MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

# SERIES DE FOURIER Y FUNCIONES DE LIPSCHITZ

JORGE BUSTAMANTE Y MIGUEL ANTONIO JIMÉNEZ

*A la memoria de un gran amigo*

ABSTRACT. This paper is an introductory approach to several approximation problems of periodic functions in connection with Fourier series, Lipschitz functions and related topics. Traditional results in this context are presented and discussed in the first two sections. Further, we introduce certain Hölder spaces of integrable functions that become homogeneous Banach (also Hilbert) spaces, while last section considers approximation problems under Hölder norms.

## 1. INTRODUCCIÓN

Sea $C_{2\pi}$ el espacio de las funciones reales continuas y $2\pi$-periódicas. Muchos de los resultados que se presentarán aquí se pueden extender si dificultad al caso complejo. Para simplificar la exposición consideramos sólo el caso real. Para $p \in [1, \infty)$, denotaremos por $L^p_{2\pi}$ al espacio tradicional de funciones periódicas $p$ integrables en $[0, 2\pi]$ con la norma

$$\|f\|_p := \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} .$$

En $C_{2\pi}$ consideramos la norma de la convergencia uniforme, esto es,

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|.$$

En lo que sigue, $X_{2\pi}$ denotará a uno cualquiera de los espacios antes definidos y $\|f\|_{X_{2\pi}}$ indica que se considera la norma del espacio $X_{2\pi}$.

Para cada entero no negativo $n$, denotemos por $\mathcal{T}_n$ a la colección de todos los polinomios trigonométricos de grado no mayor que $n$. Esto es, $f \in \mathcal{T}_n$ si se puede representar en la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) .$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 26A16, 42A20.

*Key words and phrases.* Lipschitz (Hölder) functions, best approximation, modulus of smoothness, Fourier series, semigroup of operators, homogeneous Banach spaces.

Se conoce que los polinomios trigonométricos son densos en $X_{2\pi}$ ([7], [10], [22]). Luego, si para $f \in X_{2\pi}$ y un entero no negativo $n$ definimos

$$E_n(f) := \inf_{g \in \mathcal{T}_n} \|f - g\|_{X_{2\pi}},$$

se tiene que $E_n(f) \longrightarrow 0$, según $n \longrightarrow \infty$. Al número $E_n(f)$ se le conoce como la mejor aproximación de $f$ de orden $n$.

**Teorema 1** ([7], [19]). *Si $f \in X_{2\pi}$ y $n$ es un entero no negativo, existe un único polinomio $T_n \in \mathcal{T}_n$, tal que $E_n(f) = \|f - T_n\|_{X_{2\pi}}$.*

Al polinomio dado en el teorema anterior se le denomina el polinomio de la mejor aproximación. Su existencia se deriva del hecho que los espacios $\mathcal{T}_n$ son finito dimensionales. Cuando $1 < p < \infty$, la unicidad se obtiene de la estructura estrictamente convexa de los espacios $L^p_{2\pi}$; para verificar la unicidad en $C_{2\pi}$ se utiliza el teorema de alternación de Chebyshev ([8]). En $L^1_{2\pi}$, se requiere de un trabajo más complicado (ver, por ejemplo, el Teorema 1.8 en [19]).

Desafortunadamente no existe una forma simple de obtener el polinomio de la mejor aproximación. Sólo en el caso $X_{2\pi} = L^2_{2\pi}$, debido a su estructura de espacio de Hilbert, se sabe que el polinomio coincide con la suma parcial de Fourier de orden $n$, según precisaremos más adelante. El problema general es cómo construir polinomios trigonométricos asociados a una función que resulten una buena aproximación; aunque no sean necesariamente la mejor. Muchos de los métodos relacionados con la aproximación de funciones periódicas están vinculados con las series de Fourier.

Recordemos que, para $f \in L^1_{2\pi}$ y $g \in L^p_{2\pi}$ se define la convolución de $f$ con $g$ mediante la expresión

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x - y)\, dy$$

y los coeficientes de Fourier de $f$ mediante las fórmulas

$$a_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

y

$$b_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Dado un entero positivo $n$, se definen las sumas parciales de orden $n$ de la serie de Fourier de la función $f$ como

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \operatorname{sen} kx) = (f * D_n)(x),$$

donde

$$D_n(x) := \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x/2}{2 \operatorname{sen}(x/2)}.$$

La función $D_n(x)$ se conoce como el núcleo de Dirichlet ([7], [10], [11], [22]).

Un problema clásico en la teoría de las series de Fourier es el análisis de la convergencia. Esto es, si $f \in X_{2\pi}$ ¿es cierto que $\|S_n(f) - f\|_{X_{2\pi}} \longrightarrow 0$? Se conoce que si $X_{2\pi} = L^p_{2\pi}$, con $1 < p < \infty$, la respuesta es afirmativa (ver [10], [22]). Para $X_{2\pi} = L^1_{2\pi}$ y $X_{2\pi} = C_{2\pi}$, la respuesta es negativa (ver [10], [22]). Este último hecho determina la búsqueda de condiciones suficientes que impliquen la convergencia de la series de Fourier en estos espacios, así como indagar sobre otros métodos de sumación que permitan recuperar las funciones a partir de sus series.

**Teorema 2** ([19]). *Si $f \in C_{2\pi}$ y $n$ es un entero, $n > 1$, entonces*

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leq \left(4 + \frac{2}{\pi}\log n\right) E_n(f).$$

Luego una condición suficiente para la convergencia de la serie de Fourier viene dada por $\lim E_n(f)\log n = 0$. Veamos que las funciones de Lipschitz satisfacen esta condición.

A cada $f \in C_{2\pi}$ se le asocia su módulo de continuidad definido para $t > 0$ como

$$\omega(f,t) := \sup_{0<h\leq t}\ \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x+h) - f(x)|.$$

A cada $\alpha \in (0,1]$, se le asocia un espacio $\mathrm{Lip}^\alpha_{2\pi}$ de funciones de Lipschitz del modo siguiente: $f \in \mathrm{Lip}^\alpha_{2\pi}$ si y sólo si

$$\theta_\alpha(f) := \sup_{0<t\leq 2\pi} \frac{\omega(f,t)}{t^\alpha} < \infty.$$

Estos espacios devienen en un espacio de Banach si consideramos la norma

$$\|f\|_\alpha := \|f\|_\infty + \theta_\alpha(f).$$

Un resultado clásico de la teoría de la aproximación, debido a Jackson (ver el Teorema 7 más adelante), asegura que existe una constante positiva $C$ tal que, para cada $f \in C_{2\pi}$,

$$E_n(f) \leq C\omega(f, 1/n). \tag{1}$$

Así que si $f \in \mathrm{Lip}^\alpha_{2\pi}$, resulta que $E_n(f) \leq Cn^{-\alpha}$ y, utilizando el Teorema 2 obtenemos como un corolario la convergencia uniforme de las series de Fourier para las funciones de Lipschtiz.

Estos resultados explican en parte el interés matemático en el estudio de la funciones de Lipschitz. Otras motivaciones vienen del estudio de las ecuaciones integrales singulares y de las ecuaciones diferenciales.

En la segunda sección de este trabajo expondremos brevemente algunos resultados generales relacionados con las funciones de Lipschitz en los espacios $X_{2\pi}$. En la tercera sección consideraremos problemas de aproximación en normas de Lipschitz.

Para finalizar esta introducción presentamos la definición del módulo de continuidad en los espacios $L^p_{2\pi}$. Si $f \in L^p_{2\pi}$ se define, para $t > 0$,

$$\omega(f,t) := \sup_{0<h\leq t} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Las clases de Lipschitz $\mathrm{Lip}_{2\pi}^{p,\alpha}$ de los espacios $L_{2\pi}^{p}$ se definen de manera análoga al espacio $C_{2\pi}$. En el resto del trabajo $\mathrm{Lip}_{\alpha}(X_{2\pi})$ denota al espacio de Lipschitz de orden $\alpha$ correspondiente a $X_{2\pi}$.

## 2. Aproximación en los espacios $X_{2\pi}$

En la teoría de las series de Fourier, la información sobre las funciones es desplazada a los coeficientes de Fourier. Según un teorema conocido de Riemann, extendido por Lebesgue, la sucesión de los coeficientes de Fourier de una función de $L_{2\pi}^{1}$ converge a cero. En algunos casos se conocen estimados de la velocidad de convergencia de las sucesiones:

**Teorema 3** (Lebesgue, [22])**.** *Si $f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}(X_{2\pi})$, existe una constante $C(f)$ tal que*

$$|a_k(f)| + |b_k(f)| \leq \frac{C(f)}{n^{\alpha}}. \tag{2}$$

Este resultado motiva la pregunta siguiente. Si para $f \in X_{2\pi}$ se cumple una desigualdad como la anterior ¿es cierto que $f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}(X_{2\pi})$? Hasta donde los autores conocen, este es un problema abierto, con la excepción del caso $X_{2\pi} = L_{2\pi}^{2}$. Esto es, dada $f \in L_{2\pi}^{2}$, se tiene que $f \in L_{\alpha}(L_{2\pi}^{2})$ si y sólo si se cumple (2).

Los espacios de funciones de Lipschitz suelen utilizarse para medir la efectividad de la aproximación de funciones mediante polinomios trigonométricos. Una de las maneras más simples de construir procesos aproximativos es utilizando la convolución con una sucesión fija de operadores sometidos a ciertas restricciones. Según indicamos anteriormente, las sumas parciales de las series de Fourier se obtienen mediante la convolución con el núcleo de Dirichlet. Luego no cualesquiera convoluciones servirán para estos propósitos.

**Teorema 4** ([7])**.** *Sea $(I_n) \subset L_{2\pi}^{1}$ una sucesión tal que:*

(i) *Para toda $n$,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_n(s)\, ds = 1. \tag{3}$$

(ii) *Existe $M$ tal que, para toda $n$,*

$$\|I_n\|_{L_{2\pi}^{1}} \leq M.$$

(iii) *Para cada $\delta \in (0,\pi)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta\leq|u|\leq\pi} |I_n(u)|\, du = 0.$$

*Entonces, cualquiera sea $f \in X_{2\pi}$ se tiene que*

$$\|f - (f * I_n)\|_{X_{2\pi}} \to 0.$$

A las sucesiones $(I_n)$ que satisfacen las hipótesis del teorema anterior se les denomina identidades (o unidades) aproximativas. Es claro que el núcleo de Dirichlet $(D_n)$ no define una unidad aproximativa. Es más, considerando a $(D_n)$ como endomorfismo de $L_{2\pi}^{1}$, se tiene el estimado:

**Teorema 5** ([7]).

$$\|D_n\| := \sup_{f\in L^1_{2\pi}:\|f\|_{L^1_{2\pi}}\le 1} \|f * D_n\|_{L^1_{2\pi}} = \frac{4}{\pi^2}\log n + O(1).$$

Entre las identidades aproximativas más utilizadas están:

(i) La de Fejér, definida por

$$F_n(x) := \frac{1}{n+1}\left[\frac{\operatorname{sen}((n+1)x/2)}{\operatorname{sen}(x/2)}\right]^2, \quad x \neq 2j\pi;$$

(ii) La de Jackson, dada por

$$J_n(x) = \frac{3}{n(2n^2+1)}\left[\frac{\operatorname{sen}(nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)}\right]^4, \quad x \neq 2j\pi$$

(iii) La de Fejér-Korovkin, definida por

$$K_n(x) := \frac{2\operatorname{sen}^2(\pi/(n+2))}{n+2}\left[\frac{\cos((n+2)x/2)}{\cos(\pi/(n+2)) - \cos x}\right]^2, \quad x \neq \pm\frac{\pi}{n+2} + 2j\pi.$$

Nótese que los núcleos anteriores son pares y positivos.

La condición relacionada con la acotación uniforme de la norma de los operadores asociados se reduce, dada la positividad de estos núcleos, a estudiar el comportamiento de las sucesiones de los coeficientes de Fourier $(a_0(I_n))$.

**Teorema 6** ([7]). *Si $(I_n)$ es una sucesión de núcleos pares y positivos que satisfacen* (3) *se tiene que existe una constante $C = C(X_{2\pi})$ de forma que, cualquiera sea $f \in X_{2\pi}$ y $n$ entero no negativo*

$$\|f - (f * I_n)\|_{X_{2\pi}} \le C\omega\left(f, \sqrt{1 - a_1(I_n)}\right).$$

Con esto se tiene no sólo la convergencia sino además un estimado de su velocidad. En efecto; en la tabla que sigue tenemos el cálculo de los $a_1(I_n)$ para los núcleos definidos anteriormente.

| Núcleo | Coeficiente |
|---|---|
| Fejér | $a_1(I_n) = 1 - \frac{1}{n+1}$ |
| Jackson | $a_1(I_n) = 1 - \frac{3}{2n^2+1}$ |
| Fejér-Korovkin | $a_1(I_n) = \cos\frac{\pi}{n+2}$ |

Utilizando el núcleo de Jackson (o el de Fejér-Korovkin) y el Teorema 6, obtenemos el conocido teorema de Jackson:

**Teorema 7.** *Para cada espacio $X_{2\pi}$, existe una constante $C = C(X_{2\pi})$ de forma que, para cada entero no negativo $n$ y cada $f \in X_{2\pi}$,*

$$E_n(f) \le C\omega\Big(f, \frac{1}{n}\Big).$$

Con los resultados precedentes en mano podemos estudiar otros procesos de aproximación mediante polinomios trigonométricos. Por ejemplo, consideremos algunos procesos de sumación de series trigonométricas de la manera siguiente.

Fijemos una matriz triangular $\mathcal{A} = (\rho_{n,k})$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y $k = 0, 1, \dots, n$. Asumamos que se satisfacen las condiciones siguientes: (i) $\rho_{0,0} = 1$; (ii) cualesquiera sean $n$ y $k$ fijo, tales que $0 \leq k \leq n$, se tiene que $0 < \rho_{n,k+1} \leq \rho_{n,k}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{n,k} = 1.$$

Se define en $X_{2\pi}$ el método de sumación asociado a $\mathcal{A}$ mediante la fórmula

$$A_n(f,x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_{n,k} \left(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\operatorname{sen}(kx)\right).$$

Con diferentes matrices apropiadas se puede lograr la convergencia de $A_n(f)$ a $f$ en los espacios $X_{2\pi}$. En particular, cuando

$$\rho_{n,k} = \frac{n+1-k}{n+1},$$

$A_n(f)$ coincide con las medias de Cesàro definidas por

$$\sigma_n(f,x) := \frac{1}{n+1}\left(S_0(f,x) + S_1(f,x) + \cdots + S_n(f,x)\right),$$

las que, a su vez, coinciden con la convolución de $f$ con el núcleo de Fejér.

El análisis de la exactitud de los estimados relacionados con un cierto proceso de aproximación, se puede realizar estudiando su comportamiento en las clases de las funciones de Lipscthiz. En general esto se hace mediante la búsqueda de algún teorema de tipo inverso. En efecto, de un teorema inverso debido a Bernstein y del Teorema de Jackson, se tiene que:

**Teorema 8** ([7], [8])**.** *Para $f \in X_{2\pi}$ y $\alpha \in (0,1)$,*

$$f \in \mathrm{Lip}_\alpha(X_{2\pi}) \qquad \textit{si y sólo si} \qquad E_n(f) \leq \frac{C(f)}{n^\alpha}.$$

En particular se infiere de este resultado que el estimado de Jackson no puede ser mejorado (en cuanto a la velocidad de convergencia).

Existen funciones $f \in C_{2\pi}$ tales que $E_n(f) \leq C(f)/n$ y $f \notin \mathrm{Lip}^1(X_{2\pi})$. Para caracterizar a estas funciones debemos utilizar algunas ideas de Zygmund. Dado $\alpha \in (0,1]$, diremos que $f \in \mathrm{Lip}_*^\alpha(X_{2\pi})$ si existe una constante $M$ tal que, cualesquiera sean $x, h \in \mathbb{R}$,

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq M|h|^\alpha.$$

**Teorema 9** ([21])**.** *Para $f \in C_{2\pi}$ se tiene que*

$$f \in \mathrm{Lip}_*^1(C_{2\pi}) \quad \textit{si y sólo si} \qquad E_n(f) \leq \frac{C(f)}{n}.$$

Se pueden caracterizar las funciones $f \in X_{2\pi}$, para las cuales existe la derivada $r$-ésima y $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}^\alpha(X_{2\pi})$. Igualmente introducir los espacios $\mathrm{Lip}^\alpha(X_{2\pi})$ y $\mathrm{Lip}_*^\alpha(X_{2\pi})$, con $\alpha \geq 1$. Para tales estudios se necesita introducir módulos de continuidad de orden superior [6]. También en esta referencia, el lector puede consultar otros resultados relacionados con identidades aproximativas y sumación de series de Fourier. Por otro lado, en los trabajos de J. Prestin [15], [16], [17] y [18], el lector puede encontrar caracterizaciones de diversas clases de funciones de Lipschitz.

## 3. Espacios homogéneos

El estudio de la convergencia de las series de Fourier en diversos espacios se puede unificar mediante la introducción de los llamados espacios homogéneos.

Necesitamos una nueva notación: si $f$ es una función $2\pi$-periódica y $t \in \mathbb{R}$, denotemos $f_t(x) := f(x-t)$ (atendiendo al contexto, no debe confundirse la notación con el elemento $f_n$ de la sucesión $(f_n)$). Se dice que un subespacio $B$ de $L^1_{2\pi}$ provisto con una norma $\|\cdot\|_B$ es un espacio homogéneo si: (i) $B$ es un espacio de Banach; (ii) existe una constante positiva $C$ tal que, cualquiera sea $f \in B$, $\|f\|_{L^1_{2\pi}} \leq C\|f\|_B$; (iii) $B$ contiene los polinomios trigonométricos; (iv) cualesquiera sean $f \in B$ y $t \in \mathbb{R}$, $\|f_t\|_B = \|f\|_B$; (v) cualquiera sea $f \in B$, la función $L(f,\cdot) : \mathbb{R} \to B$, definida por $L(f,t)(x) = f_t(x)$, es continua.

Las ideas primarias sobre los espacios homogéneos están en un artículo de Plessner [14]. A partir de ellas surgen trabajos de Bochner [1], Shilov [20], entre otros.

**Teorema 10** ([10], [11]). *Si $B$ es un espacio homogéneo, entonces las medias de Cesàro de cada función $f \in B$ convergen a $f$ en la norma de $B$. En particular, los polinomios trigonométricos son densos en $B$.*

En realidad, conociendo la relación entre las sumas de Cesàro y el núcleo de Fejér, este teorema es un caso particular del siguiente:

**Teorema 11** ([10], [11]). *Si $B$ es un espacio homogéneo e $(I_n)$ es una unidad aproximativa se tiene que, cualquiera sea $f \in B$,*

$$\|K_n * f - f\|_B \longrightarrow 0.$$

Es fácil verificar que los espacios $X_{2\pi}$ son homogéneos. También lo son lo son los espacios $C^{(k)}_{2\pi}$ con la norma

$$\|f\| := \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_\infty$$

y otros muchos. Sin embargo, los espacios $\mathrm{Lip}^\alpha(X_{2\pi})$ no son espacios homogéneos, pues no se cumple la condición (v) de la definición anterior. A pesar de ello uno puede considerar espacios homogéneos de funciones de Lipschitz si nos limitamos a ciertos subespacios. Por ejemplo, para $\alpha \in (0,1)$ sea

$$\mathrm{lip}^\alpha(X_{2\pi}) := \{f \in \mathrm{Lip}^\alpha(X_{2\pi}) : \ L(f,t) \ \text{ es continua}\}.$$

Para $\alpha \in (0,1)$, $\mathrm{lip}^\alpha(X_{2\pi})$ es un espacio homogéneo (ver [13]) y se tiene que

$$f \in \mathrm{lip}^\alpha(X_{2\pi}) \qquad \text{si y sólo si} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\omega(f,t)}{t^\alpha} = 0,$$

donde el módulo de continuidad es el correspondiente al denotado por $X_{2\pi}$. Además, por el Teorema 10, $\mathrm{lip}^\alpha(X_{2\pi})$ es la clausura de los polinomios trigonométricos en $\mathrm{lip}^\alpha(X_{2\pi})$.

Existen otras formas de obtener espacios homogéneos de funciones periódicas. Veamos un tratamiento debido a M. A. Jiménez (ver [9]).

Se trata de modificar la definición tradicional de los espacios $\mathrm{lip}^{\alpha}(X_{2\pi})$, para $1 \le p < \infty$. Consideremos en $\mathbb{R}$ la pseudométrica

$$\forall x, y \in [0, 2\pi), \forall j, k \in \mathbb{Z}, \quad d(x + 2j\pi, y + 2k\pi) = \min\{|x - y|, 2\pi - |x - y|\}.$$

Para $f \in L^p_{2\pi}$ , $\alpha > 0$ y $x, y \in \mathbb{R}$, definamos Lebesgue casi dondequiera

$$F_\alpha(x, y) := \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)^\alpha}; \qquad \text{si} \quad x \neq y.$$

Los espacios $B^\alpha_p$ están compuestos por aquellas funciones $f \in L^p_{2\pi}$ tales que $F_\alpha f \in L^p((2\pi)^2)$ y en $B^\alpha_p$ se considera la norma

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\|f\|^p_p + \|F_\alpha(f)\|^p_p\right)^{1/p}.$$

**Teorema 12** ([9])**.** *Para cada $1 \le p < \infty$ y $0 < \alpha \le 1$, $B^\alpha_p$ es un espacio homogéneo y el espacio clásico de Lipschitz* $\mathrm{Lip}^\alpha(L^p_{2\pi})$ *se sumerge continuamente en $B^\alpha_p$.*

En espacios como estos se puede aplicar el Teorema 11.

Terminamos esta sección indicando un resultado interesante relacionado con el espacio $B^\alpha_2$. A diferencia de los espacios $\mathrm{Lip}^\alpha(L^2_{2\pi})$, $B^\alpha_2$ se convierte en un espacio de Hilbert si consideramos el producto escalar

$$\langle f; g\rangle := \langle f; g\rangle_{L^2_{2\pi}} + \langle F_\alpha f; F_\alpha g\rangle_{L^2_{(2\pi)^2}}.$$

Aún más, el sistema clásico de las funciones trigonométricas constituye una base ortogonal en este espacio. Se infiere entonces que las funciones en $B^\alpha_2$ tienen formalmente el mismo desarrollo en serie de Fourier que en $L^2_{2\pi}$. En particular, dada $f \in B^\alpha_2$ y un entero no negativo $n$, la mejor aproximación trigonométrica de $f$ se alcanza justamente en el polinomio que realiza la mejor aproximación en la norma original, esto es, en la norma $\|\cdot\|_{L^2_{2\pi}}$.

## 4. Aproximación en norma de Lipschitz

En la sección anterior presentamos un resultado cualitativo relacionado con la aproximación de funciones en las clases $\mathrm{lip}^\alpha(X_{2\pi})$. Veamos algunos resultados cuantitativos. Necesitamos algunos notaciones preliminares.

Si $f \in X_{2\pi}$, $\alpha \in (0, 1)$, para cada $t > 0$ sea

$$\theta_\alpha(f, t) := \sup_{0<s\le t} \frac{\omega(f, s)}{s^\alpha}. \tag{4}$$

Se ha demostrado en varios trabajos ([2], [3] y [5]), que esta función es un módulo de continuidad adecuado para estudiar la aproximación en espacios de funciones de Lipschitz.

En particular, se sigue de los resultados presentados en [2], que los polinomios construidos a partir del núcleo de Jackson para obtener una buena aproximación en $X_{2\pi}$, también ofrecen una buena aproximación en las normas de los espacios $\mathrm{lip}^\alpha(X_{2\pi})$.

A partir del módulo de continuidad (4) se puede reiterar el proceso de definición de los espacios de Lipschitz para obtener nuevos espacios de Lipschitz con condiciones más fuertes. Por ejemplo, si $\alpha \in (0,1)$ y $\beta \in (0,\alpha)$ se consideran el espacio $\mathrm{lip}^{\alpha,\beta}(X_{2\pi})$ de las funciones $f \in \mathrm{lip}^{\alpha}(X_{2\pi})$ para las cuales

$$\lim_{t\to 0} \frac{\theta_\alpha(f,t)}{t^\beta} = 0.$$

Con la norma

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \|f\|_{X_{2\pi}} + \theta_\alpha(f) + \sup_{0<t\leq 2\pi} \frac{\theta_\alpha(f,t)}{t^\beta}.$$

Se obtiene un espacio homogéneo de Banach. Según [2] se sabe que, si denotamos por $E_{n,\alpha}(f)$ a la mejor aproximación de $f$ en la norma de $\mathrm{Lip}^{\alpha}(X_{2\pi})$ mediante polinomios trigonométricos, se tiene que

$$E_{n,\alpha}(f) \leq \frac{C(f)}{n^\beta} \qquad \text{si y sólo si} \qquad \theta_\alpha\Big(f,\frac{1}{n}\Big) \leq \frac{D(f)}{n^\beta}.$$

Una última observación referente a las sumas de las series de Fourier que se expresen a través de la convolución con una unidad aproximativa $(I_n)$, como en el caso de las suma de Cesàro.

Si $f \in \mathrm{lip}^{\alpha}(C_{2\pi})$, entonces el módulo de continuidad (4), del producto de convolución de $f$ con $I_n$, se acota de la manera siguiente

$$|(I_n * f)(x+t) - (I_n * f)(x)| \leq M\|f_t - f\|_\infty,$$

donde $M = \sup \|I_n\|_{L^1_{2\pi}}$.

Luego,

$$\sup_n \theta_\alpha(I_n * f, t) \leq M\theta_\alpha(f,t) \quad \longrightarrow 0 \quad (t \to 0).$$

Se dice entonces que la sucesión es equilipschitziana y se deduce también por esta vía, un resultado válido incluso en contextos más generales, la convergencia de $I_n * f$ a $f$ (ver [4]). Por otra parte, esta aproximación se puede igualmente cuantificar utilizando el estimado establecido en [12].

## Referencias

[1] S. Bochner, Additive set functions on groups, *Ann. of Math.* **40** (1939), 769–799.

[2] J. Bustamante y M. A. Jiménez, The degree of best approximation in the Lipschitz norm by trigonometric polynomials, *Aportaciones Matemáticas* **25** (1999), 23–30.

[3] J. Bustamante y M. A. Jiménez, Fourier series and convergence in Lipschitz norms, *Aportaciones Matemáticas* **25** (1999), 147–151.

[4] J. Bustamante y M. A. Jiménez, Chebyshev and Hölder approximation, *Aportaciones Matemáticas* **27** (2000), 23–31.

[5] J. Bustamante, D. Mocencahua y Carlos A. López, Smoothness of the remainder and Hölder norms, *Aportaciones Matemáticas* **27** (2000), 33–45.

[6] P. L Butzer y H. Berens, *Semi-groups of operators and approximation*, Springer-Verlag, Nueva York-Berlín, 1967.

[7] P. L. Butzer y R. J. Nessel, *Fourier analysis and approximation theory, Vol. 1: One-dimensional theory*, Acad. Press, Nueva York y Londres, 1971.

[8] E. W. Cheney, *Introduction to approximation theory*, McGraw-Hill, Nueva York, 1966.

[9] M. A. Jiménez, A new approach to Lipschitz spaces of periodic integrable functions, *Aportaciones Matemáticas* **25** (1999), 153–157.

[10] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Wiley & Sons, 1968.
[11] R. Lasser, *Introduction to Fourier Series*, Pure and Applied Math., M. Dekker, Nueva York-Basel-Hong Kong, 1996.
[12] L. Leindler, A. Meir y V. Totik, On approximation of continuous functions in Lipschitz norms, *Acta Math. Hung.* **45** (1985), 411–443.
[13] H. Mirkil, Continuous translation of Hölder and Lipschitz functions, *Can. J. Math.* **12** (1960), 674–685.
[14] A. Plessner, Eine Kennzeichnung der totalstetig Funktionen, *J. Reine Angew. Math.* **160** (1929), 26–32.
[15] J. Prestin, Best approximation in Lipschitz space, *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai* **49** (1985), 753–759.
[16] J. Prestin, On the approximation by de la Valleé Poussin sums and interpolatory polynomials in Lipschitz norms, *Analysis Math.* **13** (1987), 251–259.
[17] J. Prestin, Trigonometric interpolation in Hölder spaces, *J. Approx. Theory* **53** (1988), 145–154.
[18] J. Prestin, Approximation in Hölder norms with higher order differences, *Rostock Math. Kolloq.* **51** (1997), 33–50.
[19] T. H. Rivlin, *An introduction to the approximation theory*, Dover, Nueva York, 1969.
[20] G. E. Shilov, Homogeneous rings of functions (en ruso), *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)* **6** (1951), no. 1 (41), 91–137. Traducción al inglés: *Amer. Math. Soc. Translation* **1953** (1953), no. 92.
[21] A. Zygmund, Smooth functions, *Duke Math. J.* **12** (1945), 47–76.
[22] A. Zygmund, *Trigonometics series*, Dover, Nueva York, 1955.

Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-27, Colonia San Manuel, Puebla, 72571, Pue., México

*Correo electrónico*: `jbusta@fcfm.buap.mx, mjimenez@fcfm.buap.mx`