Problema de bancarrota global con preferencias maxmin[1]

Hinojosa Ramos, Miguel A. (mahinram@upo.es)
Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide
Mármol Conde, Amparo M. (amarmol@us.es)
Economía Aplicada III
Universidad de Sevilla
Sánchez Sánchez, Francisca J. (fsansan@upo.es)
Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide

RESUMEN

Analizamos problemas de reparto de múltiples bienes en los que los agentes tienen preferencias del tipo maxmin sobre los resultados que obtienen con respecto a los diferentes bienes. En este contexto introducimos el concepto de eficiencia maxmin, y definimos una propiedad de estabilidad para asignaciones globales que es más exigente que la eficiencia maxmin y se apoya en un juego de utilidad transferible que también analizamos. Finalmente proponemos un procedimiento para obtener el conjunto de asignaciones globales que son estables.

Palabras clave: Problemas de bancarrota; múltiples bienes; eficiencia.
Área temática: Teoría de Juegos.

[1] Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el proyecto del Ministerio de Ciencia y Tecnología SEJ2007-62711/ECON y el proyecto de la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía PO6-SEJ-01801.

ABSTRACT

We address multiple issue division problems where the agents exhibit maxmin preferences on the results they obtain with respect to the different issues are addressed. The concept of max-min efficiency is introduced in this context, and a property of stability for global allocations which is more demanding than maxmin efficiency and is supported by a transferable utility game is analyzed. Finally, we propose a procedure to obtain the set of global allocations which exhibit the condition of stability.

Keywords: Bankruptcy problems; multiple issue; efficiency.

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo nos centramos en una extensión multidimensional de los problemas clásicos de bancarrota. Las situaciones que queremos investigar son aquellas en las que hay que asignar determinadas cantidades de diferentes bienes entre un conjunto de agentes. Los agentes tienen sus propias preferencias sobre los resultados globales, es decir, sobre el reparto que obtengan en los diferentes bienes. Sin embargo, en algunas situaciones las preferencias de los agentes no es la única información relevante para determinar cómo se reparten las cantidades disponibles, también puede haber puntos de referencia que representan los derechos o necesidades de los agentes respecto a los bienes y que han de tenerse en cuenta para poder determinar una asignación global que sea justa. En este sentido, estos problemas pueden verse como extensiones de los problemas de bancarrota. En este contexto los puntos de referencia no se consideran, necesariamente, como reclamaciones o derechos de los agentes. Las referencias pueden interpretarse como evaluaciones de las necesidades de los agentes en los diferentes bienes realizadas por evaluadores externos, o bien pueden representar las expectativas de los agentes basadas, por ejemplo, en la observación de resultados de situaciones similares. También pueden referirse a capacidades tecnológicas o de almacenamiento en problemas de producción relacionados con el reparto a realizar.

En estas situaciones en las que hay que asignar múltiples bienes, hay que tener en cuenta dos aspectos para decidir la asignación global, por una parte, los puntos de referencia con respecto a los diferentes bienes, como en los problemas de bancarrota clásicos, y por otro lado, las preferencias de los agentes con respecto a los resultados obtenidos en los diversos bienes.

El modelo que analizamos aquí también puede representar un problema de asignación con múltiples etapas, en el que diferentes cantidades del mismo bien (por ejemplo, dinero) están disponibles para asignarlas a los agentes en diferentes momentos del tiempo. Los diferentes puntos de referencia ahora también se refieren a distintas etapas. Por ejemplo, supongamos que hay que asignar fondos a varios grupos de investigación durante los próximos tres años y se dispone de una evaluación externa de las necesidades de los grupos en cada uno de estos años.

La literatura sobre los problemas de reparto de múltiples bienes se ha centrado en ambientes donde las preferencias de los agentes sobre los resultados vienen dadas por una función de utilidad. En este caso, el problema de reparto global puede reducirse a un problema de reparto clásico en el que los pagos de cada agente son asignaciones de las utilidades. Habitualmente en este enfoque se hace el supuesto adicional de que las utilidades son aditivas respecto de los bienes, es decir, cada agente valora la cantidad total recibida con respecto a todos los bienes. Por ejemplo, en el modelo que se estudia en Calleja et al. (2005), hay que repartir una cantidad entre los agentes teniendo en cuenta las reclamaciones de éstos con respecto a diferentes bienes. Proponen un procedimiento en dos fases: Primero se asigna la cantidad total a los diferentes bienes, y en el segundo paso se obtiene la asignación de los agentes. Un trabajo relacionado con este modelo donde se proponen diferentes reglas de asignación puede verse en Lorenzo-Freire et al. (2009).

Por el contrario, en nuestro modelo las cantidades correspondientes a cada bien vienen dadas exógenamente, de manera que los hace incomparables en términos acumulativos. Nuestra atención se centra en investigar las implicaciones de que los agentes tengan preferencias individuales sobre los resultados que no sean aditivas.

Nuestro análisis del problema supone que las preferencias de todos los agentes se representan por funciones maxmin. Hay una variedad de situaciones en las que la utilidad o el pago de un individuo se mide por el mínimo de los valores obtenidos con respecto a los diferentes bienes. Un ejemplo de esto son los problemas de producción en los que los agentes tienen que compartir un conjunto de distintos recursos y tienen diferentes tecnologías del tipo Leontief, además existen unas capacidades o cotas superiores asociadas a cada recurso. La utilidad final obtenida con sus asignaciones depende del mínimo obtenido en el conjunto de recursos.

Una forma de abordar el problema es reducir el problema global a un problema de bancarrota clásico en las utilidades. Sin embargo, nosotros consideramos soluciones que se aplican directamente a la situación de reparto global. Las asignaciones serán el pago de cada agente en cada uno de los bienes.

En este trabajo la estructura es la siguiente. En la Sección 2 presentamos el modelo y los conceptos de eficiencia que trataremos. En la Sección 3, presentamos un juego de utilidad transferible asociado al problema de bancarrota global con preferencias maxmin, y estudiamos las asignaciones globales que presentan una propiedad de estabilidad con respecto a los resultados que las coaliciones obtendrán en el juego. La Sección 4 la dedicamos a las conclusiones.

2. EL MODELO. CONCEPTOS DE EFICIENCIA

Un problema de reparto aparece cuando hay que dividir una cantidad entre un conjunto de agentes respecto a unas referencias o características de dichos agentes. Desde muy antiguo se han presentado problemas reales de este tipo. Son clásicos los ejemplos que aparecen en el Talmud babilónico (ver Aumann y Maschler, 1985) en un contexto de bancarrota. Estos problemas se plantean cuando, por ejemplo, el valor residual de una empresa (estado) en bancarrota es insuficiente para satisfacer las reclamaciones legítimas de todos sus acreedores, o cuando, por ejemplo, una herencia (estado) es insuficiente para satisfacer las partidas detalladas en el testamento; en estos casos, hay que diseñar reglas que repartan el estado entre los legítimos reclamantes de una manera justa.

Nuestro propósito en este trabajo, es extender y analizar al caso multidimensional los problemas clásicos de bancarrota.

Sea $N = \{1,\dots,n\}$ un conjunto de agentes. Un *problema de bancarrota global* es un problema de reparto de múltiples bienes que consiste en un número finito de problemas de bancarrota (N, c^j, E^j), $j \in M = \{1,\dots,m\}$, donde $E^j \in R_+$ es el *estado* correspondiente al bien j, es decir, la cantidad que hay que asignar del bien j, $c^j \in R_+^n$ representa las *reclamaciones* de los agentes con respecto al bien j, y se cumple la condición $\sum_{i \in N} c_i^j \geq E^j$ para cada j. Suponemos que los estados están ordenados en orden creciente, $E^1 \leq E^2 \leq, \dots, \leq E^m$. Representamos el problema de bancarrota global como (N, C, E), donde $E \in R_+^m$ y $C \in R^{m \times n}$. Cuando no haya confusión posible, denotaremos el problema por (C,E).

Una *asignación global* de los bienes a los agentes es una matriz no negativa $X\in R^{m\times n}$, que verifica para cada $j=1,\ldots,m$, $\sum_{i\in N}x_i^j \le E^j$, y $0\le x_i^j \le c_i^j$, para todo $i\in N$, y $j\in M$. Al conjunto de asignaciones globales lo denotamos por $I(C,E)$. La columna i de la matriz X, $X_i=(x_i^1,x_i^2,\ldots,x_i^m)^t \in R^m$, representa la asignación para el agente i en cada uno de los m bienes. La fila j de la matriz X, $X^j=(x_1^j,x_2^j,\ldots,x_n^j)\in R^n$ representa una *asignación del bien* j. Adoptamos la definición estándar de eficiencia y decimos que una asignación del bien j, X^j, es *eficiente* si $\sum_{i\in N}x_i^j = E^j$. Una *regla global* para estos problemas, asocia una asignación global a cada problema de bancarrota global.

2.1. Eficiencia Aditiva

Decimos que el agente i tiene *preferencias aditivas* sobre los resultados globales, y lo denotamos por $X_i \ \ge_{ad} Y_i$, si para $X,Y\in R_+^{m\times n}$, $\sum_{j=1}^m x_i^j \ge \sum_{j=1}^m y_i^j$. A continuación demostramos que la eficiencia aditiva equivale a eficiencia estándar en cada uno de los bienes.

Denotamos por $>_{ad}$ a la parte asimétrica de $\ge_{ad}$, y consideramos la siguiente relación de dominancia colectiva: $X \succ_{ad} Y$, si $X_i \ \ge_{ad} Y_i$, y $X_k >_{ad} Y_k$, para algún $k\in N$.

Definición 2.1 *La asignación global $X\in R_+^{m\times n}$ con $\sum_{i=1}^n x_i^j \le E^j$ para todo $j\in M$, es eficiente aditiva si no existe otra asignación global, $Y\in R_+^{m\times n}$, tal que $\sum_{i=1}^n y_i^j \le E^j$ para todo $j\in M$, y $Y \succ_{ad} X$.*

Lema 2.2 *La asignación global $X\in R_+^{m\times n}$ es eficiente aditiva si y solo si $\sum_{i=1}^n x_i^j = E^j$ para $j=1,\ldots,m$.*

Demostración: Primero demostramos que si X es eficiente aditiva, entonces

$\sum_{i=1}^{n} x_i^j = E^j$ para todo $j = 1,\ldots,m$. Supongamos, por el contrario que para j^*, $\sum_{i=1}^{n} x_i^{j^*} < E^{j^*}$, entonces es posible considerar Y tal que $y_i^{j^*} > x_i^{j^*}$ para todo $i \in N$, con $\sum_{i=1}^{n} y_i^{j^*} \leq E^{j^*}$ y $y_i^j = x_i^j$ para todo $i \in N$ y $j \neq j^*$. Resulta que $Y_i >_{ad} X_i$ para todo $i \in N$, y por lo tanto, X no es eficiente aditiva.

Recíprocamente, cualquier asignación global Y, cumple $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} y_i^j \leq \sum_{j=1}^{m} E^j$. Para demostrar que si $\sum_{i=1}^{n} x_i^j = E^j$ para todo $j = 1,\ldots,m$, entonces X es eficiente aditiva, supongamos por el contrario que existe otra asignación global, Y, tal que $\sum_{j=1}^{m} y_i^j \geq \sum_{j=1}^{m} x_i^j$, para $i = 1,\ldots,n$, y $\sum_{j=1}^{m} y_k^j > \sum_{j=1}^{m} x_k^j$ para algún $k \in N$. Se deduce que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_i^j > \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i^j = \sum_{j=1}^{m} E^j$, y esto es una contradicción. □

Al exigir que el estado correspondiente a cada bien se asigne totalmente, estamos imponiendo una condición de eficiencia colectiva para preferencias aditivas. Este resultado proporciona una nueva visión, dado que en la literatura relacionada con este tema, los modelos de múltiples bienes suponen implícitamente preferencias aditivas. En estos modelos, en una primera etapa se asigna el estado a los diferentes bienes, y posteriormente, se asignan a los agentes las cantidades de cada bien de manera eficiente, por lo tanto, siempre se cumple la eficiencia aditiva.

2.2. Eficiencia maxmin

En las situaciones que queremos estudiar el pago que obtiene cada agente y que define sus preferencias, viene determinado por $p_i^{\alpha}(X) = \min_j \{\alpha_i^j x_i^j\}$, con $\alpha_i^j > 0$ para todo $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$. Representamos *un problema de bancarrota global con preferencias maxmin* por una terna (C, E, α), donde α es una matriz de orden $m \times n$, $\alpha = (\alpha_i^j), i \in N, j \in M$.

Obsérvese que el pago del agente i solo depende de las cantidades asignadas al agente i, por lo que también podemos escribir $p_i^\alpha(X_i)$ para representar $p_i^\alpha(X)$. Para los casos donde $\alpha_i^j = 1$ para todo i, j, en la notación vamos a omitir α. También denotamos por $p^\alpha(X) \in R^n$, al vector cuyas componentes son los pagos obtenidos por los agentes con la asignación X, $p^\alpha(X) = (p_1^\alpha(X_1), \ldots, p_n^\alpha(X_n))$.

Definimos el concepto de eficiencia maxmin para estas situaciones de bancarrota global.

Definición 2.3 *Una asignación global* $X \in I(C, E)$ *es* α*-eficiente si no existe otra asignación global,* $Y \in I(C, E)$*, tal que* $p_i^\alpha(Y) \geq p_i^\alpha(X)$*, para todo* $i \in N$*, con* $p_r^\alpha(Y) > p_r^\alpha(X)$*, para al menos un* $r \in N$.

Las asignaciones globales que son α-eficientes no necesariamente son eficientes. El siguiente resultado caracteriza a las asignaciones α-eficientes en términos de intersección de conjuntos transformados de asignaciones. Para cada $j \in M$, denotamos por $I(c^j, E^j)$ al conjunto de asignaciones factibles del bien j, y por $S_\alpha^j(C, E)$ a la transformación lineal, vía α^j, de estos conjuntos:

$$S_\alpha^j(C, E) = \{y \in R^n | y_i = \alpha_i^j x_i, x \in I(c^j, E^j)\}.$$

Para un conjunto $T \subset R^n$, con $Ef(T)$ denotamos el conjunto de puntos eficientes, $Ef(T) = \{x \in T | \nexists y \in T, y \neq x, y_i \geq x_i, \forall i \in N\}$.

Proposición 2.4 *Una asignación global* X *es* α*-eficiente si y solo si* $p^\alpha(X) = Ef(\bigcap_{j \in M} S_\alpha^j(C, E))$.

Para el caso particular en el que $\alpha_i^j = 1$, la asignación global X es α-eficiente si y solo si $p(X) = (\min_j \{x_1^j\}, \ldots, \min_j \{x_n^j\}) \in Ef(\bigcap_{j \in M} I(c^j, E^j))$. De ello se deduce que en este caso pueden obtenerse asignaciones globales que son α-eficientes y replicando los valores para todos los bienes considerando un punto en la frontera eficiente de la intersección $\bigcap_{j \in M} I(c^j, E^j)$.

3. UN JUEGO DE UTILIDAD TRANSFERIBLE

Ahora vamos a asociar un juego de utilidad transferible a cada problema de bancarrota global con preferencias maxmin. El valor de la coalición en este juego representa el mejor pago total que los miembros de la coalición pueden obtener en los diferentes bienes, determinándose de una forma parecida a los juegos de bancarrota definidos por O'Neill (1982), pero teniendo en cuenta el hecho de que las preferencias de los agentes son de tipo maxmin.

El juego de bancarrota que define O'Neill se basa en la idea de que, si es posible, los agentes cuando llegan a una situación de reparto toman tanto como pueden con la única limitación de sus reclamaciones. En el enfoque que proponemos, las preferencias de los agentes son maxmin y, por tanto, no están interesados en la cantidad total disponible de cada bien.

La lógica de este nuevo enfoque es la siguiente: Si el agente i individualmente entra en la situación, deseará tomar una cantidad de cada bien j, de tal manera que se maximice su pago, $\min_j\{\alpha_i^j x_i^j\}$. Ahora suponemos que el agente toma las cantidades mínimas que necesita de cada bien para alcanzar este máximo, y denotamos esta cantidad por r_i^j. En el próximo lema damos la expresión explícita de r_i^j.

Lema 3.1 *Sean* $d_i^j = \min\{c_i^j, E^j\}$*, y* $\alpha_i^k d_i^k = \min_j\{\alpha_i^j d_i^j\}$*. La cantidad mínima de los bienes que cada agente* $i \in N$ *necesita para lograr su máxima utilidad es* $r_i^j = \dfrac{\alpha_i^k d_i^k}{\alpha_i^j}$*, para* $j \in M$ *.*

Demostración: Obsérvese que para cada $i \in N$, r_i^j debe resolver el problema $P^r(i)$:

$$\begin{aligned} \max \quad & \min_{j\in M}\{\alpha_i^j x_i^j\} \\ & s.a: x_i^j \le E^j, j \in M \qquad\qquad (P^r(i)) \\ & \quad 0 \le x_i^j \le c_i^j, j \in M \end{aligned}$$

Denotando $d_i^j = \min\{c_i^j, E^j\}$, este problema es equivalente a:

$$\begin{aligned} \max \quad & \min_{j\in M} \{\alpha_i^j x_i^j\} \\ & s.a: 0 \le x_i^j \le d_i^j, j \in M \end{aligned}$$

Demostraremos que existe una solución óptima para $P^r(i)$ tal que $\alpha_i^j x_i^j = \alpha_i^s x_i^s$ para todo $j, s \in M$. Sea Y una solución óptima para $P^r(i)$, denotamos por $\alpha_i^k y_i^k = \min_{j\in M} \{\alpha_i^j x_i^j\}$, y consideremos un $\overline{X}$, tal que $\overline{x}_i^j = \dfrac{\alpha_i^k y_i^k}{\alpha_i^j}$. Esta es una solución en la que $\alpha_i^j \overline{x}_i^j = \alpha_i^s \overline{x}_i^s$ para todo $j, s \in M$, donde el $\min_{j\in M} \{\alpha_i^j \overline{x}_i^j\} = \min_{j\in M} \{\alpha_i^j y_i^j\}$, y por lo tanto, es óptima.

Sea ahora $t = \alpha_i^j x_i^j$, para todo $j \in M$, entonces el problema lineal se reduce a:

$$\begin{aligned} \max \quad & t \\ s.a: \quad & 0 \le t \le \alpha_i^j d_i^j \end{aligned}$$

La solución para este problema consiste en $t = \min_j \{\alpha_i^j d_i^j\} = \alpha_i^k d_i^k$. Entonces una solución óptima para el problema original es $r_i^j = \dfrac{\alpha_i^k d_i^k}{\alpha_i^j}$.

Téngase en cuenta que el problema $P^r(i)$ puede tener otras soluciones que consisten en las cantidades mayores de algún bien. Sin embargo, si Y es una solución óptima para $P^r(i)$, entonces $r_i^j \le y_i^j$ para todo $j \in M$. □

Obsérvese que independientemente de α, la desigualdad $r_i^j \le c_i^j$ es válida para todo $i \in N, j \in M$.

Cuando cada agente toma la cantidad r_i^j, entonces la cantidad disponible del bien j para una coalición S es $\max\{0, E^j - \sum_{i\in N\setminus S} r_i^j\}$. Para cada bien, $j \in M$, denotamos por $w_\alpha^j(S) = \max\{0, E^j - \sum_{i\in N\setminus S} r_i^j\}$ para todo $S \subseteq N$, $S \ne \varnothing$, y $w_\alpha^j(\varnothing) = 0$. Obsérvese que las cantidades w_α^j, en general, no representan juegos de bancarrota, ya que no es necesario que $\sum_{i\in N} r_i^j \ge E^j$. Téngase en cuenta también que las cantidades w_α^j no se pueden calcular de forma independiente para cada $j \in M$, ya que están relacionadas a través de los bienes.

Ahora, definimos el siguiente juego de utilidad transferible:

$$\begin{aligned} v^\alpha(S) = \quad & \max \sum_{i\in S} p_i^\alpha(X) \\ & s.a: \sum_{i\in S} x_i^j \le w_\alpha^j(S), j \in M \qquad\qquad (P_\alpha(S)) \\ & \quad 0 \le x_i^j \le c_i^j, i \in S, j \in M \end{aligned}$$

$v^\alpha(S)$ denota el pago máximo agregado que las coaliciones pueden obtener en la situación descrita.

Denotamos por $C(v^\alpha)$ el núcleo del juego (N, v^α), es decir,

$$C(v^\alpha) = \{a \in R^n | a \ge 0, \sum_{i\in N} a_i = v^\alpha(N), \sum_{i\in S} a_i \ge v^\alpha(S), \forall S \subset N\}.$$

Nos centramos en el conjunto de asignaciones globales que presentan una condición de estabilidad, en el sentido de que cada coalición garantiza al menos su valor en el juego, es decir, el mejor pago que puede obtener sin cooperar con los agentes fuera de la coalición.

Definición 3.2 *Una asignación global* $X \in I(C,E)$ *es* α*-estable si para todo* $S \subseteq N$, $\sum_{i\in S} p_i^\alpha(X) \ge v^\alpha(S)$. *Denotamos al conjunto de asignaciones* α*-estables para el problema* (C,E) *por* $T(C,E,\alpha)$*, es decir,*

$$T(C,E,\alpha) = \{X \in I(C,E) | \sum_{i\in S} p_i^\alpha(X) \ge v^\alpha(S), \forall S \subseteq N\}.$$

El siguiente resultado muestra que el conjunto de asignaciones de $T(C,E,\alpha)$ es siempre no vacío. Por otra parte, mostramos que las asignaciones globales que son α-estables son las que maximizan la utilidad total de la gran coalición. Como consecuencia de ello, proporcionamos un sencillo procedimiento para obtener este conjunto de asignaciones globales mediante la resolución de un único problema, el de la obtención del conjunto de soluciones óptimas del problema $P_\alpha(N)$.

Teorema 3.3 Y *es una solución óptima de* $P_\alpha(N)$ *si y solo si* $Y \in T(C,E,\alpha)$.

Demostración: En primer lugar, si $Y \in T(C,E,\alpha)$ entonces, $\sum_{i\in N} p_i^\alpha(Y) = v^\alpha(N)$, y por lo tanto, Y es una solución óptima para $P_\alpha(N)$.

Recíprocamente, sea Y una solución óptima para el problema $P_\alpha(N)$, y consideremos X, tal que $x_i^j = \dfrac{\alpha_i^k y_i^k}{\alpha_i^j}$, donde $\alpha_i^k y_i^k = \min_j\{\alpha_i^j y_i^j\}$. Es fácil comprobar que $x_i^j \le y_i^j$ para todo $i \in N$ y $j \in M$. Por lo tanto, la asignación global X es factible para $P_\alpha(N)$. Además, dado que $p_i^\alpha(X) = p_i^\alpha(Y)$ para todo $i \in N$, X también es óptima.

Obsérvese que para cada $i \in N$, $\alpha_i^j x_i^j = \alpha_i^k x_i^k$ para todo $j,k \in M$.

Para $S \subseteq N$, X^S denota la asignación global de los bienes a los agentes de S. Vamos a demostrar que $X \in T(C,E,\alpha)$. Supongamos, por el contrario, que existe $T \subset N$, tal que $\sum_{i\in T} p_i^\alpha(X) < v^\alpha(T)$. De ello se deduce que existe $Y^T \neq X^T$ que resuelve el problema $P_\alpha(T)$. Ahora, sustituimos X^T por Y^T en X. En primer lugar demostramos que la nueva asignación, $\overline{X} = (X^{N\setminus T}, Y^T)$, es factible en $P_\alpha(N)$. Para $i \notin T$, $x_i^j \le \min\{c_i^j, E^j\} = d_i^j$. Sea k tal que $\alpha_i^k d_i^k = \min_j\{\alpha_i^j d_i^j\}$. Por lo tanto, $\alpha_i^j x_i^j = \alpha_i^k x_i^k \le \alpha_i^k d_i^k$, y de ello se deduce que $x_i^j \le r_i^j$ para todo $i \in N, j \in M$. Ahora, para cada j:

- Si $w_\alpha^j(T) = 0$, entonces $y_i^j = 0$ para todo $i \in T$. Por lo tanto,

$\sum_{i\in T} y_i^j + \sum_{i\notin T} x_i^j \le E^j$.

- Si $w_\alpha^j(T) = E^j - \sum_{i\notin T} r_i^j$, entonces $\sum_{i\in T} y_i^j + \sum_{i\notin T} x_i^j \le E^j - \sum_{i\notin T} r_i^j + \sum_{i\notin T} r_i^j = E^j$.

Sin embargo, $\sum_{i\in N} p_i^\alpha(\overline{X}) = \sum_{i\in T} p_i^\alpha(Y_i) + \sum_{i\notin T} p_i^\alpha(X_i) > v^\alpha(N)$ y esto es una contradicción, X es una solución óptima para $v^\alpha(N)$. Por lo tanto, $X \in T(C,E,\alpha)$, ya que $x_i^j \le y_i^j$ para todo $i \in N$ y $j \in M$, y también tenemos que $Y \in T(C,E,\alpha)$. □

Como consecuencia las asignaciones globales α-estables son α-eficientes, es decir, los pagos no pueden mejorarse simultáneamente para todos los agentes.

Corolario 3.4 *Si una asignación global* $X \in I(C,E)$ *es* α *-estable , entonces* X *es* α *-eficiente.*

Demostración: Consideremos una asignación global α -estable, X , y supongamos que al contrario, no es α -eficiente. De ello se deduce que existe otra asignación global, Y, tal que $p_i^\alpha(Y) \geq p_i^\alpha(X)$ para todo $i \in N$, con $p_r^\alpha(Y) > p_r^\alpha(X)$, para al menos un $r \in N$. Por lo tanto, $\sum_{i\in N} p_i^\alpha(Y) > \sum_{i\in N} p_i^\alpha(X)$, y esto contradice el hecho de que X resuelve $P_\alpha(N)$. □

Denotemos por $Ef(T(C,E,\alpha))$ al conjunto de asignaciones globales α -estables para las que la asignación de cada bien es eficiente, es decir,

$$Ef(T(C,E,\alpha)) = \{X \in T(C,E,\alpha) \,|\, \sum_{i\in N} x_i^j = E^j, \forall j \in M\}.$$

Obsérvese que este conjunto siempre es no vacío, ya que si $X \in T(C,E,\alpha)$ y se considera otra asignación global, $Y \in I(C,E)$, con $y_i^j \geq x_i^j$ para todo $i \in N, j \in M$, entonces $Y \in T(C,E,\alpha)$.

El siguiente resultado proporciona una manera de obtener los valores $v^\alpha(S)$ mediante la resolución de un problema lineal.

Proposición 3.5 *Para todo* $S \subseteq N$ *, pueden obtenerse los valores* $v^\alpha(S)$ *resolviendo el siguiente problema lineal:*

$$\begin{aligned} v^\alpha(S) = \quad & \max \sum_{i\in S} z_i \\ & s.a: \sum_{i\in S} \frac{1}{\alpha_i^j} z_i \leq w_\alpha^j(S), \forall j \in M \qquad (R^\alpha(S)) \\ & 0 \leq z_i \leq k_i, i \in S \end{aligned}$$

donde $k_i = \min_{j\in M}\{\alpha_i^j c_i^j\}$.

Demostración:

$$v^{\alpha}(S) = \max \sum_{i \in S} p_i^{\alpha}(X)$$
$$s.a: \sum_{i \in S} x_i^j \leq w_{\alpha}^j(S), j \in M \qquad (P_{\alpha}(S))$$
$$0 \leq x_i^j \leq c_i^j, i \in S, j \in M$$

Haciendo $y_i^j = \alpha_i^j x_i^j$ para $i \in N, j \in M$, obtenemos que

$$v^{\alpha}(S) = \max \sum_{i \in S} min_j \{y_i^j\}$$
$$s.a: \sum_{i \in S} \frac{1}{\alpha_i^j} y_i^j \leq w_{\alpha}^j(S), \forall j \in M$$
$$0 \leq y_i^j \leq \alpha_i^j c_i^j, i \in S, j \in M$$

Ahora, consideremos $z_i = \min_j \{y_i^j\}$, y como consecuencia de la amplitud de los conjuntos $A^j = \{y^j \in R^n, \sum_{i \in S} \frac{1}{\alpha_i^j} y_i^j \leq w_{\alpha}^j(S), j \in M, 0 \leq y_i^j \leq \alpha_i^j c_i^j, i \in S, j \in M\}$, el valor óptimo puede encontrarse en la intersección, $\bigcap_{j \in M} A^j = \{z \in R^n, \sum_{i \in S} \frac{1}{\alpha_i^j} z_i \leq w_{\alpha}^j(S), j \in M, 0 \leq z_i \leq \alpha_i^j c_i^j, i \in S, j \in M\}$, y el resultado queda demostrado. □

3.1 El caso especial de $\alpha = 1$

El siguiente resultado muestra que para $\alpha_i^j = 1$, el juego (N, v^{α}) se reduce, a un juego aditivo o a un juego de bancarrota estándar con estado E^1 y reclamaciones r, donde $r_i = \min\{k_i, E^1\}$, para cada $i \in N$. Recordemos que en este caso, $k_i = \min_{j \in M} \{c_i^j\}$.

Proposición 3.6 *Para* $\alpha_i^j = 1$,

- Si $E^1 \geq \sum_{i \in N} k_i$, entonces $v^{\alpha}(S) = \sum_{i \in S} k_i$.

- Si $E^1 \leq \sum_{i \in N} k_i$, entonces $v^{\alpha}(S) = \max\{0, E^1 - \sum_{i \notin S} r_i\}$.

donde para $i \in N$, $k_i = \min_{j \in M}\{c_i^j\}$, $r_i = \min\{k_i, E^1\}$.

Demostración: Para el caso en el que $\alpha_i^j = 1$, $d_i^j = \min\{c_i^j, E^j\}$, $d_i^k = \min_j\{d_i^j\} = \min\{E^1, k_i\}$, $r_i^j = r_i = \min\{E^1, k_i\}$ no depende de j, y por lo tanto, $w_\alpha^j(S) = \max\{0, E^j - \sum_{i \notin S} r_i\}$.

El problema $R^\alpha(S)$ es entonces

$$\begin{aligned} v^\alpha(S) = \quad & \max \sum_{i \in S} z_i \\ & s.a: \sum_{i \in S} z_i \le \min_j\{w_\alpha^j(S)\} \\ & 0 \le z_i \le k_i, i \in S \end{aligned}$$

Ahora, $\min_j\{w_\alpha^j(S)\} = \max\{0, E^1 - \sum_{i \notin S} r_i\}$, y por lo tanto, para cada $S \subseteq N$,

- Si $E^1 - \sum_{i \in N \setminus S} r_i \le 0$, entonces $\min_j\{w_\alpha^j(S)\} = 0$, y $v^\alpha(S) = 0$.
- Si $E^1 - \sum_{i \in N \setminus S} r_i \ge 0$, entonces

$$\begin{aligned} v^\alpha(S) = \quad & \max \sum_{i \in S} z_i \\ & s.a: \sum_{i \in S} z_i \le E^1 - \sum_{i \in N \setminus S} r_i \\ & 0 \le z_i \le k_i, i \in S \end{aligned}$$

y las soluciones para este problema lineal son:

- Si $\sum_{i \in S} k_i \ge E^1 - \sum_{i \in N \setminus S} r_i$, entonces $v^\alpha(S) = E^1 - \sum_{i \in N \setminus S} r_i$.
- Si $\sum_{i \in S} k_i \le E^1 - \sum_{i \in N \setminus S} r_i$, entonces $v^\alpha(S) = \sum_{i \in S} k_i$.

De ello se deduce que

$$v^\alpha(S) = \max\{0, \min\{E^1 - \sum_{i \notin S} r_i, \sum_{i \in S} k_i\}\}.$$

Por esta expresión, si $E^1 \ge \sum_{i \in N} k_i$, entonces para alguna coalición $S \subseteq N$, $E^1 \ge \sum_{i \in N \setminus S} k_i + \sum_{i \in S} k_i \ge \sum_{i \in N \setminus S} r_i + \sum_{i \in S} k_i$, por lo tanto $E^1 - \sum_{i \in N \setminus S} r_i \ge \sum_{i \in S} k_i$, y $v^\alpha(S) = \sum_{i \in S} k_i$.

Por otra parte, cuando $E^1 \le \sum_{i\in N} k_i$, demostraremos que $E^1 - \sum_{i\in N\setminus S} r_i \le \sum_{i\in S} k_i$, para algún $S \subset N$.

• Si $\exists i \in S$, $k_i > E^1$, entonces $k_i > r_i = E^1$ y $\sum_{i\in S} k_i > E^1$.

• Si $\exists i \in N\setminus S$, $k_i > E^1$, entonces $k_i > r_i = E^1$ y $\sum_{i\in N\setminus S} r_i \ge E^1$.

• Si $k_i \le E^1$ para todo $i \in N$, entonces $E^1 \le \sum_{i\in N} k_i = \sum_{i\in N\setminus S} r_i + \sum_{i\in S} k_i$.

El resultado queda demostrado. □

Ejemplo 3.7 *Consideremos una situación de bancarrota global con dos agentes y dos bienes definida por* $E=(10,20)$, $c^1=(5,15)$, $c^2=(30,4)$, *como se representa en la Figura 1. Los pagos de los agentes vienen dados por :*

$$p_1^{\alpha}(X) = \min\{2x_1^1, x_1^2\}, \quad p_2^{\alpha}(X) = \min\{\frac{1}{5}x_2^1, x_2^2\}.$$

Los valores $v^{\alpha}(S)$ *se obtienen de los problemas* $R^{\alpha}(S)$ *para* $\alpha_1^1 = 2$, $\alpha_2^1 = \frac{1}{5}$, $\alpha_1^2 = 1$, $\alpha_2^2 = 1$.

S	$w_{\alpha}^1(S)$	$w_{\alpha}^2(S)$	$v^{\alpha}(S)$
1	0	18	0
2	5	10	1
12	10	20	11

El núcleo del juego es el conjunto:

$$C(v^{\alpha}) = \{a \in R_+^2 | a_1 \ge 0, a_2 \ge 1, a_1 + a_2 = 11\}.$$

Para obtener el conjunto de asignaciones globales estables, el problema $P_{\alpha}(N)$ *da la solución:*

$$T(C,E,\alpha) = \{X \in I(C,E) \,|\, x_1^1 = 5, x_2^1 = 5, x_1^2 \ge 10, x_2^2 \ge 1\}.$$

La asignación del bien 1 viene dada por el punto $(5,5)$, *la asignación del bien 2 puede ser cualquier punto* (x_1^2, x_2^2) *con* $x_1^2 \ge 10, x_2^2 \ge 1$. *Obsérvese que* $p^{\alpha}(X) = (10,1)$ *para todo* $X \in T(C,E,\alpha)$. *Aquí se tiene que* $p^{\alpha}(T(C,E,\alpha)) = \{(10,1)\} \subset C(v^{\alpha})$.

En la Figura 1 representamos la situación de bancarrota global y las asignaciones globales estables. Las asignaciones del bien 2 son las del área sombreada.

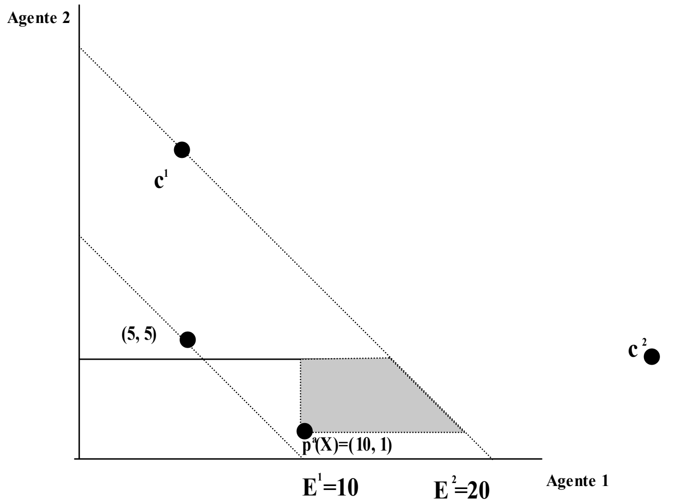

Figura 1: Conjunto de asignaciones globales estables

No todas las asignaciones globales en $T(C,E,\alpha)$ *producen resultados necesariamente eficientes para cada bien. En este ejemplo, para el bien 1 la asignación global eficiente es el punto (5, 5) y para el bien 2 estas asignaciones son:* $Ef(T(C,E,\alpha)) = \{X \in T(C,E,\alpha) \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 20\}$, *que aparecen representadas en la Figura 2 con una línea de color rojo.*

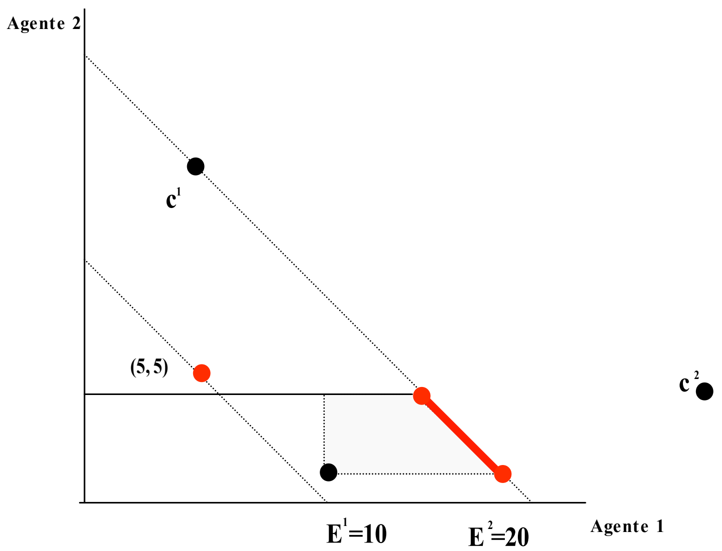

Figura 2: Conjunto de asignaciones globales estables eficientes

Consideremos ahora que $\alpha_i^j = 1$, *para todo* $i \in N, j \in M$. *En este caso,* $k = (5,4)$. *Los pagos de los agentes son :*

$$p_1(X) = \min\{x_1^1, x_1^2\}, \quad p_2(X) = \min\{x_2^1, x_2^2\}.$$

S	$w_\alpha^1(S)$	$w_\alpha^2(S)$	$v^\alpha(S)$
1	6	16	5
2	5	15	4
12	10	20	9

Por lo tanto, el núcleo del juego viene dado por, $C(v^\alpha) = \{a \in R_+^2 | a_1 \geq 5, a_2 \geq 4, a_1 + a_2 = 9\} = \{(5,4)\}$.

Resolviendo el problema $P_\alpha(N)$, *el conjunto de asignaciones estables obtenidas es:*

$$T(C, E, \alpha) = \{X \in I(C, E) \,|\, x_1^1 \geq 5, x_1^2 \geq 5, x_2^1 \geq 4, x_2^2 \geq 4\}.$$

Es decir, la asignación del bien 1 es algún punto (x_1^1, x_2^1) *con* $x_1^1 = 5$, *y* $4 \leq x_2^1 \leq 5$, *representado en la Figura 2, con una línea vertical gruesa. La asignación del bien 2 es algún punto* (x_1^2, x_2^2) *con* $5 \leq x_1^2 \leq 16, x_2^2 = 4$, *representado en la Figura 2 con una línea horizontal gruesa. Obsérvese, que en este caso* $p^\alpha(T(C, E, \alpha)) = \{(5,4)\} = C(v^\alpha)$.

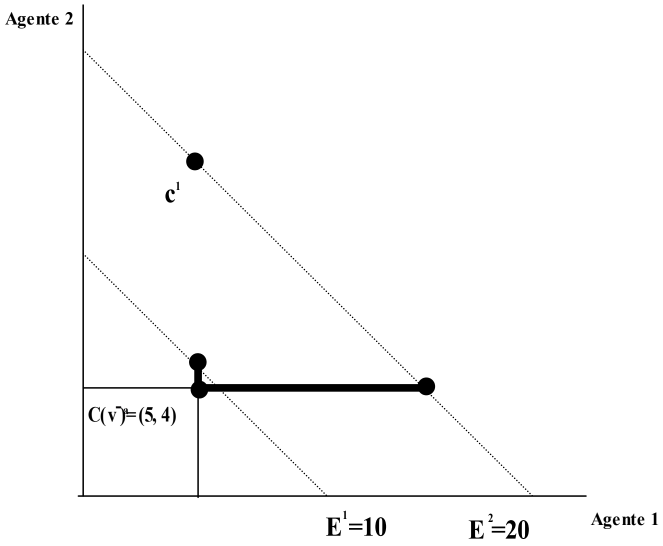

Figura 3: Conjunto de asignaciones globales estables

Ahora las únicas asignaciones globales estables y eficientes son $X^1 = (5,5)$ *y* $X^2 = (16,4)$.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado una extensión multidimensional de los problemas clásicos de bancarrota. Nos hemos centrado en investigar las implicaciones de que los agentes tengan preferencias individuales sobre los resultados que no sean aditivas, en concreto, suponemos que las preferencias de todos los agentes se representan por funciones maxmin.

Hemos definido un juego de utilidad transferible, donde el valor de la coalición representa el mejor pago total que los miembros de la coalición pueden obtener en los diferentes bienes. La lógica de este enfoque es la siguiente: Si un agente individualmente entra en la situación, querrá tomar una cantidad de cada bien tal que su utilidad total (su pago), sea máxima. Lo que hacemos es suponer que el agente toma las cantidades mínimas que necesita de cada bien para alcanzar este máximo.

Para el juego así definido, describimos el conjunto de asignaciones globales que presentan una condición de estabilidad, en el sentido de que cada coalición garantiza al menos su valor en el juego, es decir, el mejor pago que puede obtener sin cooperar con los agentes fuera de la coalición. El resultado central es que este conjunto de asignaciones globales estables puede obtenerse mediante la resolución de un único problema de programación lineal, el correspondiente a la maximización de los pagos totales de todo el conjunto de agentes.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AUMANN, R. J., MASCHLER, M. (1985): Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. Journal of Economic Theory, 36, 195-213.
- CALLEJA P., BORM P., HENDRICKX R. (2005) Multi-issue allocation situations. European Journal of Operational Research 164, 730-747.
- GONZÁLEZ-ALCÓN C., BORM P., HENDRICKX R. (2007) A composite run-to-the-bank rule for multi-issue allocation situations. Mathematical Methods of Operations Research. Vol. 65, n.2, 339-352.
- LORENZO-FREIRE S., CASAS-MÉNDEZ B., HENDRICKX R. (2009) The two-stage constrained equal awards and losses for multi-issue allocation situations. To appear in TOP.
- MORENO-TERNERO J.D. (2009) The Proportional Rule for Multi-Issue Bankruptcy Problems. Economics Bulletin 29, 483-490.
- O'NEILL B. (1982) A problem of rights arbitration from the Talmud. Mathematical Social Sciences 2, 345-371.