Investigación

# Representaciones hipergeométricas de la función zeta de Hurwitz

# Hypergeometric representations of the Hurwitz zeta function

Anier Soria Lorente, Eduardo Renato Moreno Roque y Raúl Recio Avilés

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen V, Número 2, pp. 109–114, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Abr'15; Aceptación: 20 Ago'15

15 de enero de 2014

**Resumen**

En este artículo se presentan nuevas formas de representar la función zeta de Hurwitz en series hipergeométricas ordinarias.

**Palabras Clave:** Función zeta de Hurwitz, función zeta generalizada, símbolo de Pochhammer, serie hipergeométrica ordinaria.

**Abstract**

In this paper new manners of representing the Hurwitz zeta function in ordinary hypergeometric series is presented.

**Keywords:** Hurwitz zeta function, generalized Zeta function, Pochhammer symbol, ordinary hypergeometric series.

## 1. Introducción

Aunque no esté definido con exactitud el término "Funciones Especiales", no obstante, al mencionarlo, se hace referencia a un conjunto de funciones que aparecen con frecuencia en diversos problemas prácticos y teóricos, y que, debido a ello, poseen un nombre propio. Actualmente, el número de elementos integrantes de este conjunto es muy grande, de hecho, hoy en día se hace referencia a más de un millar de funciones especiales, sobre las que existe una abundante literatura y sus propiedades se pueden encontrar en numerosas recopilaciones y monografías [1, 2, 4, 6, 8, 10, 13].

Dada su gran diversidad, resulta atractivo disponer, para su estudio, de criterios de unificación que permitan agruparlas en clases más amplias con alguna característica común. Naturalmente, esta característica debe elegirse de forma que, en base a ella, sea posible desarrollar procedimientos generales para la obtención de sus propiedades, sin necesidad de tratar cada función individualmente. Desde luego, se pueden considerar criterios de unificación muy diversos que, en muchos casos, tengan carácter parcial en el sentido de que resultan útiles para obtener cierto tipo de propiedades, y no otras. A título de ejemplo se puede citar el carácter hipergeométrico generalizado de las funciones, entendiendo por tal el hecho de que la función admita una representación del estilo

$$ {}_rF_s\left(\left.\begin{array}{c} a_1,\dots,a_r \\ \\ b_1,\dots,b_s \end{array}\right| z\right) \equiv \sum_{k\geq 0} \frac{(a_1)_k\cdots(a_r)_k}{(b_1)_k\cdots(b_s)_k}\frac{z^k}{k!}, \tag{1}$$

siendo

$$\begin{aligned} (z)_k &\equiv \prod_{0\leq j\leq k-1}(z+j)\,, \quad k\geq 1, \\ (z)_0 &= 1, \quad (1)_k = k!, \end{aligned}$$

el símbolo de Pochhammer $(\cdot)_k$ [1, 3, 11, 12], también llamado en inglés “shifted factorial”. Además, en (1), $\{a_i\}_{i=1}^r$ y $\{b_j\}_{j=1}^s$ son números complejos sujetos a la condición que $b_j \neq -n$ con $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ para $j = 1,2,\dots,s$.

Se sabe que las funciones hipergeométricas aparecen formalmente en el trabajo pionero de C. F. Gauss [5], a inicios del siglo XIX, aunque algunos aspectos particulares ya eran conocidos anteriormente; L. Euler en su Institutiones calculi integralis (1768) ya utilizaba la ecuación hipergeométrica y el método de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias por medio de series de potencias, y los que hoy se conocen como polinomios de Legendre habían aparecido ya en conexión con problemas de mecánica newtoniana. Desde entonces las funciones hipergeométricas han sido objeto de amplio estudio tanto desde el punto de vista puramente matemático [3, 8, 13] como por el interés que revisten en las aplicaciones.

Como es conocido, Komano en [7] introdujo la siguiente función múltiple de zeta

$$\zeta_r(\vec{s},\alpha) \equiv \sum_{\substack{k_n>\cdots>k_1>0 \\ k_j\in\mathbb{Z}^+,\,1\leq j\leq r}} \prod_{1\leq j\leq r}\left(k_j+\alpha\right)^{-s_j},$$

donde, $\vec{s} = (s_1,\dots,s_r) \in \mathbb{C}^r$ y $\alpha > 0$, la cual para el caso especial $r = 1$ se reduce a la función zeta de Hurwitz o función zeta generalizada [9, 13], dada mediante

$$\zeta(s,\alpha) \equiv \sum_{n\geq 0}(n+\alpha)^{-s}, \quad 0<\alpha\leq 1,\ \mathrm{Re}\, s>1. \tag{2}$$

Además, para $s \in \mathbb{Z}^+$ con $s > 1$, la función (2) se puede representar de las siguientes maneras

$$\begin{aligned} \zeta(s,\alpha) &= \alpha^{-s}\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n^s}{(\alpha+1)_n^s} = \alpha^{-s}{}_{s+1}F_s\left(\left.\begin{array}{c} 1,\alpha,\dots,\alpha \\ \\ \alpha+1,\dots,\alpha+1 \end{array}\right| 1\right) \qquad (3) \\ &= \alpha^{-s}\sum_{n\geq 0}\overbrace{{}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c} -n,1 \\ \\ \alpha+1 \end{array}\right| 1\right)\cdots{}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c} -n,1 \\ \\ \alpha+1 \end{array}\right| 1\right)}^{s\text{-veces}}, \qquad (4) \end{aligned}$$

Obsérvese que, la igualdad (4) se justifica a partir de la identidad de Chu-Vandermonde [4, 8], la cual aparece a menudo en la práctica, y la misma viene dada mediante

$${}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c} -n,b \\ \\ c \end{array}\right| 1\right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}, \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{5}$$

Nótese además que, teniendo en cuenta que la serie ${}_{s+1}F_s$ es llamada $k$-balanceada si

$$\sum_{1\le j\le s}\left(b_j-a_j\right)-a_{s+1}=k,$$

entonces, a partir (3) se deduce que $\zeta\left(s,\alpha\right)$ es el producto de $\alpha^{-s}$ por una serie hipergeométrica ordinaria ${}_{s+1}F_s$, $(s-1)$-balanceada.

En la sección, que a continuación se presenta, se darán los resultados fundamentales de esté artículo, relacionados con nuevas representaciones de la función zeta de Hurwitz (2) en series hipergeométricas ordinarias.

## 2. Resultados Fundamentales

Para mayor brevedad, denótese

$$\overbrace{{}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c}-n,1\\ \alpha+1\end{array}\right|1\right)\cdots{}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c}-n,1\\ \alpha+1\end{array}\right|1\right)}^{s\text{-veces}},$$

por

$${}_2F_1^s\left(\left.\begin{array}{c}-n,1\\ \alpha+1\end{array}\right|1\right).$$

A continuación se presentará el resultado principal, dado mediante el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** *Sea $s$ un número entero, con $s>1$ y $0<\alpha\le 1$. Entonces la función zeta de Hurwitz* (2) *admite las siguientes representaciones*

*i.)*

$$\zeta\left(s,\alpha\right)=\left(n+\alpha\right)^{-s}{}_{s+1}F_s\left(\left.\begin{array}{c}1,n+\alpha,\ldots,n+\alpha\\ n+\alpha+1,\ldots,n+\alpha+1\end{array}\right|1\right)+\sum_{0\le k\le n-1}{}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c}-k,1\\ \alpha+1\end{array}\right|1\right),\quad n\in\mathbb{N},\tag{6}$$

*ii.)*

$$\zeta\left(s,2^{-1}\alpha\right)=\left(2^{-1}\alpha+2^{-1}\right)^{-s}{}_{s+1}F_s\left(\left.\begin{array}{c}1,2^{-1}\alpha+2^{-1},\ldots,2^{-1}\alpha+2^{-1}\\ 2^{-1}\alpha+3/2,\ldots,2^{-1}\alpha+3/2\end{array}\right|1\right)+\left(2\alpha^{-1}\right)^{s}{}_{s+1}F_s\left(\left.\begin{array}{c}1,\alpha,\ldots,\alpha\\ \alpha+1,\ldots,\alpha+1\end{array}\right|-1\right),\tag{7}$$

*iii.)*

$$\zeta\left(s,\alpha\right)=\alpha^{-s}\sum_{k\ge0}\left(-1\right)^k{}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c}-k,\alpha\\ \alpha+1\end{array}\right|1\right){}_2F_1^{s-1}\left(\left.\begin{array}{c}-k,1\\ \alpha+1\end{array}\right|1\right)\times{}_sF_{s-1}\left(\left.\begin{array}{c}k+1,k+\alpha,\ldots,k+\alpha\\ k+\alpha+1,\ldots,k+\alpha+1\end{array}\right|1\right),\tag{8}$$

*iv.)*

$$\zeta(s,\alpha) = \alpha^{-s}{}_sF_{s-1}\left(\begin{array}{c|c} 1,\alpha,\ldots,\alpha & \\ & 1 \\ \alpha+1,\ldots,\alpha+1 & \end{array}\right) - \alpha^{-1}(\alpha+1)^{-s}\;{}_{s+1}F_s\left(\begin{array}{c|c} 2,\alpha+1,\ldots,\alpha+1 & \\ & 1 \\ \alpha+2,\ldots,\alpha+2 & \end{array}\right). \quad (9)$$

*Demostración.* En efecto, obsérvese que a partir de (2) se deduce fácilmente

$$\zeta(s,\alpha) = \zeta(s,n+\alpha) + \sum_{0\le k\le n-1}(k+\alpha)^{-s}, \quad n\in\mathbb{N},$$

y

$$\zeta\left(s,2^{-1}\alpha\right) = \zeta\left(s,2^{-1}\alpha+2^{-1}\right) + 2^s\sum_{n\ge 0}(-1)^n(n+\alpha)^{-s}.$$

Luego, teniendo en cuenta lo visto anteriormente, se consiguen los resultados correspondientes a (6) y (7) respectivamente.

A continuación, haciendo uso de la identidad de Chu-Vandermonde (5) y la propiedad $(-n)_k = 0$ cuando $k > n$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha)_n}{(\alpha+1)_n} &= {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} -n,1 & \\ & 1 \\ \alpha+1 & \end{array}\right) \\ &= \sum_{k\ge 0}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} = \sum_{0\le k\le n}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}. \end{aligned}$$

Como consecuencia se llega

$$\zeta(s,\alpha) = \alpha^{-s}\sum_{n\ge 0}\frac{(\alpha)_n^{s-1}}{(\alpha+1)_n^{s-1}}\sum_{0\le k\le n}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}.$$

Luego, debido a que

$$(-n)_k = (-1)^k\frac{(1)_n}{(1)_{n-k}}, \quad k\le n.$$

Entonces como resultado se obtiene

$$\begin{aligned} \zeta(s,\alpha) &= \alpha^{-s}\sum_{k\ge 0}\sum_{n\ge k}\frac{(-1)^k(1)_n(\alpha)_n^{s-1}}{(\alpha+1)_n^{s-1}(\alpha+1)_k(1)_{n-k}} \\ &= \alpha^{-s}\sum_{k\ge 0}\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^k(1)_{n+k}(\alpha)_{n+k}^{s-1}}{(\alpha+1)_{n+k}^{s-1}(\alpha+1)_k(1)_n}. \end{aligned}$$

Y haciendo uso de la propiedad

$$(z)_{n+k} = (z)_k(z+k)_n, \quad (10)$$

se deduce lo siguiente

$$\zeta(s,\alpha) = \alpha^{-s}\sum_{k\ge 0}(-1)^k\frac{(1)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{(\alpha)_k^{s-1}}{(\alpha+1)_k^{s-1}}\sum_{n\ge 0}\frac{(k+1)_n(k+\alpha)_n^{s-1}}{(k+\alpha+1)_n^{s-1}}\frac{1^n}{n!},$$

lo cual coincide con (8). Para probar el segundo apartado, se debe tener en cuenta la siguiente relación de recurrencia

$$(\alpha)_n = \alpha^{-1}\left[(\alpha)_{n+1} - n\,(\alpha)_n\right].$$

A partir de la cual se infiere lo siguiente

$$\zeta(s,\alpha) = \alpha^{-s-1}\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_{n+1}(\alpha)_n^{s-1}}{(\alpha+1)_n^s} - \alpha^{-s-1}\sum_{n\geq 0}\frac{n\,(\alpha)_n^s}{(\alpha+1)_n^s}. \tag{11}$$

Obsérvese además, que utilizando (10) se deduce

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_{n+1}(\alpha)_n^{s-1}}{(\alpha+1)_n^s} &= \alpha\sum_{n\geq 0}\frac{(1)_n(\alpha)_n^{s-1}}{(\alpha+1)_n^{s-1}}\frac{1^n}{n!}\\ &= \alpha\,{}_sF_{s-1}\left(\left.\begin{array}{c}1,\alpha,\ldots,\alpha\\ \\ \alpha+1,\ldots,\alpha+1\end{array}\right| 1\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Así como

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{n\,(\alpha)_n^s}{(\alpha+1)_n^s} &= \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(\alpha)_{n+1}^s}{(\alpha+1)_{n+1}^s}\\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^s\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(\alpha+1)_n^s}{(\alpha+2)_n^s}\\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^s\sum_{n\geq 0}\frac{(2)_n(\alpha+1)_n^s}{(\alpha+2)_n^s}\frac{1^n}{n!}\\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^s{}_{s+1}F_s\left(\left.\begin{array}{c}2,\alpha+1,\ldots,\alpha+1\\ \\ \alpha+2,\ldots,\alpha+2\end{array}\right| 1\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Por consiguiente, a partir de (11)-(13) se consigue el resultado deseado correspondiente a (9). Obsérvese además, que la expresión (9) se representa mediante la combinación de dos series hipergeométricas $s-2$ y $s-1$-balanceadas, respectivamente. □

**Agradecimientos:** Los autores expresan sus más sinceros agradecimientos a los árbitros por sus valoradas sugerencias. Agradecemos además, al proyecto ClaveMat, financiado por la unión Europea, www.clavemat.com.

## Referencias

[1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A., *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, New York, 1972.

[2] ANDREWS, G., ASKEY, R. and ROY, R., *Special functions*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Plublished by the press syndicate of the university of Cambridge, ISBN 0 521 78988 5, 2000.

[3] ARVESÚ, J. and SORIA-LORENTE, A., *First order non-homogeneous q-difference equation for Stieltjes function characterizing q-orthogonal polynomials*, J. Differ. Equ. Appl., DOI:10.1080/10236198.2012.693484, 2011.

[4] GASPER, L. and RAHMAN, M., *Basic Hypergeometric Series,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[5] Gauss, C., F., *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, Comment. Götting, Vol. 2, pp. 123–162, 1876.

[6] Gil, A., Segura, J. and Temme, N., *Numerical methods for special functions,* Copyright by the Society for Indrustrial and Applied Mathematics, University City Science Center, Philadelphia, 2007.

[7] Kamano, K., *The multiple Hurwitz Zeta function and a generalization of Lerch's formula*, Tokyo J. Math., Vol. 29, pp. 61–73, 2006.

[8] Koekoek, R. and Swarttouw, R. F., *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Report 98-17, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, 1998.

[9] Kreminski, R., *Newton-Cotes integration for approximating Stieltjes (generalized Euler) constants*, Mathematics of computation, Vol. 72, Nº 243, pp. 1379–1397, 2002.

[10] Nikiforov, A. F., Uvarov, V. B., *Special Functions in Mathematical Physics*, Birkhauser Verlag, Basel, 1988.

[11] Petojevic, A., *New formulae for $K_i(z)$ function*, Novi Sad J. Math., Vol. 35, Nº 2, pp. 123–132, 2005.

[12] Soria-Lorente, A., *Arithmetic of the values of the Riemann's zeta function in integer arguments*, G.I.E, Pensamiento Matemático, accepted, 2013.

[13] Soria-Lorente, A., Cumbrera, R., *q-Hypergeometric representations of the q-analogue of zeta function*, Journal of Fractional Calculus and Applications, Vol. 5, Nº 2, pp. 1–8, 2014.

**Sobre los autores:**

*Nombre:* Anier Soria Lorente
*Correo electrónico:* asorial@udg.co.cu
*Institución:* Universidad de Granma, Bayamo, Cuba.

*Nombre:* Eduardo Renato Moreno Roque
*Correo electrónico:* emorenor@udg.co.cu
*Institución:* Universidad de Granma, Bayamo, Cuba.

*Nombre:* Raúl Recio Avilés
*Correo electrónico:* raquelsem@infomed.sld.cu
*Institución:* Universidad de Granma, Bayamo, Cuba.