Explicando la optimización de funciones con el uso de software de álgebra computacional y geometría dinámica

Tenorio Villalón, Ángel F. (aftenorio@upo.es)
Martín Caraballo, Ana M. (ammarcar@upo.es)
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide, Sevilla

RESUMEN

Mostraremos cómo pueden trabajarse los conceptos y procedimientos relativos a los tópicos de la optimización de funciones con la ayuda del pertinente software computacional y de representación gráfica. En particular, se expondrá la experiencia con dos herramientas concretas: Wolfram Mathematica para el tratamiento puramente computacional y GeoGebra para el tratamiento gráfico que facilite una mejor comprensión del problema mediante la visualización gráfica.

ABSTRACT

This paper shows how computational and graphical representation software can be used in the teaching of the concepts and procedures corresponding to optimization of functions. More concretely, we expound our experience using two particular tools: Wolfram Mathematica for the computational treatment and GeoGebra for the graphical handling to ease a better understanding via graphical visualization.

***Palabras claves*:**

Docencia asistida por ordenador; optimización de funciones; tratamiento computacional; representación gráfica; resolución de problemas.

***Área temática*:** A1 Metodología y Docencia.

1. INTRODUCCIÓN

En la disciplina del Análisis Matemático, la optimización de funciones (tanto de una como de varias variables) es uno de los problemas más clásicos a estudiar y resolver. En parte este interés se debe a la modelización de fenómenos reales mediante funciones y a la necesidad de conocer cómo se podría obtener el mejor comportamiento del fenómeno en base a los factores de los que depende éste. Por ejemplo, cuando una empresa estudia los niveles de coste de su producción en base a los distintos factores que intervienen en dicha producción (e. g. salarios, materia prima, impuestos…), está interesada en poder tomar una decisión sobre las imputaciones presupuestarias que hará a los distintos factores con el fin de obtener el menor coste posible. Igualmente, podríamos plantear el problema con niveles de beneficio y ahora se buscaría obtener las imputaciones para el mayor nivel de beneficio posible.

Este tipo de problemas los resuelve la optimización matemática. El fenómeno que se quiere estudiar (en los ejemplos anteriores el coste o el beneficio de la empresa) se modeliza mediante una función real de varias variables $\boldsymbol{f}:\Re^{n} \to \Re$ en la que las variables de la función representan los distintos factores que afectan al fenómeno y la expresión algebraica de $\boldsymbol{f}$ se corresponde con la relación que existe (o se deduce empíricamente) entre dichos factores. Por tanto, si lo que queremos es el mayor (o el menor) valor que alcanza el fenómeno estudiado nos limitamos a optimizar la función.

Al ser uno de los problemas clásicos del Análisis Matemático, la optimización es uno de los contenidos habituales del Cálculo en todas las titulaciones en las que se cursan asignaturas de matemáticas. Dependiendo del nivel de formación matemática que debe de recibir el alumnado, los conceptos y procedimientos se tratan con mayor o menor profundidad y formalismo. Sin embargo, no resulta extraño que el tratamiento de estos contenidos se haga desde una perspectiva tradicional usando algoritmos de "lápiz y papel", de tal modo que el alumnado debe realizar todos los cálculos a mano sin ayuda de un sistema algebraico computacional (SAC). El uso de SAC permite, como ya indicó Pérez Jiménez (2005), que nuestro alumnado se centre en mostrar sus competencias conceptuales y procedimentales sobre la temática tratada y su resolución no esté condicionada por sus problemas en la realización de operaciones y cálculos. De este modo, el uso de un software como complemento de la actividad del estudiante permite centrar nuestra atención en el proceso mental y lógico que sigue nuestro alumnado para resolver el problema de manera razonada.

Pero el uso de ordenadores y de software para el tratamiento de problemas matemáticos no debe basarse en lo indicado anteriormente, sino que la formación de nuestro alumnado debe ser la apropiada para el siglo en el que viven y, por tanto, el desarrollo de las competencias digitales para la resolución de problemas matemáticos debe estar presente en nuestra actividad docente tal y como plantean, entre otros, Montero (2006), Tenorio (2010) y Martín-Caraballo y Tenorio (2011). El tratamiento matemático que transmitimos a nuestro alumnado no se puede limitar al utilizado en el s. XIX sino que debemos ir incorporando las técnicas, recursos y procedimientos que van apareciendo y que conllevan una modificación en el tratamiento y la resolución de problemas, los cuales deberían también reflejarse en el paradigma docente. Pero es más, el uso de software computacional es también un recurso magnífico para estudiar las competencias matemáticas del alumnado sin tener en cuenta factores previos que distorsionen una evaluación competencial tal y como exponen Oliver y Tenorio (2012) y Tenorio y Martín-Caraballo (2012).

Ante este planteamiento, el objetivo del presente trabajo es mostrar cómo el uso del software apropiado puede ser de suma utilidad en el proceso de enseñanza/aprendizaje de nuestro alumnado a la hora de tratar los contenidos y las competencias correspondientes a la optimización de funciones. Las actividades y propuestas aquí presentadas se han trabajado con nuestro alumnado en mayor o menor medida en las asignaturas en las que tenemos docencia y que abarcan tanto titulaciones técnicas como de ciencias sociales (Ingeniería Informática, Economía, Finanzas y Contabilidad y Administración y Dirección de Empresas).

2. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES OBJETIVO

En esta sección planteamos los distintos problemas de optimización que explicamos a nuestro alumnado en las Asignaturas antes referenciadas y hacemos un pequeño repaso de los conceptos y resultados que se trabajan en las distintas sesiones y para cuya mejor comprensión y asimilación puede ser de suma utilidad un software de Matemáticas tal y como se mostrará en la Sección 3.

Aunque los conceptos y procedimientos son habituales en los manuales de Matemáticas, tanto para las ingenierías como para las ciencias económicas y empresariales, haremos una pequeña descripción de los aspectos en los que centramos nuestra atención cuando usamos el software como recurso docente para la correcta adquisición de los conceptos y procedimientos, sin centrarnos en la realización de cálculos; lo cuales son necesarios para alcanzar los niveles de competencia adecuados, pero pueden trabajarse en una segunda etapa tras la correcta comprensión de los contenidos. Para una descripción completa de los métodos que se mencionan en esta sección, consúltese Pucell *et al.* (2007), Fernández *et al.* (2002), Fernández-Lechón y Castrodeza-Chamorro (1986).

Nuestro alumnado debe enfrentarse a las tres tipologías de problema de optimización que existen: la optimización propiamente dicha, la maximización (o mayoración) y la minimización (o minoración); siendo los dos últimos, casos particulares del primero en los que se buscan solo parte de las soluciones del problema de optimización completo. Los tres problemas anteriores suelen denotarse como sigue respectivamente:

$$\boldsymbol{Max}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n) \qquad \boldsymbol{Min}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n) \qquad \boldsymbol{Opt}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$$

Se dice que un punto $\underline{\boldsymbol{a}}\in\boldsymbol{Dom}(\boldsymbol{f})$ es un máximo de la función $\boldsymbol{f}$ cuando, en un entorno de $\underline{\boldsymbol{a}}$, la función toma siempre valores que no superan $\boldsymbol{f}(\underline{\boldsymbol{a}})$ (i. e. $\boldsymbol{f}(\underline{\boldsymbol{x}})\leq\boldsymbol{f}(\underline{\boldsymbol{a}})$ para todo $\underline{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{Dom}(\boldsymbol{f})$ tal que $\boldsymbol{d}(\underline{\boldsymbol{x}},\underline{\boldsymbol{a}})<\varepsilon$). Esto es fácilmente observable y comprensible para nuestro alumnado si lo exponemos gráficamente, como ocurre en las gráficas de la Figura 1 donde es fácil observar un mínimo en cada una de ellas: solamente es necesario trazar la recta paralela (resp. plano paralelo) al eje (resp. a los ejes) que permite representar a $\boldsymbol{Dom}(\boldsymbol{f})$ y ver que la gráfica queda por debajo.

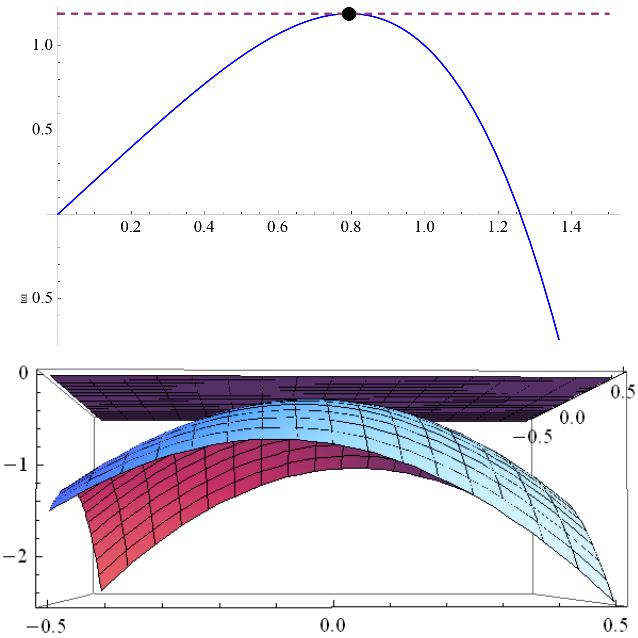


Figura 1. Ejemplos de máximos en funciones con 1 y 2 variables.

Análogamente se procede a definir el concepto de mínimo sin más que cambiar el sentido de la desigualdad (i. e. $\boldsymbol{f}(\underline{\boldsymbol{x}}) \geq \boldsymbol{f}(\underline{\boldsymbol{a}})$) y asegurar que los valores de la función $\boldsymbol{f}$ siempre superan $\boldsymbol{f}(\underline{\boldsymbol{a}})$. Ahora, la idea es que la gráfica esté siempre por encima de la recta (resp. plano) referido en el párrafo anterior tal y como se muestra en Figura 2.

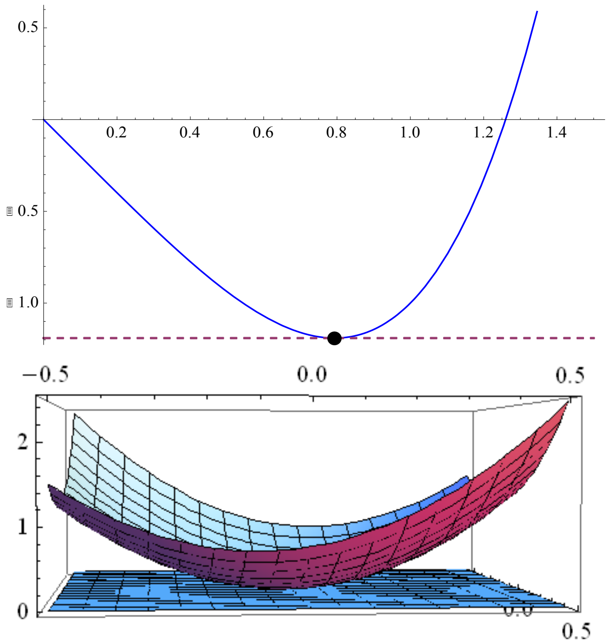


Figura 2. Ejemplos de mínimos en funciones con 1 y 2 variables.

Obviamente la idea intuitiva de máximo y mínimo (y, en general de óptimo, si no distinguimos entre máximos y mínimos) es bien simple y el alumnado podría asimilarla en dimensiones bajas mediante simulación gráfica. Es más, partiendo de una primera definición como la dada, el alumnado podría por sí mismo alcanzar la noción de óptimo global y local y de óptimo estricto y no estricto por medio de la simulación antes mencionadas con familias de funciones seleccionadas por el equipo docente para que se vayan planteando las distintas cuestiones y que, de manera autónoma y por medio de la observación, pueda ir sacando conclusiones para así afianzar mejor los conocimientos que va trabajando y adquiriendo.

Es más, en el caso de funciones de una variable, el problema de optimización puede trabajarse también en relación con el problema del crecimiento/decrecimiento de la función objetivo estudiada. Simplemente basta con orientar a nuestro alumnado indicando que estudie el comportamiento de la función en cuanto a crecimiento y decrecimiento se refiere y que relacione dicho comportamiento con el hecho que la función en un punto tenga un máximo o un mínimo. De este modo, será el alumnado el que llegue a la conclusión de que los máximos son los puntos en los que la función deja de crecer y empieza a decrecer y los mínimos son aquellos en los que ocurre lo contrario.

Existen dos resultados esenciales en la optimización de funciones objetivos: uno es el Teorema Local-Global y el otro es el Teorema de Weierstrass. El primero asegura la globalidad de los óptimos, si existen, según el tipo de función. Así, en una función convexa, los máximos son siempre globales y en una función cóncava, los mínimos son siempre globales. Por su parte, Weierstrass asegura la existencia de los dos tipos de óptimos cuando se está trabajando con conjuntos compactos.

Nuevamente, la representación gráfica con ordenador puede ser de suma utilidad para asentar estos resultados en nuestro alumnado ya que con las representaciones de las familias que previamente se le ha dado se podría pedir que deduzca las dos propiedades referenciadas.

2.1. Optimización de función objetivo en conjuntos abiertos

En base a lo ya expuesto, parece natural empezar a optimizar una función objetivo sin pedir ninguna restricción sobre las variables de la función. Es decir, trabajamos sobre todo su dominio que, en el caso del álgebra y composición de funciones elementales reales, corresponde a un conjunto abierto.

En este caso y tras haber asentado con nuestro alumnado el concepto de máximo y de mínimo, hay que presentarle procedimientos de cálculo que le permita obtener dichos puntos mediante un procedimiento algorítmico. Como es bien sabido el procedimiento simplemente consiste en: a) obtener los puntos (denominados críticos) que anulan al gradiente de la función; b) determinar el signo de la matriz hessiana de la función en los puntos obtenidos en el paso anterior. En cuanto al signo de la matriz, si ésta es definida positiva, el punto es un mínimo, mientras que si es definida negativa, el punto es un máximo. Sin embargo, cuando la matriz es indefinida, el punto no es ni máximo ni mínimo… de hecho, dependiendo de la dirección por la que nos acerquemos al punto, este se comportará en esa dirección como un máximo o como un mínimo. De esta forma, introducimos a nuestro alumnado los puntos de silla de una función.

Obviamente, este planteamiento está pensado en varias variables y no se afronta la temática como una cuestión general de varias variables, sino que primero se hace un acercamiento a la situación desde las funciones reales de una variable (usando las derivadas primeras y segundas de modo que se conecta con los procedimientos que ha debido trabajar en Bachillerato) y después se generalizan los resultados en varias variables tal y como hemos indicado.

Tras plantear el problema de optimización sin restricciones, se plantean las restricciones de desigualdad estricta, que corresponden en $\Re^n$ a la definición de conjuntos abiertos. Estaríamos hablando de un problema de optimización con la forma:

$$\begin{array}{l} \quad \textbf{\textit{Optimizar}}\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \left| \begin{array}{ll} \textbf{\textit{sujeto a}} & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) < b_1 \\ & \qquad \vdots \\ & g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) < b_m \end{array} \right. \end{array} \tag{1}$$

donde $g_i : \Re^n \to \Re$ es una función lineal, $b_i \geq 0$ es una constante real para $1 \leq i \leq m$ y el sentido de las desigualdades también podría ser el contrario (>). El conjunto determinado por las restricciones se denomina el conjunto factible sobre el que se optimiza la función objetivo f.

El alumnado debe tener muy claro (y eso es sumamente fácil de hacer con la manipulación del problema mediante representación gráfica) que la propiedad de óptimo es de tipo local para la función y que esas restricciones no añaden ninguna modificación a la determinación de dichos puntos, salvo la de comprobar que los óptimos detectados deben estar en el conjunto factible considerado.

También es necesario que el alumnado entienda que, en el caso de varias variables, la tipología de los puntos críticos cuya matriz hessiana es semidefinida no puede determinarse solo a partir del signo, debiéndose utilizar otras propiedades de la función que permitan determinar si es un óptimo o un punto de silla.

2.2. Optimización de función objetivo en frontera: método de Lagrange

No obstante, en ocasiones la optimización no se lleva a cabo en un conjunto factible abierto, sino que ésta se realiza en conjuntos cerrados. El primer tipo de cerrados que el alumnado ha de considerar corresponde a los bordes de recintos o lo que es lo mismo a conjuntos definidos por ecuaciones (y no por inecuaciones como pasaban con los abiertos en la subsección anterior). En resumen, la ecuación (1) pasaría a ser

$$\begin{array}{l} \textbf{\textit{Optimizar}}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n) \\ \left| \begin{array}{ll} \textbf{\textit{sujeto a}} & \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)=\boldsymbol{b}_1 \\ & \qquad \vdots \\ & \boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)=\boldsymbol{b}_m \end{array} \right. \end{array} \tag{2}$$

En este caso, existen dos alternativas que pueden trabajarse con el alumnado para obtener los óptimos; ambas requieren de múltiples cálculos a los que a veces nuestro alumnado le da más importancia, no centrándose en el proceso. Precisamente, el uso de un SAC permitiría reducir la importancia de los cálculos y centrar el trabajo con el alumnado en los procedimientos para una correcta comprensión y asimilación de los mismos.

La primera opción para resolver este problema de optimización consiste en resolver el sistema de ecuaciones que forman el conjunto de restricciones y la solución paramétrica del sistema sustituirla en la función objetivo, para obtener una función objetivo auxiliar con menos variables y no sujeta a restricciones. Este acercamiento al problema plantea dos problemáticas: la primera consiste en que el sistema no siempre es resoluble de manera exacta, por lo que el alumnado debería tener muy claro si puede o no resolver dicho sistema (e incluso, a veces, si interesa resolverlo); y el segundo problema reside en que hay que tener en cuenta todas las coordenadas del punto original cuando se establece el óptimo y no limitarse solo a las coordenadas correspondientes a las variables que han quedado en la función objetivo auxiliar.

La alternativa a la resolución del sistema de ecuaciones que forman el conjunto factible consiste en crear la función objetivo auxiliar, no por sustitución y supresión de variables, sino por modificación de la función objetivo $\boldsymbol{f}$ insertando de cierta manera las restricciones en las propia función objetivo. Esta alternativa, que se va a comentar a continuación, consiste en el Método de Multiplicadores de Lagrange y solventa las dos problemáticas del acercamiento expuesto anteriormente para los problemas de optimización: se puede aplicar con cualquier sistema de ecuaciones definiendo el conjunto factible y los óptimos obtenidos tienen todas sus coordenadas. No obstante, surge un nuevo problema: ahora el óptimo de la función objetivo auxiliar tiene más coordenadas ya que tiene variables auxiliares, por lo que el alumnado debe tener en cuenta la supresión de dichas variables auxiliares.

Como hemos indicado, la propuesta del método de Lagrange consiste en crear una función auxiliar $\boldsymbol{h}$ combinando la función objetivo y las restricciones. Concretamente, se introduce una variable real auxiliar λ_i por cada restricción $\boldsymbol{g_i(x_1,x_2,...,x_n)=b_i}$:

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot\left(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)-\boldsymbol{b}_i\right)$$

Esta función $\boldsymbol{h}$ se considera la función objetivo a la que ya no le afectan restricciones, siendo el conjunto factible el dominio completo de $\boldsymbol{h}$. A esta nueva función, se le aplica el procedimiento expuesto para los conjuntos abiertos sin más que tener en cuenta que el gradiente se calcula de la manera habitual y la matriz hessiana solo considerando como variables de derivación las variables de la función objetivo original.

2.3. Optimización de función objetivo sobre convexo: Teorema de Kuhn-Tucker

Desafortunadamente, en Economía, muchas veces las restricciones que satisfacen las variables de la función objetivo no corresponden a ecuaciones, sino a inecuaciones. Por tanto, el conjunto cerrado no es del tipo considerado anteriormente. No obstante, sí suele ser habitual que los conjuntos factibles cerrados usados en la optimización de funciones con significado económico correspondan a conjuntos convexos, por lo que el problema de optimización vendría dado por la modificación de la ecuación (1) como sigue:

$$\begin{array}{l} \quad \textit{Optimizar } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \left| \begin{array}{ll} \textit{sujeto a} & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_1 \\ & \quad \vdots \\ & g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_m \end{array} \right. \end{array}$$

Precisamente, el Teorema de Kuhn-Tucker busca generalizar el Método de Multiplicadores de Lagrange para resolver esta cuestión. Básicamente, este método consiste en resolver el problema no lineal como uno sin restricciones utilizando la función de Lagrange. Una vez hecho esto, si la solución óptima encontrada no cumple la totalidad o parte de las restricciones del problema se activan tales restricciones (esto puede realizarse en conjunto o secuencialmente) y se resuelve nuevamente. Esto se repite hasta llegar a un conjunto de restricciones activas cuya solución satisface también las restricciones omitidas.

Las condiciones de Kuhn-Tucker son necesarias de optimalidad local, es decir, se verifica que si x_0 es máximo local, entonces satisface las condiciones de Kuhn-Tucker para máximo y si x_0 es mínimo local, entonces satisface las condiciones de Kuhn-Tucker para mínimo. Por tanto, si un punto satisface las condiciones de Kuhn-Tucker para máximo, sólo podemos decir que es un "posible" máximo local; si en cambio, no las satisface, sí podremos asegurar que no es máximo local.

Las condiciones de Kuhn-Tucker son:

1. $\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_0)$ (esta condición obliga a que el gradiente de la función objetivo en x_0 sea combinación lineal de los gradientes de las restricciones en x_0).

2. $\lambda_i g_i(x_0) = 0 \quad \forall i$ (esta segunda condición, obliga a que los multiplicadores de Kuhn-Tucker asociados a restricciones no saturadas en x_0 sean nulos):
   i. Si la restricción g_i está saturada en x_0: ($g_i(x_0) = 0$) entonces: λ_i $g_i(x_0) = 0$ para cualquier valor de λ_i.
   ii. Si la restricción g_i no está saturada en x_0: ($g_i(x_0) < 0$) entonces la única posibilidad para que λ_i $g_i(x_0) = 0$ es que $\lambda_i = 0$.
3. $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$, si el problema es de maximizar o bien $\lambda_i \leq 0 \quad \forall i$, si el problema es de minimizar, (es decir, cuando el punto satisface Kuhn-Tucker para máximo, todos los multiplicadores deben ser positivos; cuando el punto satisface Kuhn-Tucker para mínimo, todos los multiplicadores deben ser negativos).
4. $g_i(x_0) = 0 \quad \forall i$ (esto nos dice que el punto x_0 debe satisfacer todas las restricciones del problema, es decir, debe pertenecer al conjunto de soluciones factibles del problema).

La interpretación geométrica de las condiciones de Kuhn-Tucker puede expresarse como sigue: en un punto de posible máximo, el gradiente de la función objetivo es combinación lineal positiva de los gradientes de las restricciones saturadas en x_0. Análogamente, en un punto de posible mínimo, el gradiente de la función objetivo es combinación lineal negativa de los gradientes de las restricciones que se saturan en x_0.

Sabemos que las condiciones de Kuhn-Tucker son solo necesarias en general, pero también son suficientes cuando hay convexidad.

2.4. Programación lineal

En la programación lineal, la función objetivo $\boldsymbol{f}: \Re^{\boldsymbol{n}} \to \Re$ es lineal y se establece una serie de restricciones mediante ecuaciones y/o inecuaciones lineales, entre las que debe imponerse obligatoriamente que las variables sean positivas (condición de no negatividad de las variables); i. e. condiciones del tipo $\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots,: \boldsymbol{x_n}) \leq \boldsymbol{b_i}$, $\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots,: \boldsymbol{x_n}) \geq \boldsymbol{b_i}$ o $\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots,: \boldsymbol{x_n}) = \boldsymbol{b_i}$, donde $\boldsymbol{g_i}: \Re^{\boldsymbol{n}} \to \Re$ es una función lineal y $b_i \geq 0$ una constante real para $1 \leq i \leq m$. El conjunto de restricciones determina el conjunto factible en el que queremos optimizar la función objetivo.

Formalmente, el problema al que debe enfrentarse nuestro alumnado tendría la siguiente expresión (salvo el signo de desigualdad en las restricciones determinadas con las funciones g_i):

$$\begin{array}{rl} \textbf{\textit{Optimizar}} & f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \\ \textbf{\textit{sujeto a}} & g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_m \\ & x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \cdots, n\} \end{array}$$

Existen muchos métodos para obtener los óptimos de la función objetivo en un conjunto factible en los supuestos de la programación lineal, pero en todos ellos el resultado que se utiliza es el siguiente: los vértices del conjunto factible (puntos de intersección resultantes de intersecar los conjuntos determinados por las restricciones del problema) son los candidatos a óptimo de la función objetivo y se denominan soluciones básicas. Por tanto, la resolución de un problema de programación lineal se basa en localizar las soluciones factibles y determinar cuál de ellas tiene el valor óptimo (máximo o mínimo, según proceda) en la función objetivo.

Precisamente, en este hecho se basa la técnica de resolución gráfica de los problema de programación lineal, según la cual se procede representando gráficamente el conjunto factible y posteriormente se representan las distintas curvas de nivel de la función objetivo buscando la curva del mayor o menor nivel (según busquemos el máximo o el mínimo, respectivamente) que corte al conjunto factible.

Esta metodología, que solo puede usarse para funciones objetivo con 2 o 3 variables, es de suma utilidad pedagógica para introducir la programación lineal y que el alumnado pueda experimentar con los conceptos básicos para una correcta comprensión y asimilación mediante la manipulación y simulación con la ayuda de un software de geometría dinámica (como expondremos en la Sección 3).

Como es sabido, el método del simplex es el método algorítmico con el que habitualmente se resuelve este tipo de problemas cuando se trabaja en dimensiones superiores a 3 y la representación gráfica no es aplicable. El método de simplex se centra en localizar una solución básica y determinar si existe alguna solución básica que mejore a la anterior. No entraremos en detallar los pasos del método pero sí queremos hacer énfasis en que para optimizar el esfuerzo y trabajo del alumnado sería sumamente conveniente el uso de recursos complementarios que permitieran como ya hemos dicho la simulación por parte de nuestro alumnado permitiendo ver el comportamiento del método y la decisiones que deben tomarse en los distintos pasos en base a ir modificando datos del problema a solucionar. Sin embargo, esto no sería posible si dichas simulaciones tienen que hacerse aplicando el método manualmente sin ayuda de los paquetes informáticos. En este sentido, se harán algunas indicaciones en la Sección 3 sobre herramientas computacionales existentes que permiten visualizar por parte del alumnado las distintas etapas del método y las decisiones que deben ir tomándose para obtener el óptimo buscado.

3. USO DE SOFTWARE PARA ASISTIR EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Cuando el profesorado deja de preocuparse en exceso sobre el aprendizaje correcto y formal de la ejecución manual de un algoritmo (incluida la comprobación de todas las hipótesis necesarias para su aplicación) y comenzamos a pensar que lo realmente importante es que el alumnado sea capaz de aplicar correctamente dicho algoritmo y de utilizar la respuesta que éste devuelve en el contexto del problema trabajado, es entonces cuando toma sentido el uso de los ordenadores y de software de cálculo simbólico y de geometría para el tratamiento de problemas matemáticos (Montero, 2006; Pérez-Jiménez, 2005).

Nada más lejos de nuestra intención el suprimir la explicación y tratamiento de procedimientos de la manera tradicional usando lápiz y papel. Obviamente esto es completamente necesario ya que ese aprendizaje permite adquirir una serie de competencias matemáticas que solo pueden obtenerse de ese modo. Pero sí afirmamos que las asignaturas no pueden enfocarse solo en el uso de este tipo de aprendizajes; creemos que es fundamental dar su lugar al tratamiento computacional de problemas matemáticos en las asignaturas (Martín-Caraballo y Tenorio Villalón, 2014).

Al usar un software de cálculo simbólico en nuestra práctica docente, podemos realizar preguntas al alumnado que de otro modo no podríamos hacerle y que no se centran en la simple realización correcta de cálculos (ya que los hace el ordenador), sino en la asimilación de conceptos y adquisición de competencias matemáticas. Podemos centrarnos en si el alumnado sabe cuándo y cómo deben aplicarse los métodos tratados y si sabe interpretar adecuadamente (y, por tanto, utilizar) las soluciones devueltas por el software al problema que se haya planteado. Las preguntas no deben limitarse a escribir simplemente la salida dada por el software.

El uso de software matemático en la docencia permite que el alumnado manipule por sí mismo los problemas, experimentando con diferentes ejemplos y testeando de manera autónoma lo que acontece cuando se modifican las condiciones iniciales de un problema; tales modificaciones ya no supondrían un aumento significativo del trabajo a realizar por el alumnado pues no conllevan realizar cálculos sino que simplemente será el ordenador el que procederá a recalcular todos los valores a partir de los datos modificados. De hecho, para el testeo, el alumnado solo tendría que cambiar las condiciones iniciales pertinentes y ejecutar nuevamente la aplicación. De este modo, el alumnado puede trabajar en una primera fase de aprendizaje mediante una técnica de ensayo acierto/error que le facilitará la posterior asimilación abstracta del problema en cuestión. Como ejemplos prácticos de esta metodología docente, remitimos a Martín Caraballo y Caro Chaparro (2010) o Martín Caraballo y Tenorio (2011), en los que se expone el uso del software "GeoGebra". Para el uso de esta metodología con un paquete de cálculo simbólico, el lector puede consultar Tenorio (2010) o Tenorio *et al.* (2010)

Un ejemplo de lo expuesto es la utilización del software de geometría dinámica "GeoGebra" para trabajar gráficamente la resolución de un problema de programación lineal, donde las restricciones y la región factible se representan fácilmente (Figura 3).

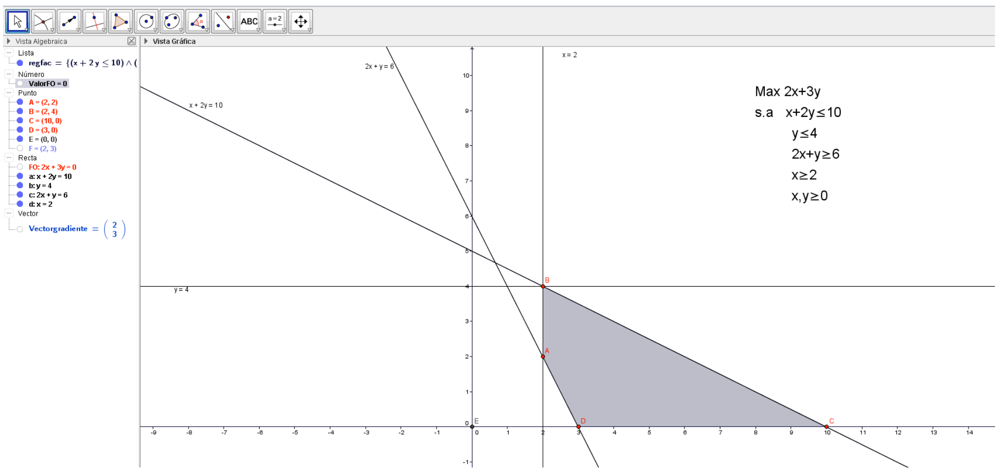


Figura 3. Representación de la región factible.

Además, podemos representar el vector gradiente (para ver el sentido de crecimiento de la función objetivo) y, creando un deslizador, se puede cambiar el valor de la función objetivo y movernos en el sentido de crecimiento del gradiente para maximizar la función objetivo (Figura 4).

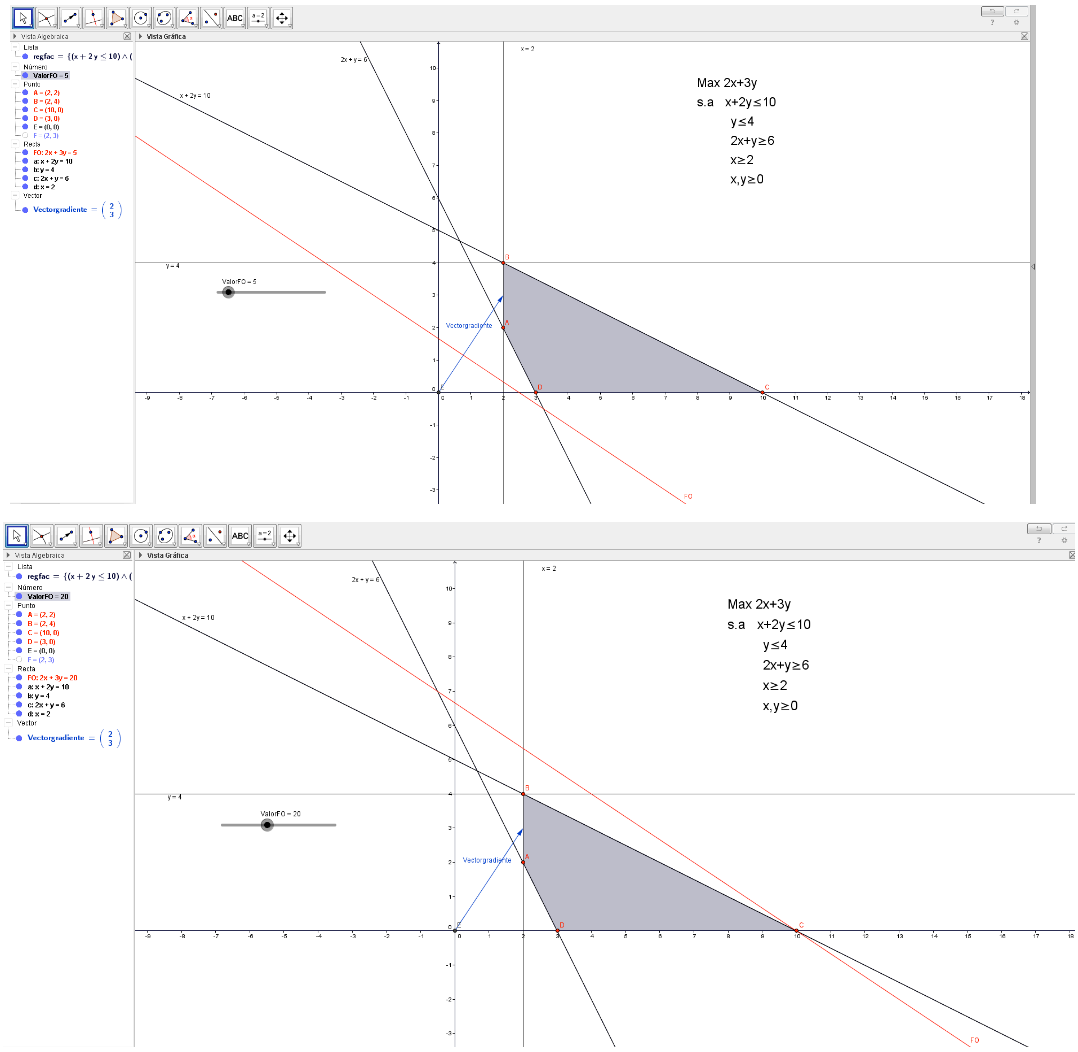


Figura 4. Moviendo la función objetivo para encontrar el máximo.

Con la utilización de este software también es fácil e intuitivo ver qué ocurre cuando van cambiando los valores de las restricciones (término independiente o coeficientes) y de los coeficientes de la función objetivo. Es decir, se puede realizar un análisis de sensibilidad y ver gráficamente qué va cambiando.

Utilizando GeoGebra, se puede conseguir con la representación gráfica del problema (de la función y de la región factible) que la asimilación del concepto de óptimo sea más sencilla. Además, se puede ver fácilmente cuándo la función pasa de creciente a decreciente y así ver la relación que existe entre óptimo y crecimiento (esto es muy intuitivo cuando se trabaja en GeoGebra con funciones de una variable). Destacar que aunque hemos utilizado un ejemplo con solo dos variables, las últimas versiones de GeoGebra permiten utilizar un módulo de representación en 3D.

Otro de los problemas planteados es el problema de programación lineal. Para resolverlos, podemos utilizar otro software como Lindo, o bien utilizar programas online como phpsimplex, que es de uso libre y gratuito, además, por supuesto de GeoGebra. En la Figura 5 puede verse una salida de phpsimplex, donde se ha resuelto el mismo problema que anteriormente realizamos con GeoGebra. La herramienta phpsimplex permite resolver el problema gráficamente o bien utilizando el método del simplex, en las Figuras 5 y 6 se ha resuelto el problema gráficamente:

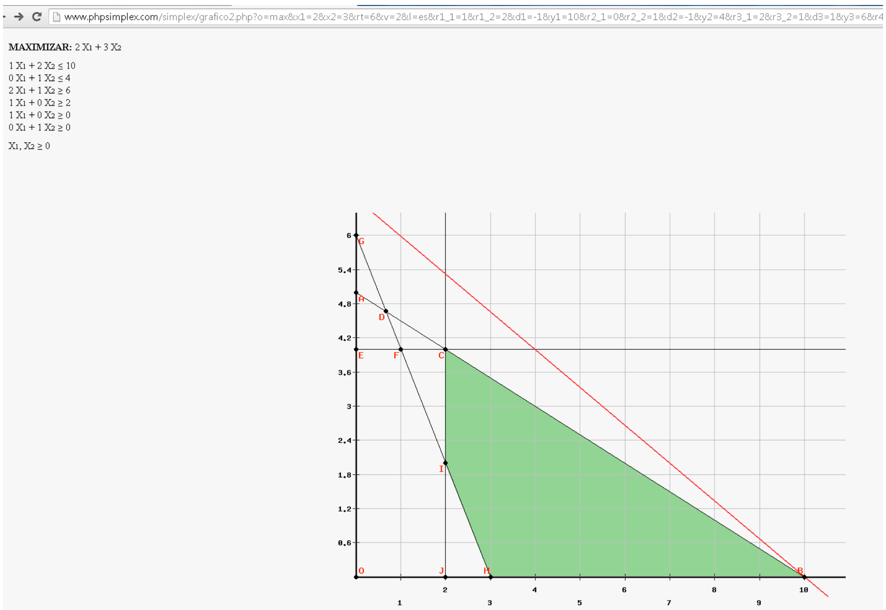


Figura 5. Conjunto factible y función objetivo en el óptimo (phpsimplex).

www.phpsimplex.com/simplex/grafico2.php?o=max&x1=2&x2=3&rt=6&v=2&l=es&r1_1=1&r1_2=2&d1=-1&y1=10&r2_1=0&r2_2=1&d2=-1&y2=4&r3_1=2&r3_2=1&d3=1&y3=6&r4_1=1&r4_2=0&d4=1&y4=2&r5_1=1&r5_2=0&d5=1&y

Punto	Coordenada X (X_1)	Coordenada Y (X_2)	Valor de la función objetivo (Z)
O	0	0	0
A	0	5	15
B	10	0	20
C	2	4	16
D	0.66666666666667	4.6666666666667	15.333333333333
E	0	4	12
F	1	4	14
G	0	6	18
H	3	0	6
I	2	2	10
J	2	0	4

☐ Mostrar resultados como fracciones.

NOTA:
En color verde los puntos en los que se encuentra la solución.
En color rojo los puntos que no pertenecen a la región factible.

Resolver mediante el método Simplex

Guardar el ejercicio

Figura 6. Resolución del problema de programación lineal (phpsimplex).

Si ahora elegimos la opción de resolución analítica del problema en phpsimplex, obtenemos las salidas que pueden verse en las Figuras 7 a 10:

www.phpsimplex.com/simplex/page2.php?o=max&x1=2&x2=3&rt=6&v=2&l=es&r1_1=1&r1_2=2&d1=-1&y1=10&r2_1=0&r2_2=1&d2=-1&y2=4&r3_1=2&r3_2=1&d3=1&y3=6&r4_1=1&r4_2=0&d4=1&y4=2&r5_1=1&r5_2=0&d5=1&y5

Pasamos el problema a la forma estándar, añadiendo variables de exceso, holgura, y artificiales según corresponda **(mostrar/ocultar detalles)**

- Como la restricción 1 es del tipo '$\leq$' se agrega la variable de holgura X_3.
- Como la restricción 2 es del tipo '$\leq$' se agrega la variable de holgura X_4.
- Como la restricción 3 es del tipo '$\geq$' se agrega la variable de exceso X_5 y la variable artificial X_9.
- Como la restricción 4 es del tipo '$\geq$' se agrega la variable de exceso X_6 y la variable artificial X_{10}.
- Como la restricción 5 es del tipo '$\geq$' se agrega la variable de exceso X_7 y la variable artificial X_{11}.
- Como la restricción 6 es del tipo '$\geq$' se agrega la variable de exceso X_8 y la variable artificial X_{12}.

MAXIMIZAR: $2 X_1 + 3 X_2$

$1 X_1 + 2 X_2 \leq 10$
$0 X_1 + 1 X_2 \leq 4$
$2 X_1 + 1 X_2 \geq 6$
$1 X_1 + 0 X_2 \geq 2$
$1 X_1 + 0 X_2 \geq 0$
$0 X_1 + 1 X_2 \geq 0$

$X_1, X_2 \geq 0$

MAXIMIZAR: $2 X_1 + 3 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7 + 0 X_8 + 0 X_9 + 0 X_{10} + 0 X_{11} + 0 X_{12}$

$1 X_1 + 2 X_2 + 1 X_3 = 10$
$0 X_1 + 1 X_2 + 1 X_4 = 4$
$2 X_1 + 1 X_2 -1 X_5 + 1 X_9 = 6$
$1 X_1 -1 X_6 + 1 X_{10} = 2$
$1 X_1 -1 X_7 + 1 X_{11} = 0$
$0 X_1 + 1 X_2 -1 X_8 + 1 X_{12} = 0$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12} \geq 0$

Pasamos a construir la primera tabla de la Fase I del método de las Dos Fases.

Continuar

Solución directa

Figura 7. Resolución analítica con phpsimplex (Paso 1).

www.phpsimplex.com/simplex/page5.php?l=es

PHPSimplex

Inicio Teoría Ejemplo Ayuda Salir Twittear 173 +1 130 Me gusta 1485

Método Simplex de las Dos Fases

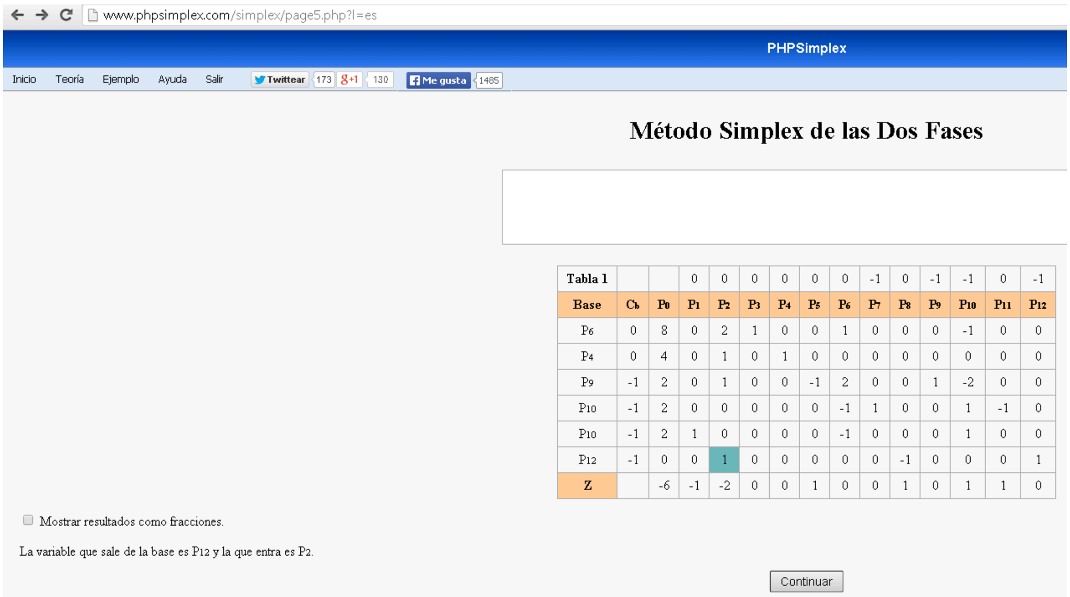
Tabla 1			0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
Base	**Cb**	**P0**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**P11**	**P12**
P3	0	10	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P4	0	4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
P9	-1	6	2	1	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
P10	-1	2	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0
P11	-1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
P12	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1
Z		-8	-4	-2	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0

Mostrar resultados como fracciones.

La variable que sale de la base es P11 y la que entra es P1.

Continuar

Figura 8. Resolución analítica con phpsimplex (Paso 2).



www.phpsimplex.com/simplex/page5.php?l=es

PHPSimplex

Inicio Teoría Ejemplo Ayuda Salir Twittear 173 +1 130 Me gusta 1485

Método Simplex de las Dos Fases

Tabla 1			0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	0	-1
Base	**Cb**	**P0**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**P11**	**P12**
P6	0	8	0	2	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
P4	0	4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
P9	-1	2	0	1	0	0	-1	2	0	0	1	-2	0	0
P10	-1	2	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	-1	0
P10	-1	2	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0
P12	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1
Z		-6	-1	-2	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0

Mostrar resultados como fracciones.

La variable que sale de la base es P12 y la que entra es P2.

Continuar

Figura 9. Resolución analítica con phpsimplex (Paso 3).

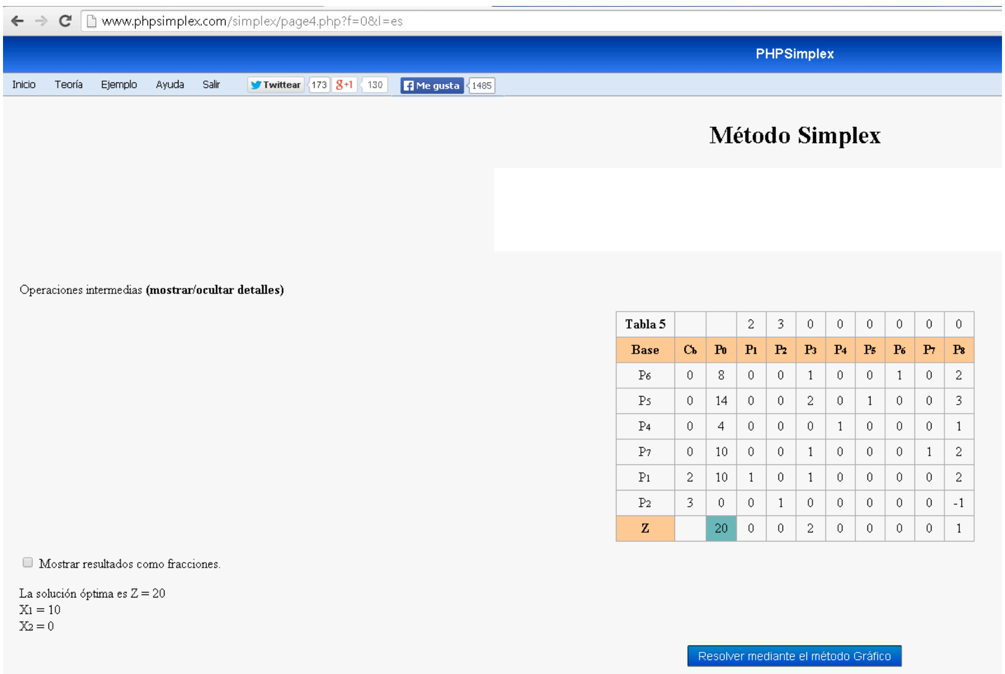


Figura 10. Resolución analítica con phpsimplex (Paso 4).

Al utilizar esta herramienta, el objetivo no es que los alumnos sepan hacer los cálculos; sino que, de forma constructiva y secuencial, entiendan cómo funciona el método del simplex y asimilen cómo van entrando o saliendo las variables de la base en cada uno de los pasos, así como cuándo se llega a la tabla óptima y por qué. De esta forma, el alumnado puede asimilar de una forma más intuitiva las competencias procedimentales del método del simplex.

Otro software que utilizamos con nuestros estudiantes es el paquete de cálculo simbólico Mathematica, que también nos puede ser muy útil en nuestra docencia así como facilitar a los estudiantes la comprensión del problema planteado. Del software Mathematica queremos destacar especialmente la herramienta “Wolfram Alpha”, que puede ser utilizada bien en el propio paquete de Mathematica o bien online. Así, si queremos resolver un problema de optimización (ya sea con o sin restricciones) lineal o no, podemos utilizar esta útil herramienta.

Como ejemplo, vamos a resolver el problema

$$\begin{aligned} &Optimizar\ x^2+y^2+y-1 \\ &\quad s.a \qquad x^2+y^2\leq 1 \end{aligned}$$

utilizando la herramienta Wolfram Alpha online (www.wolframalpha.com), podemos ver el resultado en la Figura 11:

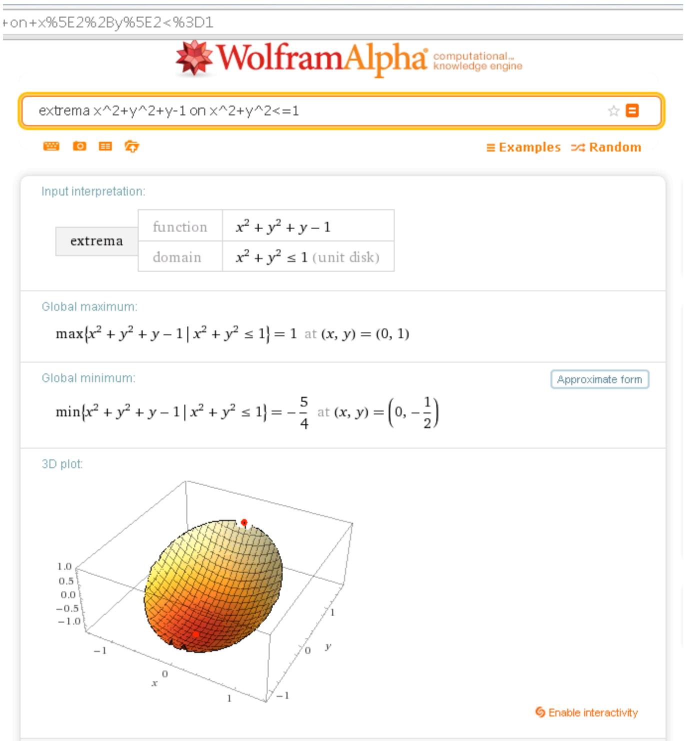


Figura 11. Resolución de un problema de programación no lineal con Wolfram Alpha.

Es importante destacar que con esta herramienta obtenemos, además de la solución óptima buscada, información adicional ya que también nos dice si los óptimos obtenidos son locales o globales, así como el valor de la función objetivo en los óptimos calculados. En nuestro ejemplo, se tiene un máximo global en el punto (0,1) y un mínimo global en el punto (0,-1/2).

Por otra parte, es sumamente útil como herramienta pedagógica que podamos ver gráficamente la función objetivo (y sus curvas de nivel) y las restricciones del problema para así poder hacernos una idea más clara del problema que queremos resolver. Esto mismo se puede hacer con GeoGebra, aunque sin tener información sobre la globalidad o no de los óptimos.

Por último en la Figura 12 puede verse la solución que nos da el software Mathematica cuando utilizamos Wolfram Alpha para resolver el siguiente problema con más de una restricción:

$$\begin{aligned} &\textit{Optimizar} \ \log(x)+\log(y) \\ &s.a \quad 10x+5y \leq 350 \ . \\ &\qquad\quad 0.1x+0.2y \leq 8 \end{aligned}$$

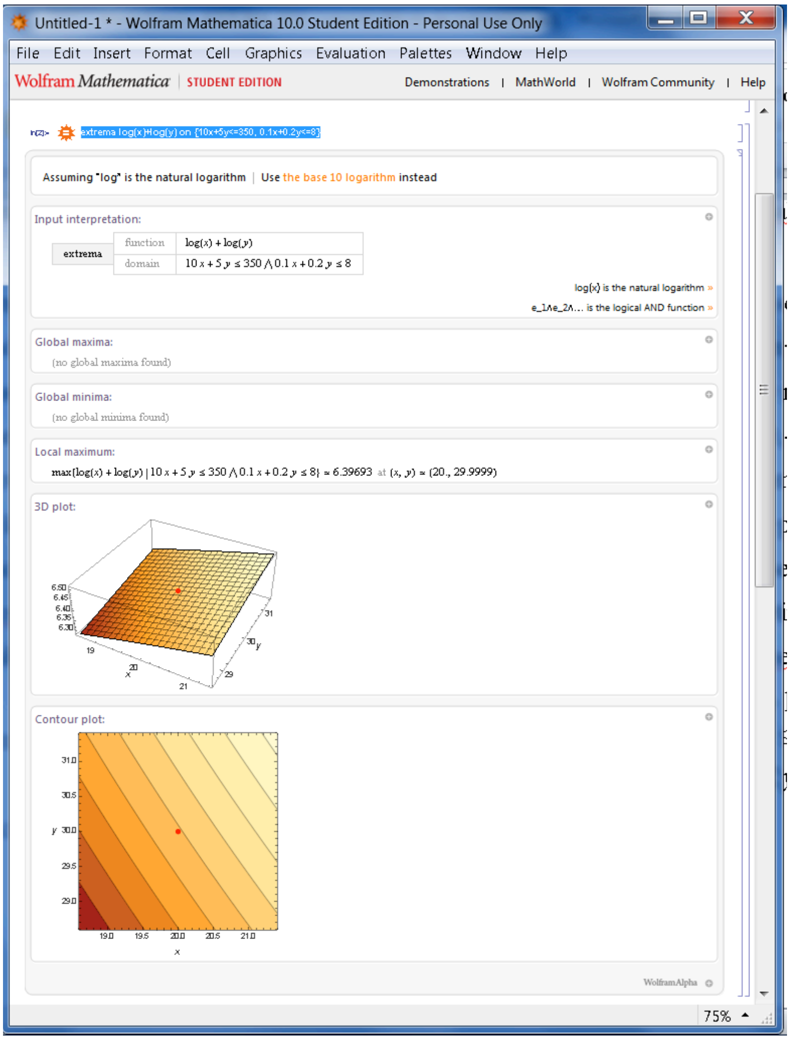


Figura 12. Resolución de un problema de programación no lineal con Wolfram Alpha dentro del entorno de Mathematica.

4. CONCLUSIONES

En aquellas asignaturas en las que se emplea software tanto de cálculo simbólico como de geometría dinámica (Mathematica y GeoGebra principalmente) es posible complementar y reforzar el proceso de enseñanza/aprendizaje del alumnado, no solo enseñando acorde a lo que demanda una sociedad digitalizada como la nuestra; sino que también nos permite, mediante la asignación de actividades durante el semestre, el comprobar la asimilación de conceptos y procedimientos por parte del alumnado; pues muchas de estas actividades pueden realizarse y/o complementarse con el uso del pertinente software para evitar las dificultades operativas que pueden tener algunos estudiantes. Además, el uso de un software de geometría dinámica es también una herramienta eficaz para que el alumnado pueda desarrollar, siempre que sea posible, una visión espacial y geométrica del problema a resolver; con lo que se favorece la comprensión de dicho problema puesto que lo puede visualizar y no se trata de una cuestión abstracta, que suelen ser de suma dificultad para los estudiantes pero que son esenciales en la formación matemática que debe recibir en el nivel universitario.

Por último, nos gustaría resaltar que el alumnado presenta algunas dificultades en el manejo de paquetes de cálculo simbólico. La principal es el rechazo del alumnado a la utilización de tales programas, aun cuando su uso es bastante intuitivo (como es el caso de GeoGebra). Aunque existe, este rechazo es significativamente menor cuando estamos trabajando con estudiantes de los grados en Ingeniería y, en especial, en las Ingenierías Informática en las son bastante favorables al uso del ordenador y al tratamiento computacional de los problemas. Respecto al software Mathematica, existe la dificultad añadida del idioma, puesto que la versión estudiante está en inglés y a parte del alumnado esto le supone una dificultad añadida.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- FERNÁNDEZ-LECHÓN, R. y CASTRODEZA-CHAMORRO, C. (1986). “Programación Lineal”. Ariel: Barcelona.
- FERNÁNDEZ, C., VÁZQUEZ, F.J. y VEGAS, J.M. (2002). “Calculo diferencial de varias variables”. Thomson: Madrid.
- MARTÍN CARABALLO A.M. y CARO CHAPARRO A. (2010). “Web dinámica con GeoGebra: ejemplo de aplicación de la integral en la economía”. Epsilón: Revista de la SAEM THALES 74, 79-92.
- MARTÍN-CARABALLO, A.M y TENORIO, A.F. (2011). “GeoGebra-based activities for teaching numerical iterative methods of nonlinear equations”. En ICERI2011 Proceedings. IATED: Madrid, pp. 1027-1036.
- MARTÍN-CARABALLO, A.M y TENORIO, A.F. (2014). “Evaluación de competencias matemáticas básicas mediante resolución de problemas con ayuda de paquetes de cálculo simbólico”. En I Seminario Iberoamericano de Innovación Docente de la Universidad Pablo de Olavide, Sevilla.

- MONTERO, L. (2006). “Enseñanza de la Matemática dominada por algoritmos versus una enseñanza más conceptual”. En Actas digitales del I Encuentro de Enseñanza de la Matemática. Universidad Estatal a Distancia: Costa Rica.
- OLIVER, E y TENORIO, A.F. (2012). “Evaluación continua de una asignatura de contenido matemático mediante la técnica de portafolios y usando un paquete de cálculo simbólico”. Revista UPO INNOVA, 1, pp. 391-410.
- PÉREZ JIMÉNEZ, A.J. (2005). “Algoritmos en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”. Unión, 1, pp. 37-44.
- PURCELL, E.J., VARBERG, D. y RIGDON, S.E. (2007). “Calculo diferencial e integral”. Pearson Educación: México.
- TENORIO, A.F. (2010). “Resolución de problemas asistida por software matemático: evaluando conocimientos y procedimientos en el alumnado”. En Actas del VI Congreso Internacional de Docencia e Innovación Universitaria. Universitat Politecnica de Catalunya: Barcelona, pp. 1-23.
- TENORIO A.F., PARALERA C. y MARTÍN-CARABALLO A.M. (2010). “Evaluación mediante competencias digitales: una experiencia con Mathematica”. Epsilón: Revista de Educación Matemática, pp. 123-136.
- TENORIO, A.F. y MARTÍN-CARABALLO, A.M. (2012). “Working digital competences in mathematics courses: mathematical software as didactic resources”. En EDULEARN2012 Proceedings. IATED: Barcelona, pp. 7206-7218.