

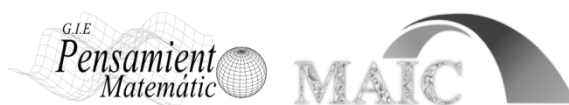
Críticas y Reseñas

Marea Matemática

Math Tide

Adela Salvador Alcaide, Raquel Caro Carretero y María Merino Doncel

Revista de Investigación



Volumen VI, Número 2, pp. 183–196, ISSN 2174-0410

Recepción: 10 May'16; Aceptación: 1 Jun'16

1 de octubre de 2016

Resumen

Un grupo de profesores de Matemáticas de secundaria y universidad está escribiendo unos libros para ESO y Bachillerato que están colgados en Internet. La intención es que dichos libros los pueda usar el alumnado de forma gratuita. En este artículo vamos a explicar cuáles son sus características, sus ventajas y las ideas metodológicas que subyacen. Hemos querido hacer unos libros de calidad escritos por profesorado con gran ilusión y amplia experiencia docente.

Palabras Clave: Libros de texto gratuitos, docencia de las matemáticas.

Abstract

A group of mathematics teachers of high school and college is writing some books for Secondary Education that are posted on the web. The intention is that these books can be used by the students for free. In this article we will explain what are their characteristics, advantages and the methodological ideas that are behind. We have wanted to make some quality books written by professors with great enthusiasm and extensive teaching experience.

Keywords: Free textbooks, teaching mathematics.

1. Introducción

Apuntes Marea Verde es un grupo de trabajo de profesores de la enseñanza pública que está elaborando materiales curriculares gratuitos. Apuntes Marea Verde es un espacio de coordinación de los distintos colectivos de la Educación Pública con la idea es trabajar de forma colaborativa para crear unos libros de texto que nosotros preferimos llamar "apuntes del profesor".

Nuestro trabajo está elaborado por profesores con experiencia en las aulas y por eso está muy bien adaptado a las características del alumnado de cada nivel y a los currículos oficiales.

Además tiene la ventaja de ser absolutamente gratuito. Dado que los currículos oficiales son establecidos por las administraciones educativas, puede haber cambios de unas comunidades autónomas a otras. Los libros aquí presentados están ajustados al currículo de la Comunidad Autónoma de Madrid.

Los documentos que se pueden descargar están en formato imprimible y editable. La licencia de Creative Commons elegida permite el uso y modificación del material siempre que no sea con fines comerciales, se cite la autoría y se mantenga el mismo tipo de licencia en las modificaciones de la obra. El grupo de trabajo está abierto a nuevos profesores colaboradores, con el objetivo de compartir información e intercambiar experiencias.

Porque la educación pertenece y es responsabilidad de toda la ciudadanía, porque la escuela de hoy es la sociedad del mañana, los participantes en esta plataforma insistimos en la necesidad de construir un nuevo modelo de Educación con la participación de toda la comunidad.

2. Libros de matemáticas gratuitos para los niveles de ESO y Bachillerato

Los libros los puedes ver y descargar en la web www.apuntesmareaverde.org.es y en LibrosMareaVerde.tk. Al ser digitales están actualizados para el curriculum actual, y si éste cambia, rápidamente se actualizan nuevamente los textos. En LibrosMareaVerde.tk están los libros completos y en www.apuntesmareaverde.org.es además se pueden descargar cada uno de los capítulos independientemente.

En la actualidad algunos institutos tienen en el aula pizarra digital o cañón proyector y ordenador. En dichos centros el profesorado puede utilizar los textos directamente en el aula, y el alumnado tomar apuntes en su cuaderno de clase y resolver allí los problemas, por lo que no sería necesario tener libros en papel. Ya sabemos que, para el medio ambiente, mejor que reciclar y reutilizar es no utilizar. En otros centros la mayoría del alumnado dispone de ordenadores en sus casas, por lo que el libro podría seguir usándose en formato digital. Pero, en la mayoría de los centros no ocurre ninguna de esas opciones, y pensando en ello cada texto tiene distintos formatos. De cada libro existe el:

“Libro completo” adecuado para usarlo de forma digital.

“Fotocopiable” en el que a la versión anterior se le han quitado ilustraciones y reducido el tamaño de la letra para abaratar costes si se quiere fotocopiar en papel.

“Curiosidades y Revista”, que recoge curiosidades, historia, pasatiempos...

“Materiales para el aula” que recoge otros materiales para trabajar en el aula, como materiales fotocopiables, o con vínculos a otras páginas web, presentaciones, vídeos, juegos...

“Ejercicios” con las actividades propuestas, los ejercicios y el resumen de cada uno de los capítulos, que aún puede abaratar más el coste de las posibles fotocopias.

“Libro en Valenciano”. El profesorado del Instituto Juan de Garay de Valencia está usando y traduciendo al valenciano los libros. Por ello también de cada capítulo y de cada libro completo (según se van terminando las traducciones) existe la versión en valenciano.

Los libros van dirigidos a la totalidad de los estudiantes y del profesorado. Con esto queremos decir que no pretender ser en exceso vanguardistas, para que tanto el profesorado clásico como el innovador puedan encontrarse cómodos utilizándolos.

Por otro lado se intenta que las actividades recojan la idea de las “Matemáticas Everywhere”, es decir la idea de que las aplicaciones de las Matemáticas se encuentran en todas partes.

En la web también aparece un libro sobre “Geogebra” con actividades informáticas para el aula, y que enseña a utilizar este software.

3. Libros completos

Los libros completos actuales recogen ya toda la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y todo el Bachillerato. Es decir, hay diez libros completos:

1º de ESO

2º de ESO

3º ESO A: Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas

3º ESO B: Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

4º ESO A: Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas

4º ESO B: Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

1º de Bachillerato de Ciencias: Matemáticas I. Ciencias y Tecnología

1º de Bachillerato de Sociales: Sociales I. Humanidades y Ciencias Sociales

2º de Bachillerato de Ciencias: Matemáticas II. Ciencias y Tecnología

2º de Bachillerato de Sociales: Sociales II. Humanidades y Ciencias Sociales

Todos estos libros tienen un formato similar.

Todos los capítulos comienzan con un índice y una breve introducción.

Teoría: Cada uno de los epígrafes consta del desarrollo teórico correspondiente, con ejemplos y actividades resueltas para facilitar la comprensión, y termina con las actividades propuestas.

Una o dos páginas, en ocasiones tres se dedican a “Curiosidades y revista” donde se incluye algo de historia, pasatiempos, algún problema de ingenio, alguna aplicación o curiosidad sobre lo que se esté estudiando.

En una única página (cuando es posible) se añade un “Resumen”.

Continúa con “Ejercicios y problemas”.

Termina con la “Autoevaluación”, que suele constar de 10 cuestiones con 4 opciones cada una para responder en forma de test.

Este esquema es un esquema clásico que permite, como antes dijimos, ser adecuado para todo el profesorado. Pero a su vez, dentro de las actividades se sugieren trabajos cooperativos,

manipulativos, trabajo en grupo, problemas de ingenio... que se pueden utilizar en otro tipo de enseñanza.

4. Actividades de “Matemáticas Everywhere”

Vamos a comentar a modo de ejemplo concreto, algunas de estas actividades que ayudan al alumnado a encontrar que las Matemáticas están en todas partes.

4.1. Análisis de tapacubos y llantas de aleación:

Análisis de tapacubos y llantas de aleación: Observa los siguientes tapacubos y llantas de aleación. Indica, para cada uno de ellos, las siguientes cuestiones:



- Tiene simetría central.
- Tiene ejes de simetría axial. ¿Cuántos?
- Tiene centro de giro, ¿cuál es el menor ángulo de giro que lo deja invariante?
- Sal a la calle y fotografía o dibuja los tapacubos que veas y te parezcan interesantes. Haz un estudio de ellos.

Como puede verse, para estudiar los grupos de autosimetría en el plano, hemos hecho fotografías de objetos concretos. Uno de los objetivos es que el alumnado cuando vea tapacubos ponga ojos matemáticos y, sin querer, piense: “Es un C5” es decir, determine si hay simetrías axiales y cuántas y si hay simetría central. En el apartado d) se sugiere “salir a la calle y mirar”. Esto nos parece importante desde el punto de vista metodológico. Es lo que antes comentábamos de un cambio en la metodología. Además de trabajar en el aula, proponer

trabajos más creativos, donde el alumnado *haga matemáticas*, investigue, busque... Igual que hemos indicado con los tapacubos se podría hacer con rejas, estudiando los distintos tipos de frisos, con mosaicos, con bordados y puntillas... Todas estas actividades están sugeridas en el capítulo de Movimientos de 3º de ESO. En dicho capítulo nos ha parecido muy importante añadir movimientos en el espacio. Vivimos en un espacio de dimensión tres y opinamos como Grace Chisholm Young que la geometría debería enseñarse en dimensión tres, mejor que en el plano. Añadir ejemplos de torres, edificios, objetos tridimensionales... para buscar sus planos de simetría, sus ejes de giro y vectores de traslación.

4.2. Fractales en el aula de Matemáticas

Puedes encontrarlos en el campo de la investigación médica, en las películas (por ejemplo, en las imágenes generadas por ordenador como montañas, ríos de lava, paisajes...), en el mundo de la comunicación inalámbrica y, por supuesto, en la naturaleza.

Es una “forma” de aspecto extraño e irregular, que se repite allá donde miremos y que en 1970, *Benoit Mandelbrot* denominó “fractal”, porque se podía conseguir fragmentando una forma suave una y otra vez con repeticiones interminables.

Un rasgo principal de un fractal es la autosimilitud, si te acercas o alejas tiene la misma apariencia, el patrón se repite a distintas escalas y dentro del mismo objeto. Un árbol, un helecho, las ramificaciones del corazón...

Las rectas, círculos y, en general, las formas geométricas perfectas de la matemática clásica, no podían explicar los patrones de la naturaleza. Fue la geometría fractal “quien” puso solución a este problema: buscar el orden dentro del caos, pasar de lo simple a lo complejo. Y aún estamos ante el pico del iceberg, ya que durante los próximos años tendrá aún mucho que enseñarnos.

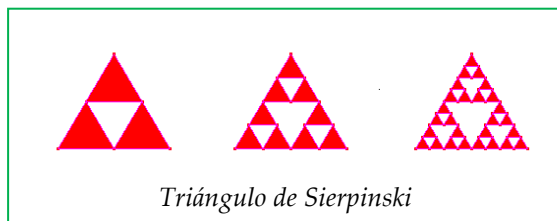
Vemos el *Conjunto de Cantor* (descrito por el matemático *Georg Cantor* en 1883), el *copo de Koch* (descrito por el matemático sueco *Helge von Koch* en 1904), el *Triángulo de Sierpinski* (descrito por el matemático *Waclaw Sierpinski* en 1919)... todos ellos como un ejemplo de los primeros estudios sobre autosimilitud.

Podemos utilizar los fractales en las clases de Matemáticas en numerosas ocasiones, por ejemplo, para estudiar las sucesiones.

Veamos un ejercicio de sucesiones del libro de 3º de ESO:

Ejercicio: Triángulo de Sierpinski:

Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina *Triángulo de Sierpinski*, y es un fractal.



Imagina que el primer triángulo tiene un área A . Cuando aplicamos la primera iteración, el área es $(3/4)A$. ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente?

Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es L . Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?

Observa cómo ya tenemos una primera idea intuitiva del límite de una sucesión. En el estudio de los límites, las proporciones, los números complejos... también podemos utilizar los fractales.

Mandelbrot, más tarde, descubrió el increíble potencial de los fractales, con el que ahora incluso se investigan enfermedades como el cáncer, se utiliza en las antenas y permite una comunicación de gran alcance con móviles pequeños.

La geometría fractal nos permite medir la rugosidad de las montañas y conocer su dimensión fractal, los árboles, los rayos, las nubes.... La dimensión fractal de las series temporales nos puede dar información sobre la posibilidad de extinción de especies.

El cuerpo humano contiene innumerables ejemplos de fractales, entender los sistemas circulatorio, respiratorio, renal... del cuerpo humano.

En definitiva, podemos ver en los fractales una poderosa "herramienta" que nos ayuda y ayudará en infinidad de aplicaciones y en las explicaciones de fenómenos de la vida real. Al fin y al cabo, es un campo de las Matemáticas muy joven que aun tiene bastante recorrido por delante.

En Internet es posible encontrar mucha información sobre fractales. En los fascículos de materiales añadimos parte de esa información.

A continuación adjuntamos distintos vídeos sobre fractales:

VIDEO: MAS POR MENOS	http://www.youtube.com/watch?v=lrmt0MLJ3tI
COMO HACER FRACTALES CON PAPEL	http://www.youtube.com/watch?v=iXVIXtsb2QA
TRIÁNGULO DE SIERPINSKI	http://www.youtube.com/watch?v=Jukd-HBm3Jw http://www.youtube.com/watch?v=aepxB7Y-0UA
ESTRELLA FRACTAL	http://www.youtube.com/watch?v=UymzeP-ML2g
LIBRO DE FRACTALES	http://www.youtube.com/watch?v=a4FKizvVx0c
NATURALEZA FRACTAL. GEOMETRIA SAGRADA	http://www.youtube.com/watch?v=ME-bLr7mGL4
PIRAMIDE DE SIERPINSKI	http://www.youtube.com/watch?v=P--sH14KTrA
CON LATAS	http://www.youtube.com/watch?v=PahqYtWad6o
CON PAPEL	http://www.youtube.com/watch?v=C1VZkp2dNXM
FRACTALES CREADOS EN MADERA	http://www.youtube.com/watch?v=y9o37Ao2tHY
FRACTALES ELÉCTRICOS	http://www.youtube.com/watch?v=fEUqW0suHOc

TRIANGULO CON LATAS	http://www.youtube.com/watch?v=l3SOmQWGH4k http://www.youtube.com/watch?v=GO2NVqsSzMw
EXPERIMENTO DE RESONANCIA Y FRECUENCIA	http://www.youtube.com/watch?v=jBpJTB1kvmw
FRACTALES DE PLATA	http://www.youtube.com/watch?v=Z_Y1t7hJVhk

5. Curiosidades y revista

Dentro de esa idea de proporcionar al alumnado un sentido sobre lo que estudian de Matemáticas se incorpora en cada capítulo y como un libro independiente las “Curiosidades y revista”.

En ellas hemos querido humanizar las Matemáticas poniendo cara a los nombres que aparecen de matemáticos y explicando de forma breve su biografía. En particular no hemos querido que se nos olviden las mujeres matemáticas, o mujeres que hayan tenido interés para las matemáticas. También hemos querido incorporar algún matemático español (apenas conocido) o cuestiones cercanas a nuestro entorno.

Se añaden en ocasiones pasatiempos, problemas de ingenio, juegos, chistes matemáticos...

Se comentan curiosidades y aplicaciones directas sobre el contenido del capítulo.

Veamos algunos ejemplos.

- En el Museo Arqueológico de Madrid podemos encontrar Matemáticas. Hay una preciosa colección de astrolabios, e instrumentos de navegación. Pero en particular hemos encontrado una caja, el “ábaco neperiano” que es de la época de Napier, y que se utilizaba para multiplicaciones de números grandes, es decir, que usa los logaritmos en su época primera. Vamos a añadir aquí las páginas de la revista donde esto se cuenta.
- Hemos añadido una página de aplicaciones para hacer ver cómo la sociedad ha avanzado gracias a hombre y mujeres que han investigado y utilizado las Matemáticas.
- Y otra, de las muchas que hay, de problemas de ingenio, juegos y pasatiempos.
- Hay breves biografías de muchos matemáticos y matemáticas, en particular resaltamos la biografía de un bastante desconocido matemático español y madrileño, Juan Caramuel.

5.1. En el Museo Arqueológico de Madrid, logaritmos

Los logaritmos de Neper

Ábaco neperiano

En el Museo Arqueológico de Madrid hay dos ábacos confeccionados en el siglo XVII siguiendo las indicaciones del libro de John Napier "Rabdología" publicado en 1617. Es único en el mundo. No queda ningún otro ejemplar completo como éste. Puedes ver un mueble de madera de palosanto, con incrustaciones de marfil, con dos puertas, en una aparece el triángulo de Tartaglia, y en la otra, las tablas de las potencias. En él se guardan dos ábacos, el de los "huesos de Napier" y, en los cajones, el ábaco *promptuario*.



Ábaco neperiano



Puerta con las potencias

John Napier

En tiempo de Maricastaña (bueno, no tanto, en el Renacimiento, en 1550) nació en Escocia, *John Napier*, hijo de una familia noble, rica y calvinista. Por eso pudo dedicarse a lo que le gustaba, las Ciencias, llegando a ser conocido por sus vecinos como "la maravilla de Merchiston" por sus muchos inventos en diferentes campos: en cultivos, fertilizantes, armas para combatir a los españoles... (¡Curiosa paradoja! El único prontuario neperiano que se ha localizado en el mundo es propiedad de la católica monarquía española a la que Neper quería combatir). Uno de estos inventos fueron los **logaritmos**. Ya sabes, los logaritmos neperianos se llaman así en su honor.

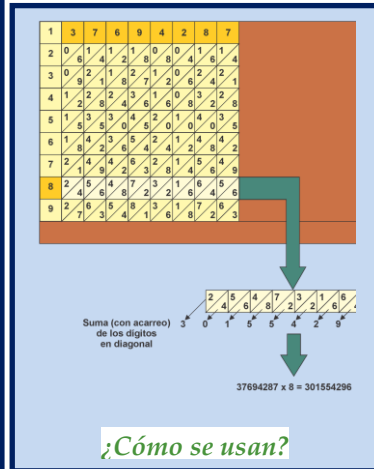


Para saber más sobre *Napier* y los logaritmos visita:

<http://cifrasyteclas.com/2013/11/25/yo-tambien-vivi-enganado-el-logaritmo-neperiano-no-usaba-la-base-e/>

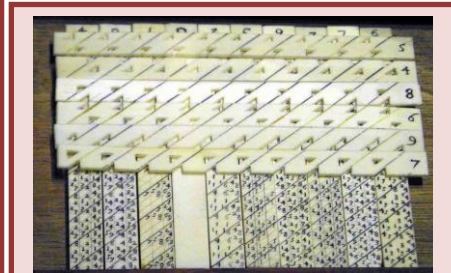
Los huesos de Napier

Consta de 60 varillas de marfil con forma de prisma cuadrangular que llevan grabadas las tablas de multiplicar del 1 al 9. Permiten multiplicar números de varias cifras por un número de una cifra, sin tener que saberse las tablas de multiplicar. Sólo hay que saber sumar. Se basa en la forma de multiplicar introducida por los árabes del *método de la celosía*. Ejemplares parecidos sí se conservan varios pues debieron ser muy



Ábaco promptuario

En los cajones del mueble de la figura arriba a la izquierda está el segundo ábaco de los que se guardan en el Museo Arqueológico, que permite multiplicar números de hasta 20 cifras por números de hasta 10 cifras, que pueden incluso ampliarse. Hay regletas de dos tipos: 100 verticales con números y similares a los huesos de *Napier*, con las tablas de multiplicar escritas por el método de la celosía, y 200 horizontales que constan de un número (multiplicando) y perforaciones triangulares, que se superponen a las anteriores. Con sólo sumar los números que permiten ver las tablillas perforadas se pueden multiplicar números grandes (sin saber la tabla de multiplicar). Este ábaco es único en el mundo.



Regletas del ábaco promptuario

Tablas de logaritmos

Utilizando un instrumento similar a este ábaco, *Napier* con la ayuda de *Henry Briggs* elaboró la primera tabla de logaritmos, poderosa herramienta de cálculo durante siglos.

5.2. Ellas y ellos investigan para resolver problemas

El progreso que ahora disfrutamos ha sido posible gracias a la iniciativa y al trabajo de miles de hombres y mujeres. Superaron retos y resolvieron problemas para los que necesitaron muchos conocimientos matemáticos

CONSTRUYERON Puentes QUE NOS COMUNICAN



DISEÑARON AVIONES QUE SOBREVUELAN OCÉANOS



LA INFORMÁTICA QUE NOS INVADE



BARCOS QUE SURCAN LOS MARES




LA ELECTRICIDAD QUE LLEGA A TODAS PARTES



LA REINA DE LAS CIENCIAS DEL S. XIX

Mary Somerville dedicó su vida al estudio de las matemáticas y la física. Tradujo al inglés La Mecánica Celeste de Laplace, uno de los tratados científicos más importantes de su época. Escribió numerosas obras y artículos, viajó por Europa y se relacionó con los principales científicos. La Reina Victoria le concedió una pensión vitalicia en reconocimiento a su trabajo. Fue una mujer feliz. Mirad lo que escribió:

“Tengo 92 años..., mi memoria para los acontecimientos ordinarios es débil pero no para las matemáticas o las experiencias científicas. Soy todavía capaz de leer libros de álgebra superior durante cuatro o cinco horas por la mañana, e incluso de resolver problemas”



Mary Somerville (1780-1872)
Fuente: Wikipedia

5.3. Pasatiempos, problemas de ingenio, juegos...

Un enigma

Cuatro paredes, sin puertas

Con seis filos las harás

Y ten además en cuenta

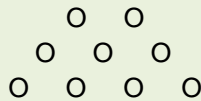
Que el más sencillo de cinco es.

Del libro de Luis Balbuena "Cuentos de Cero"

Un juego: EL NIM

Es un juego para dos jugadores

De cada fila, por turno, se pueden tomar una, dos o toda la fila. Pierde quien debe tomar la última ficha.



El oso

Un cazador cuenta a un grupo de amigos:

– Anduve 2 km hacia el sur, luego 2 km al este, y por último 2 km al norte. Me encontré en el lugar de partida. Y allí cacé un oso. ¿De qué color era el oso?

Amigo 1: – Naturalmente. era blanco.

5.4. Un matemático madrileño

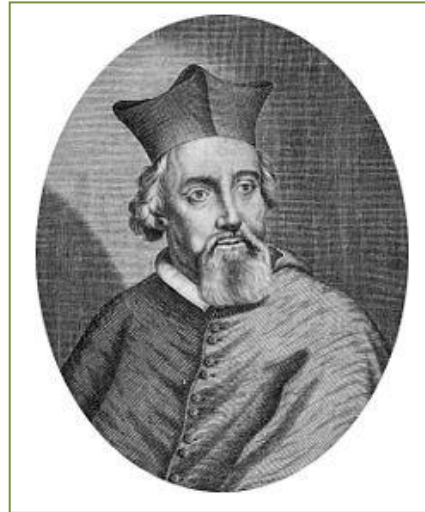
Sabías que ya en el siglo XVII hubo un matemático nacido en Madrid.

Juan Caramuel Lobkowitz

(Madrid, 23 de mayo de 1606 – Vigevano, Lombardía, 8 de septiembre de 1682)

Juan Caramuel fue un personaje extraño y prodigioso, tan fascinante como olvidado. Fue matemático, filósofo, lógico, lingüista y monje cisterciense, que se ganó el sobrenombre de «*Leibniz español*» por la variedad y vastedad de sus conocimientos. Lo traemos aquí, por ser un matemático español del siglo XVII, que ya es raro, y porque nació en Madrid, donde una calle lleva su nombre, así como un centro de salud y un parque.

Estudió humanidades y filosofía en la Universidad de Alcalá. Amante de las lenguas, llegó a dominar y hablar una veintena como latín, griego, árabe, siríaco, hebreo, chino, etc. Fue abad, obispo coadjutor en Maguncia y agente del rey de España en Bohemia.



Obra

Trabajó en **teoría de la probabilidad**, dando pasos en la dirección correcta hacia la formulación de Pascal, quien seguramente se inspiró en su «*Kybeia, quæ combinatoriæ genus est, de alea et ludis Fortunæ serio disputans*» (1670), un tratadito de veintidós páginas incluso en su *Mathesis biceps* que representa el segundo tratado sobre cálculo de probabilidades de la historia después del tratado de 1656 de Huygens. En el tratado de Caramuel se estudian distintos juegos y el problema de la división de las apuestas.

También se le debe la primera descripción impresa del **sistema binario** en su *Mathesis biceps* en lo que se adelantó treinta años a *Leibniz*, su más famoso divulgador. Explicó allí el principio general de los números en base n , destacando las ventajas de utilizar bases distintas de la 10 para resolver algunos problemas. Fue también el primer español que publicó una tabla de logaritmos. El sistema de logaritmos que desarrolló fue en base 1009.

Otra de sus aportaciones científicas fue, en **astronomía**, un método para determinar la longitud utilizando la posición de la Luna.

En **trigonometría**, propuso un método nuevo para la trisección de un ángulo.

6. Conclusiones

Mejor que continuar añadiendo nuevos ejemplos animamos a entrar en Internet y visitar los textos. Tienen el interés de estar escritos de forma totalmente desinteresada por el profesorado, que ha trabajado para que puedan salir adelante.

Referencias

- [1] www.apuntesmareaverde.org.es
- [2] librosmareaverde.tk

Sobre las autoras:

Nombre: Adela Salvador

Correo Electrónico: adela.salvador@upm.es

Institución: ETSI Caminos. UPM, España.

Nombre: Raquel Caro Carretero

Correo Electrónico: rcaro@upcomillas.es

Institución: Universidad Pontificia Comillas- ICAI, España.

Nombre: María Merino Doncel

Correo Electrónico: santorini1712@hotmail.com

Institución: Profesora de Matemáticas I.E.S. Parquesol, Valladolid, España.

