q_1,k) - S_{21}(Q_2,k)| \\ &\leq \frac{|k|}{2}\,\|u(Q_1,\cdot,-k)\|_{W^{1,r}(\Omega)}\,\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2}\to H^{-1/2}}\,\|u(Q_2,\cdot,k)\|_{W^{1,r}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Las estimaciones que se conocen sobre $u(Q_i,\cdot,k)$ son del tipo (3.1). Al introducir la exponencial compleja se obtiene

$$|S_{21}(Q_1,k) - S_{21}(Q_2,k)| \leq Ce^{(2l+1)|k|}\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2}\to H^{-1/2}},$$

donde se supone que $\Omega \subset B(0,l)$. El factor $e^{(2l+1)|k|}$ es el que produce la estabilidad logarítmica.

También es necesario en esta parte asegurar algún decaimiento en $|k|$ para las transformadas de scattering cuando $|k|$ es grande. Si $|k|$ es grande, $m_{11}(Q_i,x,k)$ es próximo a 1 en algún sentido y $S_{21}(Q_i,k)$ es esencialmente la transformada de Fourier de $\overline{q_i(x)}$. Exigir que los potenciales $q_i(x)$ tengan regularidad C^ϵ permite controlar el decaimiento de sus transformadas.

En la fórmula (3.2) es donde únicamente se utiliza que $\gamma_i = 1$ y $\frac{\partial \gamma_i}{\partial \nu} = 0$ en $\partial\Omega$. Si no se hubiera supuesto esto, en la parte derecha de la fórmula se tendrían términos extra de la forma

$$\frac{1}{k} \int_{\partial\Omega} (\gamma_2^{1/2} - \gamma_1^{1/2}) e_k(x) \nu \overline{m_{21}(Q_1, x, -k)}\, d\sigma$$

ó

$$\frac{1}{|k|} \int_{\partial\Omega} \gamma_1^{1/2} e_k(x) \overline{\nu} [m_{21}(Q_1, x, k) - m_{21}(Q_2, x, k)]\, d\sigma.$$

En la primera integral, sería necesario un resultado de estabilidad en la frontera. Este es conocido y es debido a Sylvester y Uhlmann [28] para conductividades suaves y a Alessandrini [1] para conductividades en $C^{1+\epsilon}(\overline{\Omega})$. Para la segunda integral se necesitarían resultados de estabilidad para los valores de las matrices de Jost en la frontera. La recuperación de estos valores frontera está tratada en [18] usando el método de ecuaciones integrales.

La reducción a conductividades $\gamma \in C^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^n)$ con $\gamma = 1$ y $\frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = 0$ en $\partial\Omega$, se puede hacer tomando un Ω' tal que $\overline{\Omega} \subset \Omega'$ y usando el teorema de extensión de Calderón [24], se extiende γ a γ' tal que sea 1 en un entorno de $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'$.

Para obtener un resultado del tipo

$$\|\Lambda_{\gamma_1'} - \Lambda_{\gamma_2'}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega') \to H^{-1/2}(\partial\Omega')} \le C \|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|^{\alpha}_{H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)}, \quad \alpha > 0,$$

que permita reducirse al caso indicado, se sigue un argumento técnico debido a Nachman [19], el cual está basado en las estimaciones de estabilidad para las conductividades en la frontera.

Estabilidad de la aplicación $\gamma \to S(Q, \cdot)$. Como en [19], se recuperan las conductividades a partir de las componentes de las matrices de Jost en $k = 0$. Utilizando la $\overline{\partial}$-ecuación con respecto a x, (2.8), que satisfacen las funciones de Jost

$$\mu(-Q_i^t, x, k) = m_{11}(-Q_i^t, x, k) + \overline{m_{21}(-Q_i^t, x, k)},$$

se ve que, en $k = 0$, $\mu(-Q_i^t, x, 0)$ y $\gamma_i^{1/2}(x)$ satisfacen la misma $\overline{\partial}$-ecuación del tipo $\overline{\partial} u = a(x)\overline{u}$. Aplicando un resultado de unicidad para funciones cuasianalíticas, se obtiene

$$\gamma_i^{1/2}(x) = m_{11}(-Q_i^t, x, 0) + \overline{m_{21}(-Q_i^t, x, 0)}. \tag{3.3}$$

La siguiente idea es aprovechar la $\overline{\partial}$-ecuación con respecto a k que satisfacen las matrices de Jost (2.8). Se demuestra que la función «$\mu(-Q_1^t, x, k) - \mu(-Q_2^t, x, k)$» satisface con respecto a k una $\overline{\partial}$-ecuación no homogénea del tipo $\overline{\partial} u = a(k)\overline{u} + b(k)$, donde esencialmente $b(k) \equiv S_{21}(-Q_1^t, k) - S_{21}(-Q_2^t, k)$. Invirtiendo la $\overline{\partial}$-ecuación en $k = 0$, utilizando (3.3), estimaciones a priori para la $\overline{\partial}$-ecuación, y el resultado de Beals y Coifman [5] $S(-Q^t, k) = S(Q, -\overline{k})^t$, se tiene

$$|\gamma_1^{1/2}(x) - \gamma_2^{1/2}(x)| \le C \|S(Q_1, \cdot) - S(Q_2, \cdot)\|_{L^r(dk)}$$

para r en un intervalo que contiene $r = 2$.

Referencias

[1] G. Alessandrini, Stable determination of conductivity by boundary measuraments, *Applicable Anal.* **27** (1988), 153–172.

[2] G. Alessandrini, Singular solutions of elliptic equations and the determination of conductivity by boundary measuraments, *J. Differential Equations* **84** (1990), 252–272.

[3] J. A. Barceló, T. Barceló y A. Ruiz, Stability of the inverse conductivity problem in the plane for less regular conductivities, *J. Differential Equations* **133** (2001), 231–270.

[4] R. Beals y R. Coifman, Multidimensional inverse scattering and nonlinear partial differential equations, en *Pseudodifferential operators and applications* (Notre Dame, Ind., 1984, F. Treves, ed.), *Proc. Sympos. Pure Math.* **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1985), 45–70.

[5] R. Beals y R. Coifman, The spectral problem for the Davey-Stewarson and Ishimori hierarchies, en *Nonlinear evolution equations: Integrability and spectral methods*, Manchester University Press (1988), 15–23.

[6] R. Brown, Global uniqueness in the impedance imaging problem for less regular conductivities, *SIAM J. Math. Anal.* **27** (1996), 1049–1056.

[7] R. Brown y G. Uhlmann, Uniqueness in the inverse conductivity problem for nonsmooth conductivities in two dimensions, *Comm. Partial Differential Equations* **22** (1997), 1009–1027.

[8] A. Calderón, On an inverse boundary value problem, en *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics* (Río de Janeiro, 1980), Soc. Brasil. Mat., Río de Janeiro (1980), 65–73.

[9] M. Cheney, D. Isaacson y J. C. Newell, Electrical impedance tomography, *SIAM Review* **41** (1999), 85–101.

[10] D. Colton, J. Coyle y P. Monk, Recent developments in inverse acoustic scattering theory, *SIAM Review* **42** (2000), 369–414.

[11] R. Kohn y A. McKenney, Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography, *Inverse Problems* **6** (1990), 389–414.

[12] R. Kohn y M. Vogelius, Identification of an unknown conductivity by means of measuraments at the boundary, en *Inverse problems* (Nueva York, 1983, D. McLauglin, ed.), *SIAM-AMS Proc.* **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1984), 113–123.

[13] R. Kohn y M. Vogelius, Determining conductivity by boundary measuraments, *Comm. Pure App. Math.* **37** (1984), 289–298.

[14] R. Kohn y M. Vogelius, Determining conductivity by boundary measurements II. Interior results, *Comm. Pure App. Math.* **38** (1985), 644–667.

[15] R. Kress, Numerical methods in inverse acoustic obstacle scattering, en *Inverse problems in partial differential equations* (Arcata, CA, 1989, D. Colton, ed.), SIAM, Philadelphia, PA (1990), 61–72.

[16] J. Lee y G. Uhlmann, Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary measuraments, *Comm. Pure App. Math.* **42** (1989), 1097–1112.

[17] L. Liu, *Stability estimates for the two-dimensional inverse conductivity problem*, Ph. D. Thesis, Dept. of Mathematics, University of Rochester, Nueva York, 1997.

[18] A. Nachman, Reconstructions from boundary measuraments, *Annals of Math.* **128** (1988), 531–587.

[19] A. Nachman, Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem, *Annals of Math.* **143** (1995), 71–96.

[20] National Research Council Institute of Medicine, *Mathematics and physics of emerging biomedical imaging*, National Academy Press, 1986.

[21] R. Novikov, Multidimensional inverse spectral problems for the equation $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ (en ruso), *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **22** (1988), 11–22, 96. Traducción al inglés: *Funct. Anal. Appl.* **22** (1988), 263–272 (1989).

[22] L. Paivarinta, A. Pachenko y G. Uhlmann, Complex geometrical optics solutions for Lipschitz conductivities, prepublicación (2000).

[23] P. Stefanov, Stability of the inverse scattering in potencial scattering at a fixed energy, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **40** (1990), 867–884.

[24] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, 1970.

[25] J. Sylvester, An anisotropic inverse boundary value problem, *Comm. Pure App. Math.* **43** (1990), 202–232.

[26] J. Sylvester y G. Uhlmann, A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in electrical prospection, *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), 91–112.

[27] J. Sylvester y G. Uhlmann, A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem, *Annals of Math.* **125** (1987), 153–169.

[28] J. Sylvester y G. Uhlmann, Inverse Boundary value Problem at the boundary—continuous dependence, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 197–221.

[29] T. Y. Tsai, The Schrödinger equation in the plane, *Inverse Problems* **9** (1993), 763–787.

[30] G. Uhlmann, Inverse boundary value problems and applications, *Astérisque* **207** (1992), 153–211.

[31] G. Uhlmann, Developments in inverse problems since Calderón's foundational paper, en *Harmonic analysis and partial differential equations* (Chicago, 1996, M. Christ, C. Kenig y C. Sadosky, eds.), Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago (1999), 295–345.

ETSI de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid, Ciudad Universitaria, 28040 Madrid
Correo electrónico: ma21@dumbo.caminos.upm.es

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid
Correo electrónico: bartolome.barcelo@uam.es

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid
Correo electrónico: alberto.ruiz@uam.es