Determinación de la producción de una nueva gama de productos

Mocholí Arce Manuel (manuel.mocholi@uv.es
Dpto. Matemáticas para la Economía y la Empresa
Navarro Miquel, Valentín (valentin.navarro@uv.es)
Dpto. Finanzas empresariales
Universidad de Valencia

RESUMEN

El trabajo aborda la problemática de la determinación de la viabilidad de una nueva gama de productos. Se introduce la incertidumbre en las condiciones de mercado, mediante el uso de escenarios y se plantea un modelo para obtener una solución robusta que garantiza la viabilidad.

ABSTRACT

In this paper we study the feasibility of a new range of products. We introduce uncertainty in market conditions, using scenarios and present a model to obtain a robust solution that ensures the feasibility.

***Palabras claves*:**
Planificación de la producción; Escenarios; Optimización robusta

***Área temática*:** Optimización, métodos cuantitativos del fenómeno económico

1. INTRODUCCIÓN

En el lanzamiento de una nueva gama de productos, en la empresa se deben tener en cuenta una serie de aspectos que van, desde los ligados con la producción y sus características técnicas, los financieros y la rentabilidad que pueden generar los nuevos productos, hasta los comerciales y su competencia frente a otras empresas.

Cuando una empresa se plantea la renovación total o parcial de una gama de productos debe analizar si está en condiciones de poder asumir las inversiones necesarias en activo circulante y fijo y que éstas tengan una rentabilidad adecuada al riesgo que se asume. Para ello, la empresa realizará un análisis financiero de sus inversiones con los métodos tradicionales, al tiempo que calculará el umbral de rentabilidad o punto muerto [Navarro, Bolado (1999)] que le permita cubrir los costes fijos por producto, los costes fijos por familia o gama de productos y los costes estructurales de la empresa [Cantalapiedra (2001, 2008), Copeland, Koller, Murrin (2007)].

El modelo de determinación de la producción de una nueva gama de productos que proponemos tiene asociada toda la incertidumbre en la posible demanda que se pueda dar en la realidad. Si bien existen otros parámetros que también soportan un cierto grado de incertidumbre –precios de venta y costes de producción, productividad–, consideramos que la demanda es el factor que mayor grado de incertidumbre soporta. El motivo es que pueden aparecer nuevos productos que sean competencia directa sobre los nuestros y esto supondrá un cambio drástico en la planificación financiera y estratégica de la empresa.

Aunque se trate de una nueva gama de productos, el desconocimiento de la demanda futura no tiene por qué ser total dado que en alguna medida, podremos obtener información que nos permitan reducir la incertidumbre mediante estudios de mercado, estudios de capacidad de penetración de nuestros productos o estudios de las debilidades de nuestra competencia, etc. En base a este tipo de estudios podemos tener una idea aproximada acerca de la demanda futura de nuestros productos bajo determinados escenarios. Es por ello que, el análisis de las demandas esperadas que pueden llegar a producirse, lo vamos a abordar mediante el planteamiento de escenarios distintos obtenidos en función de los distintos estudios realizados.

Para poder determinar la posible demanda de los productos se puede recurrir a la utilización de sistemas de expertos ya que son uno de los sistemas más significativos que se dan hoy en día en la instrumentalización de los procesos productivos dentro de las empresas. La información recogida de los expertos supondrá una serie de *s* escenarios [Manso (1996), Fernández Güell (2004)] para la empresa, cada uno de los cuales, de forma aislada, es un problema de programación lineal determinista cuyo objetivo será el número de unidades de cada producto *k* que deben venderse para poder cubrir la totalidad de costes fijos individuales, grupales o estructurales.

Ahora bien, una vez obtenidos los resultados de cada uno de los *s* escenarios podemos abordar la incertidumbre mediante modelos y métodos que aceptan incertidumbre en los datos, como el análisis de sensibilidad, análisis paramétrico, modelos dinámicos y modelos estocásticos. Un resumen de ellos aparece en el artículo de Owen y Daskin (1998). Más recientemente se han aplicado también técnicas borrosas [Canós, Ivorra y Liern (1999, 2001)] y técnicas de optimización robusta [Kouvelis y Yu (1997), Chen y Lin (1998), Serra y Marianov (1998), Canós y Mocholí (1998), Averbakh y Berman (2000), Canós, Mocholí, Navarro (2003), Mulvey, Shetty. (2004), Mocholí, Navarro (2005)].

Centrando nuestro problema en estas últimas, las técnicas de optimización robusta, consideran que la incertidumbre es una característica inherente al sistema y que, en lugar de eliminarla, es mucho más provechoso hacer un esfuerzo para estructurarla hasta donde sea posible, entenderla y manejarla.

La técnica robusta ha de seguir tres pasos [Kouvelis y Yu (1997)]:

- *Planificación de los escenarios*. Un escenario es una realización potencial de los datos inciertos del problema. La filosofía de la optimización robusta es la de estar preparados para enfrentarse a (casi) cualquier suceso futuro. Por tanto, del buen diseño de los escenarios depende el éxito o el fracaso de todo el proceso posterior.

- *Elección de un criterio de robustez*. Puesto que es imposible que sepamos que va a ocurrir en el futuro, el criterio de robustez debe llevarnos a una solución del problema satisfactoria bajo cualquier escenario.

- *Planteamiento de un modelo coordinado*. El modelo coordinado recoge el criterio de robustez, la información proporcionada por todos los escenarios y, una vez planteado, puede resolverse por técnicas conocidas.

Cuando el sujeto decisor (empresa) se plantea la obtención de una solución, el objetivo es que dicha solución sea factible y óptima para todos y cada uno de los escenarios, solución que en la práctica normalmente no existirá, en cuyo caso se trata de obtener soluciones satisfactorias, mediante el planteamiento de un modelo coordinado que obtenga soluciones que estén lo más cerca posible de la factibilidad y de la optimalidad para todos y cada uno de los escenarios, para ello, se admiten desviaciones respecto de la factibilidad y la optimalidad y se intenta minimizar ambas [Mulvey, Vanderbei y Zenios (1995)]; o bien se supone que los escenarios tienen soluciones factibles en común y sólo se permiten desviaciones respecto a la optimalidad [Kouvelis y Yu (1997)].

2. PLANTEAMIENTO DEL MODELO DE VIABILIDAD CON ESCENARIOS

De acuerdo con lo anterior aunque la incertidumbre puede afectar a todos los parámetros que intervienen en el modelo, consideraremos que los costes de producción pueden ser estimados con un grado de aproximación muy elevado en base a la experiencia de la empresa en su sistema productivo y si es necesario mediante el desarrollo de prototipos. Por este motivo, vamos a suponer que la principal fuente de incertidumbre afecta a la demanda, dado que si se trata de productos nuevos no podemos contar con experiencias pasadas al igual que podríamos hacer con los costes de producción y además nos podemos encontrar con la reacción de la competencia que puede lanzar al mercado productos similares, lo cual influye directamente sobre la demanda futura de nuestros productos. Así pues se plantea el modelo en base a escenarios de demanda que tienen en cuenta los distintos factores que pueden influir sobre ella obteniendo de esta forma para cada periodo de planificación t ($t = 1,2,...,T$), para cada producto k ($k = 1,2,...,K$) y cada escenario s ($s = 1,2,...,S$) la correspondiente demanda D^s_{tk}.

A diferencia de los modelos de punto muerto en los cuales se trata de minimizar el número de unidades totales a producir, de modo que se cubran los costes fijos y variables, el modelo que se plantea tendrá como objetivo determinar el número de unidades a producir en cada uno de los periodos de planificación t ($t = 1,2,...,T$), de cada uno de los productos k ($k = 1,2,...,K$) y para cada escenario s ($s = 1,2,...,S$) y que representaremos por PT^s_{tk}, de modo que la gama de productos sea los más amplia posible. Así pues no se trata de determinar únicamente el número de unidades a producir de aquellos productos con mayor margen de modo que se cubran la totalidad de los costes fijos y variables con el menor número de unidades posible, sino que además se pretende determinar el número de unidades a producir para cubrir sus variables más costes fijos particulares de todos aquellos productos cuyo margen sea no negativo, teniendo en cuenta que los costes variables dependen del tipo de máquina con el cual se producirán y que en conjunto se deben cubrir los costes totales de producción más fijos.

De esta forma, el objetivo no consiste únicamente en determinar la menor cantidad de productos a producir, sino además hacerlo con la más amplia gama posible, es decir incluyendo todos aquellos productos viables por si mismos.

Por otra parte, también se considera que la empresa que realiza el lanzamiento de la nueva gama de productos, es una empresa que ya está en funcionamiento y por tanto posee una infraestructura productiva que influye sobre los costes de producción de cada uno de los nuevos artículos, que dependerá del tipo de máquina utilizada en su producción y de la mano de obra necesaria en función de ésta, entre otros. Por este motivo, se considera que, al principio del periodo de planificación, la empresa dispone de un número determinado de máquinas XV_{cv} de distinto tipo o clase c ($c = 1,2,...,C$) y sus respectivas variantes[1] o modelos con distinta tecnología v ($v = 1,2,..,.V$) cada una de ellas con su correspondiente vida útil ($VUcv$).

[1] Entendemos por tipo o clase el conjunto de máquinas capaces de realizar una misma tarea por ejemplo, tornos, sierras, etc. y por variante los distintos modelos que puede tener una empresa de

Las restricciones consideradas en el modelo serán las siguientes:

Lote mínimo

La cantidad mínima a producir de un producto vendrá dada por las condiciones de producción, las cuales determinarán que no es aconsejable producir un producto concreto por debajo de una cantidad y/o por las condiciones de mercado que determinan que si la oferta de un producto es insuficiente, dicho producto no podrá captar una clientela estable y por tanto su demanda dejará de existir. En nuestro caso se ha considerado que las condiciones de mercado son más restrictivas y por tanto que la producción a realizar (PT_{tk}^{s}) en cada periodo *t*, para cada producto *k* y escenario *s* deberá ser cero o superior a un determinado porcentaje o lote mínimo (Lm) de cada una de las posibles demandas, (D_{tk}^{s}), es decir:

$$PT_{tk}^{s} \geq Lm D_{tk}^{s}\, y_{k}^{s} \qquad \forall t,k \tag{1}$$

siendo (y_{k}^{s}) la variable binaria que indica si se produce o no el producto *k* bajo el escenario *s*.

Lote máximo

Evidentemente la cantidad a producir en cada periodo de cada producto en cada uno de los escenarios (PT_{tk}^{s}), no debe superar la demanda de cada uno de los escenarios, dado que en caso contrario se produciría un excedente que no sería absorbido por el mercado.

$$PT_{tk}^{s} \leq D_{tk}^{s}\, y_{k}^{s} \qquad \forall t,k \tag{2}$$

Restricciones de maquinaría:

Producción por tipo y variante de máquina

un mismo tipo de máquina por ejemplo, modelos de tornos que se diferenciaran por su capacidad productiva.

El número de máximo de unidades (PV_{tkcv}^{s}) del producto *k*, que la empresa podrá manipular en el periodo *t*, con las máquinas del tipo *c*, variante *v*, vendrá determinado por:

$$PV_{tkcv}^{s} AV_{kcv} \quad \leq UTD\, XV_{cv} \qquad \forall c,v \tag{3}$$

siendo UTD el número de unidades de tiempo de trabajo disponibles en cada periodo *t* y AV_{kcv} el coeficiente de productividad[2] o tiempo necesario para producir una unidad del producto *k* con la máquina tipo *c*, variante *v*.

Producción total

El número total de unidades que se podrán producir de cada producto *k*, en cada periodo *t* y escenario *s* (PT_{tk}^{s}), vendrá limitado por la menor de las cantidades que se pueden producir de dicho producto, en todos los tipos de máquina *c* por las que dicho producto debe pasar para su elaboración, es decir:

$$PT_{tk}^{s} \leq \sum_{v=1}^{V} PV_{tkcv}^{s} \quad \forall t,k\,,c \qquad \forall c \in C_k \tag{4}$$

siendo C_k el conjunto de tipos de máquinas necesarias para elaborar el producto *k*, teniendo en cuenta que todos los productos no necesitan de todas las máquinas para su producción.

---

[2] En cada clase de máquina y variante (*c, v*) se pueden producir todos los productos *k* o sólo algunos de ellos; es decir, un producto no tiene porqué pasar necesariamente por todos los tipos de máquina. De esta forma, si un producto *k*, no precisa de un determinado tipo de máquina y variante su coeficiente será nulo. Esto no supone que un producto *k* se elabora solamente con una máquina, si no que pasará por la fase que le corresponda en cada uno de los tipos de máquina que corresponda.

Rentabilidad individual de los productos

Cada producto debe ser rentable, o al menos no producir pérdidas, por sí mismo, es decir, que los ingresos producidos por la venta de cada producto deberán cubrir al menos sus costes variables más sus costes fijos particulares.

$$\sum_{t=1}^{T}\left[(PT_{tk}^{s}+EF_{t-1,k}^{s}-EF_{tk}^{s})(PVP_{k}-OC_{k})\right]\geq\sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{c=1}^{C}\sum_{v=1}^{V}(PV_{tkcv}^{s}CPV_{kcv})+y_{k}^{s}CFP_{tk}\right]\forall k \quad (5)$$

donde: $EF_{t-1,k}^{s};EF_{tk}^{s}$ representan las existencias iniciales y finales en cada periodo t y producto k, bajo el escenario s, siendo EF_{0k}^{s} un dato del modelo.

PVP_{k}; OC_{k} son el precio de venta y otros costes (distribución, comercialización, etc.) del producto k.

CPV_{kcv}, es el coste de producción variable de una unidad del producto k, imputable a la máquina tipo c, variante v. Dicho coste lo obtenemos a partir de la siguiente ecuación:

$$CPV_{kcv}=\left[\frac{PCV_{cv}}{VU_{cv}}UTD\right]AV_{kcv}FCV \quad (6)$$

siendo, PCV_{cv} el coste de adquisición de las máquinas del tipo c, variante v y FCV, representa la repercusión del coste de las máquinas por unidad de tiempo trabajado.

CFP_{tk}, representa el coste fijo para cada producto k y periodo t.

Ecuaciones del punto muerto

Se exige que los ingresos obtenidos por ventas cubran periodo a periodo los costes de producción variables más la suma de los costes individuales de cada producto y los fijos o estructurales de la empresa, es decir:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{K}\left[(PT_{tk}^{s}+EF_{t-1,k}^{s}-EF_{tk}^{s})(PVP_{k}-OC_{k})\right]\geq\\&\sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{c=1}^{C}\sum_{v=1}^{V}(PV_{tkcv}^{s}CPV_{kcv})+y_{k}^{s}CFP_{tk}\right]+CF_{t}\qquad\forall t\end{aligned} \quad (7)$$

Ecuaciones sobre la demanda

Con este bloque de ecuaciones se plantea que la oferta para cada periodo *t* y producto *k* (producción del periodo más existencias iniciales menos existencias finales) debe ser como máximo la demanda de dicho producto para cada uno de los periodos, de modo que si la oferta es menor que la demanda se produce una cobertura (desviación) por defecto que representaremos por DV_{tk}^{s} , si se decide no producir un producto *k*, dichas desviaciones serán cero, es decir:

$$PT_{tk}^{s} + EF_{t-1,k}^{s} - EF_{tk}^{s} = D_{tk}^{s}\ y_{k}^{s} \text{ - } DVd_{tk}^{s} \qquad \forall t,k \tag{8}$$

Estas desviaciones son las que posteriormente trataremos de maximizar en la función objetivo.

Función objetivo

La función objetivo clásica del punto muerto o umbral de rentabilidad consiste en minimizar la suma del número de unidades a producir, pero dado que en nuestro caso, además se pretende que la cobertura de los costes se satisfaga produciendo la mayor variedad posible de productos la función objetivo elegida consiste en maximizar la suma de las desviaciones en la cobertura de demanda, es decir:

$$Max \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} DVd_{tk}^{s} \tag{9}$$

Dado que las desviaciones son la diferencia entre la oferta y la demanda y esta última viene dada, maximizar las desviaciones equivale a minimizar la producción, pero como hemos visto en el apartado anterior si no hay producción, la desviación también es cero por tanto al maximizar las desviaciones se obliga a producir la menor cantidad posible del mayor número de productos que cubran sus costes fijos y variables de acuerdo con las ecuaciones (5).

Así pues el modelo a resolver para cada uno de los escenarios es el siguiente:

$$Max \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} DVd_{tk}^{s}$$

s.a: $\quad PT_{tk}^{s} \geq LmD_{tk}^{s}\ y_{k}^{s} \qquad \forall t,k$

$$PT_{tk}^{s} \leq D_{tk}^{s}\ y_{k}^{s} \qquad \forall t,k$$

$$PV_{tkcv}^{s} AV_{kcv} \quad \leq UTD\ XV_{cv} \qquad\qquad \forall c,v$$

$$PT_{tk}^{s} \leq \sum_{v=1}^{V} PV_{tkcv}^{s} \qquad \forall t,k\,,c \qquad \forall c \in C_{k}$$

$$\sum_{t=1}^{T}\left[(PT_{tk}^{s} + EF_{t-1,k}^{s} - EF_{tk}^{s})(PVP_{k} - OC_{k})\right] \geq \sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{c=1}^{C}\sum_{v=1}^{V}(PV_{tkcv}^{s}CPV_{kcv}) + y_{k}^{s}CFP_{tk}\right] \forall k$$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[(PT_{tk}^{s} + EF_{t-1,k}^{s} - EF_{tk}^{s})(PVP_{k} - OC_{k})\right] \geq$$
$$\sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{c=1}^{C}\sum_{v=1}^{V}(PV_{tkcv}^{s}CPV_{kcv}) + y_{k}^{s}CFP_{tk}\right] + CF_{t} \qquad\qquad \forall t$$

$$PT_{tk}^{s} + EF_{t-1,k}^{s} - EF_{tk}^{s} = D_{tk}^{s}\ y_{k}^{s} \text{ - } DVd_{tk}^{s} \qquad \forall t,k$$

3. PLANTEAMIENTO DEL MODELO DE VIABILIDAD COORDINADO

Las soluciones de los modelos del apartado anterior sólo son válidas para el escenario para el cual han sido obtenidas, pero dado que desconocemos a priori cuál va a ser el escenario que se va a producir se trata de plantear un nuevo modelo que tenga en cuenta esta circunstancia y obtenga soluciones satisfactorias para el conjunto de los escenarios, es decir nos proteja ante la incertidumbre en la demanda, al tiempo que la solución obtenida, sea cual sea el escenario que se produzca, difiera lo mínimo posible de la solución que se habría adoptado de haber conocido de antemano el escenario que se iba a producir. Para lo cual se planteará un modelo robusto que minimiza el número de unidades a producir con la mayor variedad posible (optimalidad) y al mismo tiempo minimice las infactibilidades respecto de cada escenario (falta de cobertura de costes).

Es evidente que la producción a realizar para cada periodo y producto deberá ser mayor o igual que la menor de todos los escenarios:

$$D\min_{tk} = \min_{s}\left\{D_{tk}^{s}\right\} \qquad \forall t,k \tag{10}$$

e inferior a la mayor de las demandas:

$$D\max_{tk} = \max_{s}\left\{D_{tk}^{s}\right\} \quad \forall t,k \tag{11}$$

por tanto, la oferta (cantidad producida más las existencias iniciales menos las existencias finales), deberá estar comprendida entre estos dos valores, por tanto la producción a realizar vendrá dada por:

Lote mínimo:

$$PT_{tk}^{s} \geq Lm\ Dmin_{tk}\, y_{k} \qquad \forall t,k \tag{12}$$

Siendo y_k una variable binaria que representa si se produce o no el producto k en el modelo coordinado

Lote máximo:

$$PT_{tk}^{s} \leq Dmax_{tk}\, y_{k} \qquad \forall t,k \tag{13}$$

Restricciones de maquinaría:

Producción por tipo y variante de máquina

$$PV_{tkcv} AV_{kcv} \quad \leq UTD\ XV_{cv} \quad \forall c,v \tag{14}$$

Producción total

$$PT_{tk} \leq \sum_{v=1}^{V} PV_{tkcv} \quad \forall t,k,c \qquad \forall c \in C_{k} \tag{15}$$

Rentabilidad individual de los productos

$$\sum_{t=1}^{T}\left[(PT_{tk}+EF_{t-1,k}-EF_{tk})(PVP_k-OC_k)\right]\geq$$
$$\sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{c=1}^{C}\sum_{v=1}^{V}(PV_{tkcv}CPV_{kcv})+y_k CFP_{tk}\right]-DVPM_k^s \qquad \forall k \tag{16}$$

En este caso se admite que algún producto para algún escenario particular pueda no ser viable, es decir que no llegue a cubrir sus costes de producción mas los fijos particulares, produciéndose en consecuencia una falta de cobertura de dichos costes que representamos por $DVPM_k^s$.

Ecuaciones del punto muerto:

Aunque se admite que un producto pueda nos ser viable en algún escenario particular si que se exige la viabilidad global de la gama de productos, por tanto esta ecuación será:

$$\sum_{k=1}^{K}\left[(PT_{tk}+EF_{t-1,k}-EF_{tk})(PVP_k-OC_k)\right]\geq$$
$$\geq\sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{c=1}^{C}\sum_{v=1}^{V}(PV_{tkcv}CPV_{kcv})+y_k CFP_{tk}\right]+CF_t \qquad \forall t \tag{17}$$

Ecuaciones sobre la demanda:

En este caso, también se admite que la oferta necesaria, para que un producto cubra sus costes, sea superior a la demanda de algún escenario particular, para lo cual se añade, respecto a la misma ecuación del apartado anterior, una desviación que recoge el exceso en la cobertura de demanda (DVe_{tk}^s), por tanto la ecuación queda como sigue:

$$PT_{tk}+EF_{t-1,k}-EF_{tk}=D_{tk}^s\ y_k^s - DVd_{tk}^s + DVe_{tk}^s \qquad \forall s,t,k \tag{18}$$

Para evitar que ambas desviaciones puedan tomar valor y compensarse, añadimos las siguientes ecuaciones para garantizar al menos una de las dos desviaciones será cero:

$$\begin{aligned} &DVd_{tk}^{s} \le yc_{tk} M && \forall s,t,k \\ &DVe_{tk}^{s} \le (1-yc_{tk})M && \forall s,t,k \end{aligned} \tag{19}$$

donde: yc_{tk}, es una variable binaria que representa la codificación del condicional de las desviaciones y M un número suficientemente grande que nos permita obtener la desviación correspondiente si se produce el producto k, en el periodo t.

A partir de las ecuaciones anteriores nos planteamos la definición de la función objetivo en el modelo de determinación de la producción coordinado que persiga dos objetivos simultáneos:

- Optimalidad, es decir, maximizar las desviaciones por defecto respecto de la demanda (DVd_{tk}^{s}), lo que ya hemos visto que equivale a minimizar la producción.
- Factibilidad. minimizar las coberturas por exceso de las demandas (DVe_{tk}^{s}) y la falta de cobertura del punto muerto individual ($DVPM_{k}^{s}$):

Con el fin de compatibilizar los criterios de optimalidad y factibilidad proponemos como función objetivo para nuestro modelo una combinación lineal convexa de ambos objetivos, es decir:

$$\begin{aligned} &Max\, Z = \lambda \sum_{s=1}^{S} \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} DVd_{tk}^{s} + \\ &(1-\lambda) FP\left[-\left\{ \sum_{s=1}^{S} \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} DVe_{tk}^{s} \right\} - \left\{ \sum_{s=1}^{S} \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} DVPM_{k}^{s} \right\} \right] \end{aligned} \tag{20}$$

De modo que cuando λ=0, lo que se persigue es la optimalidad, es decir, maximizar las desviaciones, o lo que es lo mismo minimizar las unidades a producir con la mayor variedad posible de productos sin importarnos que para conseguir esto alguno de los productos no sea viable pos si mismo en alguno de los escenarios. Cuando λ=1 el objetivo es la factibilidad, es decir, se pretende que todos los productos sean viables por si mismos en cualquiera de los escenarios y se cubren de forma global tanto los costes fijos como variables. Por otra parte, hemos llamado *FP* al factor de ponderación que permite homogeneizar el valor de ambas funciones.

Con todo lo anterior, el modelo coordinado completo a resolver viene dado por:

$$Max\, Z = \lambda \sum_{s=1}^{S} \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} DVd_{tk}^{s} + (1-\lambda)FP\left[-\left\{ \sum_{s=1}^{S} \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} DVe_{tk}^{s} \right\} - \left\{ \sum_{s=1}^{S} \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} DVPM_{k}^{s} \right\} \right]$$

s.a:

$$PT_{tk}^{s} \geq Lm\, Dmin_{tk}\, y_k \qquad \forall t,k$$

$$PT_{tk}^{s} \leq Dmax_{tk}\, y_k \qquad \forall t,k$$

$$PV_{tkcv} AV_{kcv} \quad \leq UTD\, XV_{cv} \quad \forall c,v$$

$$PT_{tk} \leq \sum_{v=1}^{V} PV_{tkcv} \qquad \forall t,k,c \qquad \forall c \in C_k$$

$$\sum_{t=1}^{T} \left[(PT_{tk} + EF_{t-1,k} - EF_{tk})(PVP_k - OC_k) \right] \geq \sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{c=1}^{C} \sum_{v=1}^{V} (PV_{tkcv} CPV_{kcv}) + y_k CFP_{tk} \right] - DVPM_{k}^{s} \qquad \forall k$$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[(PT_{tk} + EF_{t-1,k} - EF_{tk})(PVP_k - OC_k) \right] \geq \geq \sum_{k=1}^{K} \left[\sum_{c=1}^{C} \sum_{v=1}^{V} (PV_{tkcv} CPV_{kcv}) + y_k CFP_{tk} \right] + CF_t \qquad \forall t$$

$$PT_{tk} + EF_{t-1,k} - EF_{tk} = D_{tk}^{s}\, y_k^{s} - DVd_{tk}^{s} + DVe_{tk}^{s} \qquad \forall s,t,k$$

$$DVd_{tk}^{s} \leq yc_{tk} M \qquad \forall s,t,k$$

$$DVe_{tk}^{s} \leq (1 - yc_{tk}) M \qquad \forall s,t,k$$

4. EJEMPLO Y RESULTADOS

Los modelos anteriores los hemos aplicado a un ejemplo con 4 escenarios, 6 productos, 10 periodos de planificación, utilizando cuatro tipos de máquinas con dos variantes cada una de ellas[3].

Para cada escenario se reproducen a continuación, la cantidad a producir de cada producto en cada periodo.

- **Escenario 1**

	Productos				
t	1	2	3	5	6
1	60000	45000	21279	7200	8100
2	61898	13526	16028	7553	8279
3	63050	13779	21313	7902	8479
4	64672	14072	17001	8261	8799
5	65998	33135	17056	8472	9086
6	66650	32759	17690	8740	9499
7	56918	14554	18105	9176	9938
8	68598	15036	18402	9340	9981
9	71164	15045	18496	9531	10332
10	21611	15109	19091	9668	10453

[3] No se reproducen los datos completos utilizados para el ejemplo, puesto que dada la gran cantidad de datos necesarios se precisaría de una extensión superior a la permitida para la presentación de los trabajos

- **Escenario 2**

Productos

t	1	2	3	5	6
1	60000	45000	36377	7200	8100
2	64945	14005	16615	7271	8627
3	61868	14490	16940	7271	8855
4	60537	14248	16123	7690	8293
5	62137	13647	32093	7834	8714
6	58367	22057	15956	7273	8233
7	61295	46457	15873	7437	8527
8	62712	14831	15768	7504	8673
9	64860	13561	18177	7200	8272
10	43838	13718	16060	7302	8104

- **Escenario 3**

Productos

t	2	3	5	6
1	38548	34779	7200	8100
2	42621	14555	7112	7385
3	13036	15091	6807	7294
4	41287	34680	6915	7612
5	12414	15438	7144	7940
6	12227	15193	6541	8083
7	13389	19084	6832	7727
8	12931	15749	6638	7916
9	12711	30740	6760	7581
10	12849	14798	6863	7859

- **Escenario 4**

	Productos			
t	2	3	5	6
1	32339	18801	7200	8100
2	12999	19679	7096	7908
3	12517	20500	6904	7721
4	40519	48795	6786	7687
5	11556	35400	6592	7565
6	11080	13616	6351	7251
7	36766	13445	6239	7051
8	10834	13260	5988	6719
9	10315	21444	5699	6450
10	33090	12838	5609	6300

De los resultados anteriores se observa que el producto 4 no es viable para ninguno de los escenarios, dado que la producción necesaria para que dicho producto pueda cubrir sus costes de fabricación supera con mucho la demanda que se podría esperar en cualquiera de los escenarios. Respecto al producto 1 vemos que sólo se produce en los escenarios 1 y 2 que son los escenarios con mayor demanda y en ellos la cantidad a producir se aproxima en algunos periodos a la demanda esperada, aunque sin llegar a ella, mientras que para los escenarios 3 y 4 al ser escenarios con menor demanda esperada la producción máxima del producto uno no le permite ser viable por si mismo.

Respecto a los productos 5 y 6 se observa que se producen en todos los escenarios, si bien ambos casos su producción se ajusta al lote mínimo para todos los escenarios, dado que aunque son productos viables su margen de beneficio por unidad es inferior al de los productos 2 y 3.

Los productos 2 y 3 se producen en cantidades superiores al lote mínimo dado que son los productos más rentables y por tanto con los que es necesario un menor número de unidades para cubrir los costes fijos propios y fijos totales de la empresa. De haber utilizado como función objetivo la minimización de las unidades a producir (punto muerto clásico) evidentemente hubiéramos obtenido que sólo se producían estos dos productos, pero no hubiéramos tenido información acerca de la viabilidad del resto, dado que los costes de producción dependen de las máquinas con las cuales se procesen cada uno de ellos y por tanto dependen de la utilización de estas en cada escenario.

En el modelo coordinado las unidades a producir para cada producto en cada periodo vienen dadas por la siguiente tabla

		Lambda								
K	T	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	1	0	0	0	0	0	18000	18000	18000	18000
	2	0	0	0	0	0	16749	16749	16749	16749
	3	0	0	0	0	0	16240	16240	16240	16240
	4	0	0	0	0	0	17403	17403	17403	17403
	5	0	0	0	0	0	16597	16597	16597	16597
	6	0	0	0	0	0	15777	15777	15777	15777
	7	0	0	0	0	0	15341	15341	15341	15341
	8	0	0	0	0	0	15167	15167	15167	15167
	9	0	0	0	0	0	14684	14684	14684	14684
	10	0	0	0	0	0	14030	14030	14030	14030
2	1	45000	45000	45000	45000	45000	13500	13500	13500	13500
	2	19090	19090	19090	19090	19090	12786	12786	12786	12786
	3	12517	12517	12517	12517	12517	45067	45067	45067	12517
	4	12156	12156	12156	12156	12156	12156	12156	12156	12156
	5	11556	11556	11556	11556	11556	11556	11556	11556	11556
	6	36934	36934	36934	36934	36934	40611	40611	40611	11080
	7	40377	40377	40377	40377	40377	36701	36701	36701	11030
	8	10834	10834	10834	10834	10834	10834	10834	10834	10834
	9	13624	13624	13624	13624	13624	10315	10315	10315	10315
	10	9927	9927	9927	9927	9927	18490	18490	18490	9927
3	1	18410	18410	18410	18410	18410	19663	19663	19663	19663

	2	32435	32435	32435	32435	32435	32536	32536	32536	33541
	3	14760	14760	14760	14760	14760	14760	14760	14760	14760
	4	14639	14639	14639	14639	14639	14639	14639	14639	14639
	5	21412	21412	21412	21412	21412	21729	21729	21729	21729
	6	37117	37117	37117	37117	37117	47716	47716	47716	41298
	7	13445	13445	13445	13445	13445	19138	19138	19138	22810
	8	16651	16651	16651	16651	16651	13260	13260	13260	13260
	9	36975	36975	36975	36975	36975	13023	13023	13023	17472
	10	12838	12838	12838	12838	12838	25444	25444	25444	25708
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	7200	7200	7200	7200	7200	7200	7200	7200	7200
	2	7096	7096	7096	7096	7096	7096	7096	7096	7096
	3	6807	6807	6807	6807	6807	6807	6807	6807	6807
	4	6786	6786	6786	6786	6786	6786	6786	6786	6786
	5	6592	6592	6592	6592	6592	6592	6592	6592	6592
	6	6351	6351	6351	6351	6351	6351	6351	6351	6351
	7	6239	6239	6239	6239	6239	6239	6239	6239	6239
	8	5988	5988	5988	5988	5988	5988	5988	5988	5988
	9	5699	5699	5699	5699	5699	5699	5699	5699	5699
	10	5609	5609	5609	5609	5609	5609	5609	5609	5609
6	1	8100	8100	8100	8100	8100	8100	8100	8100	8100
	2	7385	7385	7385	7385	7385	7385	7385	7385	7385
	3	7294	7294	7294	7294	7294	7294	7294	7294	7294
	4	7612	7612	7612	7612	7612	7612	7612	7612	7612
	5	7565	7565	7565	7565	7565	7565	7565	7565	7565

6	7251	7251	7251	7251	7251	7251	7251	7251	7251
7	7051	7051	7051	7051	7051	7051	7051	7051	7051
8	6719	6719	6719	6719	6719	6719	6719	6719	6719
9	6450	6450	6450	6450	6450	6450	6450	6450	6450
10	6300	6300	6300	6300	6300	6300	6300	6300	6300

Como era de esperar el producto 4 no se produce para ningún valor de λ mientras que el producto 1 sólo se produce para λ≥0.6, produciéndose en estos casos un falta de cobertura en su punto muerto individual $DVPM_k^s$>0. Los productos 5 y 6 ajustan su producción al lote mínimo mientras que los productos 2 y 3, como se ha visto anteriormente, al ser los de mayor margen son los que más unidades se producen para cubrir los costes fijos globales.

Todas las desviaciones por exceso en demanda DVe_{tk}^s son cero para todos los productos, periodos y valor λ, lo que nos indica que no ha sido necesario realizar una oferta superior a la demanda en ningún caso.

5. CONCLUSIONES

Los modelos aquí planteados forman parte de un proyecto más amplio en el cual se pretende determinar, no sólo la viabilidad de los productos que es lo que aquí se plantea sino la conveniencia de adquirir nueva maquinaria para producir dichos productos y la forma de financiarla, con el objetivo de maximizar el Valor Actual Neto de las inversiones o lo que es lo mismo los beneficios de la empresa. Por este motivo no es útil el modelo clásico del umbral de rentabilidad tradicional, dado que no nos da información acerca de la viabilidad de los productos.

Por otra parte el modelo coordinado nos proporciona información de ciertos productos que aunque a priori podrían tener una rentabilidad dudosa bajo ciertos escenarios, no es conveniente descartar a priori, dado que aunque su margen es positivo, se necesita una mayor oferta para cubrir sus costes fijos, pero en un contexto general en el cual se plantee la variación del proceso productivo, adquisición de nueva maquinaria, el margen de dicho producto podría mejorar (en ningún caso podrá ser peor que el calculado por el modelo con la maquinaria actual) y por tanto dicho producto deber ser incluido junto con el resto en los planes de viabilidad de la empresa.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CANOS, M. J., MOCHOLI, M. y NAVARRO, V. (1999): "Optimización de planes de inversión", Actas del XIII Congreso Nacional AEDEM y IX Congreso Hispano-Francés. Universidad de la Rioja. Logroño. La Rioja.
- CANOS, M. J., MOCHOLI, M. y NAVARRO, V. (2003): "Fondos propios: una aplicación mediante la optimización robusta", Análisis Financiero, N. 92, pp. 94-102.
- CANTALAPIEDRA, M. (2001): Manual de gestión financiera para pymes. Cie Inversiones Editoriales Dossat 2000. Madrid.
- CANTALAPIEDRA, M. (2008): "Diseño de un modelo de planificación financiera propio", Estrategia Financiera, N. 254, octubre, pp. 18-23.
- COPELAND, T; KOLLER, T. y MURRIN, J. (2007): Valoración de empresas: medición y gestión del valor**.** Ediciones Deusto. Barcelona.
- FERNANDEZ, J. M. (2004): El diseño de escenarios en el ámbito empresarial. Pirámide. Madrid.
- KOUVELIS, P. y YU, G. (1997): Robust Discrete Optimization and its Applications. Ed. Kluwer, The Netherlands.
- MULVEY, J. M. VANDERBEI, R. J. y ZENIOS, S. A. (1995): "Robust Optimization of Large-Scale Systems". Operations Research, Vol. 43, pp. 264-281.
- MANSO, F. J. (1996) "Bases para planificar con escenarios", Estrategia Financiera, N. 116, pp. 29-38.
- MOCHOLI, M. y NAVARRO, V. (2005): "PSI: Programa de Selección de Inversiones mediante optimización robusta", Análisis Financiero, N. 99, pp. 25-34.

- MULVEY, J. M. y SHETTY, B. (2004): “Financial planning via multi-stage stochastic optimization”, *Computers and Operations Research,* N.21, pp. 1-20.
- NAVARRO, V. y FERRANDO, M. (1999): “Punto muerto multiproducto en la incertidumbre: una aplicación práctica de la teoría de los subconjuntos borrosos”, *ESIC,* N. 102, pp. 57-75.
- NAVARRO, V. (2000): “Viabilidad de nuevos productos mediante optimización por escenarios”, ESIC, N. 106, pp. 39-46.