Índices de Poder. Como evaluar el poder de voto

Seijas Macías, J. Antonio (antonio.smacias@udc.es)
Universidade da Coruña

RESUMEN

No existe un consenso sobre las propiedades que debería tener un índice de poder de voto cuando existen varios votantes con un conjunto de votos ponderados. Penrose-Banzhaf y Sahpely-Shubik establecieron índices en base a las ponderaciones. Si seguimos la literatura de teoría de juegos cooperativos obtenemos diferentes índices que intentan medir el poder de las coaliciones que se puedan formar entre los diversos agentes o jugadores. Aun suponiendo que todas las coaliciones son posibles, estas sólo aportan poder a sus miembros en la medida en que sus integrantes son jugadores tipo swing. En esta línea se encuentran índices basados en el valor de Shapley, como los índices de Deegan-Packel, Holler-Packel y los Shift power index. También haremos referencia a los índices basados en el concepto de nucleolo del juego. En este trabajo presentamos los diferentes índices e intentamos ver cuales deben ser las propiedades que definen un índice de poder. El objetivo es ver en que medida las diferentes aproximaciones permiten evaluar el poder real de un colectivo representado a través de un órgano colegiado con voto ponderado.

Palabras clave: Poder de Voto; Penrose-Banzhaff; Shapley-Shubik; Deegan-Packel; Holler-Packel; Shift Power Index.

Área temática: A2 Métodos Cuantitativos en un Entorno con Certidumbre.

ABSTRACT

No consensus exists about the properties that would have to have an power index of vote, when there are several voters with a group of weighted votes Penrose-Banzhaf and Sahpely-Shubik established indexes in base to the weighted of the different voters. Following the literature of theory of cooperative games different indexes are obtained, that try measuring the power of the coalitions that can be formed between the agents or players. Although every coalitions are possible only swing members have a positive payoff of the coalition. In this line we find indexes based in the value of Shapley, like the indexes of Deegan-Packel, Holler-Packel and the Shift power index. Also we will do reference to the indexes based in the concept of nucleolus of the game. In this work, we present the different indexes and try to see which have to be the properties that define an index to be able to. The aim is to see in that measured different approximations allow to approximate the real power of a community represented through a collegiate body with weighted votes.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de índices de poder tiene como objetivo medir el poder político de los votantes en un sistema de votación también denominado juego simple de votación. El poder del voto se basa en la probabilidad de que un voto determinado sea decisivo en un conjunto de votantes de diferentes tamaños. Para el análisis, en profundidad de las implicaciones y consecuencias del poder de voto representativo se puede ver Gelman et al. (2004).

Las primeras propuestas de índice fueron el índice Penrose-Banzhaf (Penrose, 1946), (Banzhaf, 1956) y el índice de Shapley-Shubik (Shapley y Shubik , 1954). Ambos utilizan como factor fundamental de valoración la medida en que un votante es decisivo en la toma de una decisión. Posteriormente, se introducen los índices basados en la idea de la coalición ganadora mínima, entre otros estarían los índices de Deegan-Packel (Deegan y Packel, 1978) y Holler-Packel (Holler y Packel, 1983).

En el presente trabajo consideramos sistemas de votación directa, donde los votantes tienen un número de votos particular y los dedican de forma única para el proceso de toma de decisiones. A la hora de establecer las diferentes proporciones de votos se pueden tener en cuenta diferentes datos: número de acciones de una empresa, número de votantes de un territorio, etc. Otras aproximaciones tienen en cuenta el poder de voto a través de sistemas de representación donde el número de votos asignados a un grupo de votantes (distrito electoral) permite escoger un número de representantes o votantes de una asamblea o colegio (por ejemplo, el sistema de colegio electoral presidencial de Estados Unidos).

Asimismo, estudiaremos los denominados índices de poder "a priori", donde el poder de un miembro se deriva de forma exclusiva de las reglas de decisión establecidas; esto es, no se tienen en cuenta otros factores externos que podrían influir a la hora de optar por una opción en un proceso de votación. En estos procesos la única preferencia de un votante es maximizar su cuota total. En estas circunstancias toda coalición a formar en una asamblea es equiprobable de acuerdo al Principio de Razón Insuficiente (PIR) (ver Felsenthal y Machover, 2004).

El análisis realizado en este trabajo se basa en estudiar los diferentes tipos de índice de poder para un votante individual en sistema con voto ponderado. En la sección segunda describimos el juego de votación y el concepto de índice de poder y sus propiedades; a continuación, en la sección tercera realizamos un análisis de las características cuantitativas y cualitativas de los índices de poder. Por último, presentamos las conclusiones al trabajo realizado y las futuras líneas a seguir en nuestra investigación.

2. JUEGO DE VOTACIÓN

Un sistema o juego simple de votación consta de un conjunto de votantes y unas reglas de votación que permiten decidir si una propuesta es aceptada o rechazada. El conjunto de votantes (jugadores) se puede representar como un conjunto finito no vacío $N = 1, 2, ..., n$, cada elemento $i \in N$ es un votante. Un grupo de votantes estará representado por un subconjunto $S \subseteq N$ y se denomina coalición. El conjunto de todas la coaliciones de N es el conjunto potencia $\mathcal{P}(N)$ que tiene cardinalidad 2^n. El conjunto $\mathcal{P}(N)$ puede ser dividido en dos subconjuntos disjuntos: aquellas coaliciones que permiten que una propuesta sea aprobada, o coaliciones ganadoras $W \subseteq \mathcal{P}(N)$ y las coaliciones perdedoras: $\mathcal{P}(N) \setminus W$. Ambos conjuntos son no vacíos, puesto que como mínimo contienen un elemento: $\emptyset$ es siempre una coalición perdedora y N es siempre una coalición ganadora.

Dado un juego simple de votación (N, W) formado por N jugadores y el conjunto de coaliciones ganadoras W formado por una familia de subconjuntos de N que verifica las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \notin W$.

2. $N \in W$

3. Si $S \in W$ y $S \subset T$ entonces $T \in W$.

Denominamos conjunto de coaliciones ganadoras mínimas al conjunto $W^m = \{S \in W : T \subset S \Rightarrow T \notin W\}$, esto es, sólo se consideran aquellas coaliciones donde no es posible eliminar a ningún jugador y mantener el carácter ganador de la misma. El conjunto de coaliciones ganadoras mínimas presenta las siguientes propiedades:

- W^m es no vacío.

- W^m es una anticadena del conjunto de partes $\mathcal{P}(N)$, esto es, un conjunto de subconjuntos de W tal que $X \nsubseteq Y$ e $Y \nsubseteq X$ se verifica para todo $X, Y \in W^m$.

- Todo sistema de votación tiene un único W^m. Así

$$W = \{S \in \mathcal{P}(N) : \exists V \in W^m : V \subseteq S\}$$

- La cardinalidad de $|W^m|$ verifica (Kirsch y Langner, 2009):

$$1 \leq |W^m| \leq \begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix}$$

En muchos casos, los juegos de votación asignan diferente número de votos a los jugadores. Este tipo de juegos se conocen con el nombre de juegos simples de votación ponderada, donde cada jugador tiene asignado un número de votos determinado y la toma de decisiones requiere de un número total de votos o cuota de aprobación, son el tipo más importante del conjunto de juegos simples de votación, puesto que ejemplos de los mismos son muy habituales en el mundo real.

En este tipo de juegos existen enteros positivos $v_1, ..., v_n$, donde v_i es el número de votos asignado al i-ésimo jugador, tal que toda coalición S verifica que $S \in W$ si y sólo si la $v(S) = \sum_{i \in S} v_i \geq q$, donde $q > 0$ es la cuota de aprobación preestablecida y $v(S) = \sum_{i \in S} v_i$ es el número de votos de la coalición S. El juego se representa por $[q : v_1, v_2, ..., v_n]$.

Dado un juego de votación, definimos un índice de poder como una función real no negativa que asigna a todo jugador $i \in N$ un valor $f_i \geq 0$ tal que $\sum_{i \in N} f_i = 1$. Para cuantificar el índice de poder se utiliza el concepto de swing. Se define el swing del jugador $i \in N$ como la situación en la cual si $i \in S$, entonces $S \in W$ de tal forma que $S \setminus \{i\} \notin W$; denotamos por $\eta_i(W)$ el número de swings del jugador $i \in N$. El swing de un jugador se calcula como la cardinalidad el conjunto $C_i = \{S \subseteq N \setminus \{i\} : S \notin W \wedge S \cup \{i\} \in W\}$, esto es, $\eta_i(W) = |C_i|$. Para coaliciones ganadoras mínimas tenemos $W_i^m = \{S \in W^m : i \in S\}$ y $\eta_i(W) = |W_i^m|$.

2.1. Propiedades de los índices de poder de voto

Dado un conjunto de jugadores $\{1, 2, 3, ..., n\}$ y el conjunto de votos de cada jugador $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$. Sea q la cuota o número de votos necesarios para aprobar una proposición. Entonces a cada jugador se le asigna un índice de poder $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$.

Las principales propiedades que deberían cumplir los índices de poder son:

1. El jugador que tiene asociado el mayor número de votos debería tener el mayor índice de poder. Sea $i : v_i > v_s$, $\forall s = 1, ..., n$ e $i \neq s$ entonces $f_i > f_s$, $\forall s = 1, ..., n$ e $i \neq s$.

2. En caso de que existan varios jugadores con el mismo número de votos, todos ellos tendrían el mismo índice de poder. Si $v_i = v_j \Rightarrow f_i = f_j$, $i, j = 1, ..., n$.

3. Principio de monotonicidad: Dados dos jugadores si un jugador tiene un mayor número de votos que otro, también deberá tener un mayor índice de poder. Sean i y j dos jugadores, si $v_i > v_j$ entonces $f_i \geq f_j$.

4. El número total de coaliciones en las que puede participar el jugador i es 2^{n-1}.

Por otro lado, hay que tener en cuenta los requisitos para la formación de coaliciones. En general, todos los índices “a priori”permiten la formación de todas las coaliciones admisibles. Aunque a la hora de determinar el índice de poder sólo se consideran las coaliciones ganadoras.

3. ÍNDICES DE PODER

La importancia de evaluar el poder de voto de un jugador está directamente relacionada con la difusión del sistema democrático de toma decisiones, que ha contribuido de forma importante a la configuración de los sistemas de votación como la regla más extendida para determinar los procesos de elección. Existen numerosos ejemplos de organismos nacionales y supranacionales donde la toma de decisiones se realiza mediante procesos de votación ponderada: el Consejo de la Unión Europea, el Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas, el Cuerpo de Gobernadores del Fondo Monetario Internacional, etc. Los índices de poder se convierten así en una herramienta de análisis necesaria para poder revelar la existencia de poderes ocultos que determinen la toma de decisiones en este tipo de organismos.

Si analizamos la literatura sobre el tema podemos observar que los índices tradicionales: Penrose-Banzhaf y Shapley-Shubik son los más utilizados, pero este hecho no indica que sean superiores a los otros índices propuestos. En este sentido, estos dos índices se han beneficiado de una cierta facilidad en el proceso de cálculo frente a otros índices cuyo cálculo es más complejo.

3.1. Índices de Poder de Penrose-Banzhaf y Sahpley-Shubik

Son los índices más antiguos y se basan el concepto de swing y el conjunto de coaliciones ganadoras.

Definición 3.1.1 *Se denomina valor de Banzhaf* (BS_i) *de un votante i a al número de swings del jugador i, denotado por* $\eta_i(W)$. *El poder de Penrose-Banzhaf del jugador i es* $PBP_i = \frac{\eta_i(W)}{2^{n-1}}$. *Y finalmente, el índice de poder normalizado Penrose-Banzhaf del jugador i será:* $IPB_i = \frac{PBP_i}{\sum_{j=1}^{n} PBP_j}$.

El índice de poder de Penrose-Banzhaf normalizado determina la probabilidad de que un jugador sea decisivo en una coalición ganadora. Es un índice "a priori", ya que no tiene en cuenta el grado de pausibilidad de la coalición considerada. Esto es, se asume que todas las coaliciones son posibles y equiprobables.

Definición 3.1.2 *Denominamos índice de poder de Shapley-Shubik* (SSI_i) *de un* *votante i a:*

$$SSI_i = \sum_{S \in W} \frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}$$

donde i es decisivo en la coalición S, esto es, si i modifica su voto la coalición deja de ser ganadora.

Al igual que el índice anterior, está normalizado. Este índice representa la fracción de órdenes de votación para los cuales el jugador i resulta decisivo.

Ambos índices se basan en cuantificar el grado en que un jugador resulta decisivo y su valores no tienen porque coincidir. La elección de uno u otro se atribuye, en general, a los supuestos sobre el comportamiento de los jugadores, si éstos actúan de forma completamente independiente se debería utilizar el índice Penrose-Banzhaf, en otro caso sería aconsejable el índice de Shapley-Shubik.

3.2. Índices de poder basados en el conjunto de coaliciones ganadoras mínimo

El índice de Deegan-Packel considera el conjunto de coaliciones ganadoras mínimo: $W^m = \{S \in W : S \in W \text{ y } T \notin W, \forall T \subsetneq S\}$, donde todo subconjunto estricto T de S es una coalición no ganadora. Bajo este supuesto, tenemos que sólo se formarán coaliciones ganadoras mínimas; todas estas coaliciones son equiprobables.

Definición 3.2.1 *Definimos el índice de poder de Deegan-Packel como*

$$DPI_i = \frac{1}{|W^m|} \sum_{\substack{S \in W^m \\ i \in S}} \frac{1}{|S|}.$$

Al igual que los otros índices está normalizado; pero presenta una diferencia fundamental con los dos anteriores, no tiene monotonicidad en el número de votos. Si tenemos dos jugadores $i, j \in N$ con $v_i > v_j$ entonces no necesariamente $DPI_i > DPI_j$. Este hecho, que cuestionó la propuesta de Deegan y Packel, es hoy en día, aceptado, y existen numerosos casos reales donde jugadores con un menor número de votos poseen un mayor potencial de poder (Holler, 1982). De todas formas para evitar estas críticas se estableció un criterio de probabilidad de la formación de la coalición en función del número de miembros, y de esta forma se modificó el índice de Deegan-Packel al considerar una probabilidad previa de formación de la colación. Las coaliciones con menos miembros deberían ser más probables que aquellas con más miembros.

Holler (1982) realiza una propuesta de índice alternativo cuyos supuestos básicos son:

1. Todo miembro de una coalición ganadora mínima es decisivo para el valor de la coalición. Dicho valor expresa (sin dividir) el poder del jugador en la coalición.

2. Un jugador no esencial de una coalición, no influye en el carácter ganador de la misma, y por lo tanto, su poder es nulo.

3. Los miembros no esenciales de las coaliciones no tienen incentivos a votar.

4. Las coaliciones ganadoras mínimas se caracterizan porque todos los miembros son esenciales a la misma. Los miembros esenciales de una coalición constituyen el conjunto ganador decisivo.

5. Cada conjunto ganador decisivo corresponde a un resultado específico de una coalición. La definición de conjunto ganador decisivo is idéntica a la de conjunto ganador mínimo de Deegan-Packel.

La principal diferencia con la aproximación de Deegan-Packel es que no sólo se formarán las coaliciones de W^m, pero si serán las únicas que se consideren para medir el poder de voto "a priori".

En base a estas propuestas, Holler y Packel (1983) formulan el denominado índice de poder del bien público o índice Holler-Packel.

Definición 3.2.2 *El índice Holler-Packel es:*

$$PGI_i = \sum_{\substack{S \in W^m \\ i \in S}} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{S \in W^m \\ i \in S}} 1},$$

donde $\sum_i PGI_i = 1$ *y por lo tanto,* PGI_i *mide el número de veces que el jugador* i *es miembro de una coalición ganadora mínima, dividido por el número de veces que los* n *jugadores del conjunto* N *son miembros de* $S \in W^m$.

Al igual que en el caso del índice de Deegan-Packel este índice no presenta monotonicidad para el número de votos.

3.3. Índices de poder de tipo Shift

Los índices de poder Shift (Alonso-Meijide y Freixas, 2010) se basan en la introducción del concepto de relación deseable (Isbell, 1958).

Sea (N, W) un juego simple, i y j dos jugadores, entonces se dice que el jugador i es tan deseable como el jugador j (en el sentido de miembro de una coalición), y lo denotamos por $i \sim j$, si para cualquier coalición $S \in N \setminus \{i, j\}$, entonces $S \cup \{i\} \in W \Longleftrightarrow S \cup \{j\} \in W$. De la misma forma, diremos que el jugador i es más deseable (estrictamente) que el jugador j, y lo denotamos por $i \succ j$, si se verifican las dos condiciones siguientes:

1. $\forall S \in N \setminus \{i, j\}$, entonces $S \cup \{j\} \in W \Rightarrow S \cup \{i\} \in W$.

2. $\exists T \in N \setminus \{i, j\}$ tal que $T \cup \{i\} \in W$ y $T \cup \{j\} \notin W$.

Por último, diremos que i es como mínimo tan deseable como j, denotado por $i \succeq j$, si $i \sim j$ ó $i \succ j$. La relación $\succeq$ se conoce como relación deseable.

A partir de está idea de medir el grado de deseabilidad (Taylor y Zwicker, 1999) de un jugador, Alonso-Meijide y Freixas, (2010), desarrollan el concepto de coalición ganadora mínima shift. Una coalición ganadora mínima $S \in W^m$ es mínima shift si para todo $i \in S$ y $j \notin S$ tal que $i \succ j$ se cumple que $(S \setminus \{i\}) \cup \{j\} \notin W$. Definimos el conjunto de coaliciones ganadoras mínimas shift:

$$W^s = \{S \in W^m : \forall (i \in S \wedge j \notin S : i \succ j) \Rightarrow (S \setminus \{i\}) \cup \{j\} \notin W\}.$$

Sea $|W_i^s|$, la cardinalidad del conjunto $W_i^s = \{S \in W^s : i \in S\}$. Entonces se define el índice de poder Shift del jugador i como:

$$SPI_i = \frac{|W_i^s|}{\sum_{j=1}^{n} |W_j^s|}$$

Alonso-Meijide et al. (2012) introducen una variante del índice anterior producto de su combinación con el índice Deegan-Packel, denominándolo índice Deegan-Packel Shift (DPSI), el cual se calculará para cada jugador i mediante la siguiente expresión:

$$DPSI = \frac{1}{|W^s|} \sum_{s \in W_i^s} \frac{1}{|s|}$$

Este índice representa una solución intermedia entre el índice Deegan-Packel y el índice de poder Shift. Sólo se consideran las coaliciones ganadoras mínimas, pero a diferencia de otras aproximaciones aquí se tiene en cuenta el tamaño de dichas coaliciones.

En general, el número de coaliciones de estos índices es inferior al número de coaliciones que se utilizan en el resto de índices de poder analizados.

3.4. El nucleolo como índice de poder

En Le Breton et al. (2012) se introduce una nueva medida del índice de poder que, a diferencia de las vistas hasta ahora, se deriva de los vectores de pagos de equilibrio. Su interés se centra en el poder de un votante de aprobar así como de bloquear una decisión, pudiendo presentar valores diferentes para un mismo juego y jugador. Para llevar a cabo su trabajo estos autores utilizarán el concepto de nucleolo.

Los autores consideran dos grupos de presión o “lobbies”que pujan para obtener los votos de los jugadores. Los “lobbies” realizan sus ofertas de pago de forma secuencial, y los jugadores votan por aquel lobby que les ha realizado la mejor oferta. En estas circunstancias, los resultados de una votación podrían ser sesgadas hacia un lado u otro en función de la fuerza de cada grupo y de un parámetro denominado ”hurdle factor”que viene a representar el valor del juego, a mayor valor, menor será la capacidad de influencia de los grupos de presión sobre el resultado del juego.

Se define el nucleolo de un juego (N, W) como el vector de precios relativos que el “lobby”tendría que pagar a los jugadores para imponer un resultado como el más preferido en presencia de un grupo opositor. Los precios óptimos se obtienen mediante la resolución del siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i \in N} w_i \\ \text{sujeto a: } \sum_{i \in S} w_i \geq 1 \ \forall S \in W \\ t_i \geq 0 \ \forall i \in N. \end{aligned}$$

La solución a este programa es el núcleo mínimo del correspondiente juego cooperativo. En este tipo de juegos, hay que tener en cuenta si el objetivo es aprobar una propuesta o bloquear su aprobación, puesto que en el segundo caso, la coalición a considerar sería la coalición de bloqueo. En este sentido, la utilización del nucleolo presenta una situación donde el poder del jugador es diferente según se trate de un movimiento de aprobación o de bloqueo. Esto no se produce en el caso de los índices de poder tradicionales (Banzhaf, Shapley, etc.)

Consideremos el juego siguiente: $(51; 35, 20, 15, 15, 15)$, donde deseamos obtener una mayoría ganadora. En función de la capacidad para formar una coalición ganadora tenemos 3 tipos de jugadores: $\{1,2,3\}$, en este caso, todos los jugadores están en al menos una coalición ganadora mínimo. [1] Hay 3 jugadores del tipo 1 (los que tienen 15 votos que no pueden formar una coalición ganadora), un jugador del tipo 2 (el jugador con 20 votos que podría formar una coalición ganadora con los 3 jugadores del tipo 1) y un jugador del tipo 3 (que puede formar una coalición ganadora con sólo 2 de los jugadores tipo 1). Si representamos los pagos a estos jugadores por $\{x,y,z\}$, para los jugadores tipo 3, 2 y 1 respectivamente. Entonces, para calcular el nucleolo tenemos que resolver el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín}\, x+y+3z \\ \text{sujeto a: } x+y \geq 1 \\ x+2z \geq 1 \\ y+3z \geq 1 \\ x,y,z \geq 0 \end{aligned}$$

Donde las restricciones muestran las diferentes posibles coaliciones ganadoras:

- Jugador tipo 3 + jugador tipo 2 : $x+y$
- Jugador tipo 3 + 2 jugadores tipo 1: $x+2z$
- Jugador tipo 2 + 3 jugadores tipo 1: $y+3z$

Resolviendo, el programa lineal obtenemos los siguientes pagos: $x=\frac{3}{5}, y=\frac{2}{5}, z=\frac{1}{5}$, esto supone que el jugador de tipo 3 tiene el triple de poder que cada uno de los jugadores de tipo 1, y el jugador de tipo 2 tiene el doble de poder que cada uno de los jugadores de tipo 1. El valor del programa ("hurdle factor") será: $\gamma=\frac{8}{5}=1{,}6$.

[1] Si un jugador no está en ninguna coalición ganadora mínima es irrelevante para el juego y por lo tanto no se le considera en el cálculo del nucleolo.

Para calcular el índice de poder de un jugador dividimos el pago a dicho jugador entre el hurdle factor; así para el jugador tipo 1 tenemos: $\frac{x}{\gamma} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{5}} = 0{,}375$.

3.5. Análisis cualitativo de los índices de poder

Los índices tradicionales y el análisis del nucleolo verifican todos las propiedades señaladas en la sección 2; pero los índices más recientes como son los de Deegan-Packel y Holler-Packel no verifican el principio de monotonicidad. Esto ha provocado la oposición de diversos investigadores que consideran que cualquier índice de poder debería verificar estos principios, de ahí la preferencia por los índices tradicionales (Kurz et al. , 2014). Los índices del tipo Shift, de más reciente aparición, tampoco cumplen el principio de monotonicidad, y además tampoco verifican el principio de que el jugador con mayor número de votos asociados tiene el mayor índice de poder de forma estricta.

En los índices tradicionales se consideran las coaliciones ganadoras, mientras que en los nuevos índices sólo consideran las denominadas coaliciones ganadoras mínimas. No obstante, los índices tradicionales también se pueden definir en base a las coaliciones ganadoras mínimas (Kirsch y Langner, 2010) sin que ello afecte a su valor.

Una crítica común a todos los índices es su carácter "a priori". Esto es, no se tienen en cuenta características particulares de los jugadores o de los procesos de negociación. Es cierto, que en el mundo real, determinadas coaliciones pueden ser más probables que otras, lo que afecta al índice de poder real de los jugadores. En este sentido, la introducción de los nuevos índices y de la relación de deseabilidad suponen una cierta mejora de la aproximación a la realidad de los índices de poder.

Otra crítica a los nuevos índices es su mayor complejidad de cálculo; no obstante, la utilización de las denominadas funciones generadoras permite la creación de algoritmos eficientes que permitan calcular en tiempos razonables los índices de poder propuestos.

3.6. Ejemplos

Mostramos mediante dos ejemplos los diferentes resultados en función del índice de poder utilizado.

Ejemplo 1.

En la Tabla 1 consideramos los índices de poder de cada jugador en el juego simple $(51; 35, 20, 15, 15, 15)$, donde tenemos 5 jugadores (A, B, C, D, E) con diferente número de votos y una mayoría decisiva de 51 votos.

Jugador	PBI	SSI	DPI	HPI	Nucleolo	SPIt	SDPI
A	0.44	0.45	0.3	0.266	0.375	0.333	0.333
B	0.2	0.2	0.15	0.133	0.250	0	0
C	0.12	0.116	0.1833	0.2	0.125	0.222	0.222
D	0.12	0.116	0.1833	0.2	0.125	0.222	0.222
E	0.12	0.116	0.1833	0.2	0.125	0.222	0.222

Tabla 1: Ejemplo de juego simple: $(51; 35, 20, 15, 15, 15)$

En este ejemplo, vemos que la variación en el poder de voto entre unos índices y otros es significativa. Aun, así todos ellos otorgan el mayor poder de voto al jugador A, que posee el mayor número de votos; pero mientras algunos índices mantienen esta relación entre poder y votos; otros, otorgan mayor poder de voto a jugadores con menor número de votos.

Los índices de Penrose-Banzhaf y Shapley-Shubik producen casi los mismos valores. En ambos, la estructura de reparto de poder entre los jugadores es la misma. Por su parte, los índice Deegan-Packel y Holler-Packel también presentan una estructura de valores similares entre los jugadores, aunque a diferencia de los dos índices anteriores otorgan un mayor poder a los jugadores C, D ó E que al jugador

B (a pesar de que este tiene un mayor número de votos). Los índices más recientes basados en la estructura de deseabilidad, presentan los mismos valores y reproducen amplificada la estructura de poder de los índices Deegan-Packel y Holler-Packel. Es muy significativo el hecho de otorgar un índice 0 al jugador B (aun siendo el segundo jugador en número de votos). Por último, el análisis del nucleolo muestra un resultado semejante a los obtenidos en el análisis de los índices más tradicionales: Penrose-Banzhaf y Shapley-Shubik.

Ejemplo 2. En la Tabla 2 consideramos el juego simple $(5; 4, 3, 1, 1, 1)$ (Alonso-Meijide et al., 2012) , donde igual que en el caso anterior tenemos 5 jugadores (A, B, C, D, E) con diferente número de votos y una mayoría decisiva de 5 votos.

Jugador	PBI	SSI	DPI	HPI	Nucleolo	SPIt	SDPI
A	0.44	0.45	0.2727	0.2333	0.33334	0.2	0.25
B	0.2	0.2	0.159091	0.16667	0.16667	0.2	0.1667
C	0.12	0.1167	0.189394	0.2	0.16667	0.2	0.1944
D	0.12	0.1167	0.189394	0.2	0.16667	0.2	0.1944
E	0.12	0.1167	0.189394	0.2	0.16667	0.2	0.1944

Tabla 2: Ejemplo de juego simple: $(5; 4, 3, 1, 1, 1)$

Este ejemplo considera un juego con una distribución semejante pero algunas diferencias importantes: primero, el juego permite aprobar una medida con sólo 5 votos, pudiendo haber otros 5 votos que no apoyan la medida. Una segunda diferencia es el hecho de que ahora el segundo jugador en número de votos sólo necesita el apoyo dos de los jugadores minoritarios.

El índice de Penrose-Banzhaf produce exactamente los mismos valores que el ejemplo anterior y su estructura coincide con la del índice de Shapley-Shubik, que también reproduce los valores del ejemplo anterior, siendo también muy próximos los valores de ambos índices. En el caso de los índices de Deegan-Packel y Holler-Packel los valores varían ligeramente pero mantienen la misma estructura. En el resto de índices las diferencias son más significativas. Así en el valor de nucleolo vemos que el jugador A tiene el doble de poder que cualquiera de los otros cuatro que tienen la misma cuota de poder. Por su parte en el índice de poder shift todos los jugadores tienen el mismo índice de poder, y en el caso del Deegan-Packel shift se retoma la estructura del índice de Deegan-Packel aunque con valores ligeramente diferentes.

Un análisis conjunto de ambos ejemplos permite observar una diferencia importante para el jugador B. Mientras en el ejemplo 1, para obtener una coalición ganadora éste necesita al jugador A, o bien el acuerdo conjunto con los jugadores C, D y E. En el caso del ejemplo 2, B podría formar una coalición ganadora con A ó bien con sólo dos de los otros tres jugadores. Por lo tanto, el jugador B debería tener un índice de poder mayor en el ejemplo 2 que en el ejemplo 1, lo que no se observa en los índices tradicionales. En el ejemplo 1, aunque considera que el jugador B es el segundo en el nivel de poder, la realidad puede ser ligeramente diferente. Para poder obtener una posición ganadora enfrentado al jugador A, necesita una coalición con los tres jugadores (C, D y E); mientras que el jugador A sólo tiene que llegar a un acuerdo con dos jugadores, por tanto, en caso de conflicto entre A y B los jugadores C, D y E tienen una cuota de poder mucho más importante. El jugador B tendría un índice de poder inferior al reflejado en los índices tradicionales, tal y como recogen los índices de Deegan-Packel y Holler-Packel los jugadores minoritarios tienen un índice de poder superior. No se respeta el principio de monotonicidad.

Los índices tipo Shift explotan todavía más estas características comentadas. En el caso del ejemplo 1, el jugador B resulta con un índice de poder nulo, puesto que su única posibilidad real de formar coaliciones ganadoras es unirse al jugador A, o bien, llegar a acuerdos con los otros tres jugadores, que se convierten de esta forma en decisivos a la hora de poder bloquear las propuestas del jugador A. En cierta medida, su poder está supeditado a los otros jugadores; así en este tipo de índices su poder es cero.

El juego del segundo ejemplo es equivalente al juego del primer ejemplo, para los índices tradicionales, que asignan los mismo índices de poder a los jugadores. Pero un análisis más profundo muestra que, en realidad, ambos juegos no son totalmente equivalentes, puesto que aquí la posición del jugador B ha mejorado, ya que para bloquear al jugador A, sólo necesita pactar con dos jugadores minoritarios. Esto se refleja ahora en los índices de tipo Shift que asignan una cuota de poder al jugador B.

Así pues, los nuevos índices de poder basados en el concepto de deseabilidad (tipo Shift) parece que recogen de una forma más adecuada otras características de los juegos simples que no se consideran en los índices tradicionales.

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos presentado los principales índices de poder. Hemos visto como han evolucionado desde los índices más antiguos: Penrose-Banzhaf y Shapley-Shubik; basados en la formación de coaliciones ganadoras y el carácter de swing de los componentes. Frente a ellos los nuevos índices basados en coaliciones ganadoras mínimas, propuestos por Deegan-Packel y Holler-Packel, muestran una mejor aproximación al índice de poder real, aunque su cálculo resulta un poco más complejo.

En los últimos años, han surgido nuevos índices basados en la introducción del concepto de deseabilidad de un jugador, son los denominados índices de tipo Shift, de los que hemos analizado dos de ellos: el índice de poder shift y el índice de poder Deegan-Packel Shift. Este último, recientemente propuesto, es que el presenta mejores características a la hora de reflejar el índice de poder real de un juego simple.

Por último, también se ha hecho referencia a una nueva propuesta de cálculo de índice de poder basada en el cálculo del nucleolo del juego.

Nuevos trabajos en el futuro intentarán reflejar la complejidad de los algoritmos de cálculo de los nuevos índices, y el incremento del coste operativo en juegos con un gran número de jugadores y de votos.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alonso-Meijide, J.M. & Freixas, J. (2010). "A new power index based on minimal coalitions without any surplus". Decision Support Systems, 49, pp. 70–76.

- Alonso-Meijide, J.M., Freixas, J. & Molinero X. (2012). "Computation of several power indices by generating functions". Applied Mathematics and Computation, 219, pp. 3395–3402.

- Banzhaf, J.F. (1965). "Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis". Rutgers Law Review, 19, pp. 317–343.

- Deegan, J. & Packel, E.W. (1978). "A new index of power for simple n-person games". Ineternational Journal of Game Theory, 7, pp. 113–123.

- Felsenthal, D.S. & Machover, M. (2004). "A priori voting power: what is all about?". Political Studies Review, 2(1), pp. 1–23.

- Gelman, A.; Katz, J. N. & Bafumi, J. (2004). "Standard Voting Power Indexes Do Not Work: An Empirical Analysis". British Journal of Political Science, 34 (4), pp. 657–674.

- Holler, M. J. (1982). "Forming coalitions and Measuring voting power". Political Studies, XXX (2), pp. 262–271.

- Holler, M. J. & Packel, E.W. (1983). "Power, Luck and the Right Index". Journal of Economics, 43 (1), pp. 21–29.

- Isbell, J.R. (1958). "A class of simple games". Duke Mathematics Journal, 25, pp. 423–439.
- Kirsch, W. & Langner, J. (2010). "Power indices and minimial winning coalitions". Social Choice Welfare, 34, pp. 33–46.
- Kurz, S., Maaser, N., Napel, S. & Weber, M. (2014). Mostly Sunny: A Forecast of Tomorrow's Power Index Research. Tinbergen Institute Discussion Paper 14-058/I.
- Le Breton, M, Montero, M. & Zaporozhets, V. (2012). "Voting power in the EU council of ministers and fair decision making in distributive politics". Mathematical Social Science, 63, pp. 159–173.
- Penrose, L.S. (1946). "The elemenatary statistics of majority voting". Journal of the Royal Statistical Society, 109, pp. 53–57.
- Shapley, L.S. & Shubik (1954). "A Method for evaluating the distribution of power in a commitee system". Amercian Political Science Review, 48, pp. 787–792.
- Taylor, A.D. & Zwicker, W.S. (1999). Simple Games: Desirability Realtions, Trading and Pseudoweightings. Princeton University Press. New Jersey.