Modelos input-output rectangulares mediante inversas generalizadas

Pereira López, Xesús: xesus.pereira@usc.es
Economía Cuantitativa
Universidade de Santiago de Compostela

Fernández Fernández, Melchor: melchor.fernandez@usc.es
Fundamentos del Análisis Económico
Universidade de Santiago de Compostela

Miranda Torrado, Fernando: fernando.miranda@usc.es
Economía Cuantitativa
Universidade de Santiago de Compostela

Carrascal Incera, André: andre.carrascal@rai.usc.es
Instituto Universitario de Estudos e Desenvolvemento de Galicia
Universidade de Santiago de Compostela

RESUMEN

La explotación óptima de datos conocidos debe prevalecer en los estudios económicos. Aunque, en la modelización económica vinculada a las tablas *supply-use* se desatiende bastante este aspecto. De hecho, como en este formato el número de productos supera al número de industrias, se pierde mucha información al ejecutar agregaciones para conseguir matrices cuadradas. No obstante, las matrices rectangulares se pueden abordar directamente mediante el uso de inversas generalizadas.

El principal objetivo de este artículo es enfatizar que la elaboración de tablas simétricas input-output no es en un trámite obligatorio, e incluso innecesario. A pesar de ello, se recuerda el procedimiento a seguir para construir matrices simétricas mediante las hipótesis de tecnología de producto e industria. Por último, se plasma una aplicación práctica con vistas a resaltar las distintas alternativas de análisis económico en este ámbito.

***Palabras claves*:** inversa Moore-Penrose; input-output; modelo rectangular; supply-use.

***Área temática*:** Metodología y Didáctica.

ABSTRACT

In economic studies should prevail the utilization of available data. Despite this, in economic modelling related with supply-use tables this aspect is ignored. In fact, as in this format the number of products exceeds the number of industries, considerable information is lost due to the aggregations in order to get square matrices. However, the rectangular matrices can directly be modelled using generalized inverses.

The main aim of this paper is to highlight the fact that it is not obligatory elaborate symmetric input-output tables for modelling. In spite of it, in this paper it is reminded how to construct symmetric matrices through the two traditional hypotheses: product technology and industry technology. Finally, it is shown an empirical application with the goal of highlight different alternatives in this area.

***Keywords*:** Moore-Penrose inverse; input-output; rectangular model; supply-use.

AGRADECIMIENTOS

Xesús Pereira y André Carrascal agradecen la subvención de la Xunta de Galicia, a través del proyecto PGIDIT 10TUR242004PR.

1. INTRODUCCIÓN

El marco input-output ofrece varias posibilidades de análisis dado que es posible trabajar directamente con las tablas *supply-use* (SUTs[1]) o con la tradicional tabla simétrica (ST). En esta ocasión, la atención se centra en el caso general. En efecto, se desarrollan varios modelos de demanda y oferta en el entorno de las SUTs.

Lo normal es que las matrices de consumos intermedios asociadas a las SUTs sean rectangulares. Por lo tanto, para despejar el vector de producción (por productos o por ramas de actividad) en la construcción de los modelos obtenidos directamente de las SUTs es necesario recurrir a "inversas" de matrices rectangulares. Con vistas a esquivar un supuesto problema existe un simple procedimiento, por cierto bastante empleado, que consiste en realizar agregaciones por productos para obtener una matriz cuadrada. Pero, sin duda alguna, ello implica una pérdida significativa de información disponible en las SUTs. En la investigación económica quizás existió un cierto desvío de atención: las inversas son una herramienta de trabajo no un fin en sí mismas. Se verá como se puede evitar el mencionado problema utilizando inversas generalizadas en la construcción de modelos con la ventaja de que están perfectamente calibrados y, consecuentemente, son admitidos como herramienta de análisis. Recientemente, Pereira, Carrascal *et al.* (2011) presentaron un modelo de demanda en el entorno de SUTs gracias a la inversa de Moore-Penrose. En este artículo se pretende destacar su potencial.

Una de las características que debe prevalecer en el análisis económico es un óptimo aprovechamiento de los datos disponibles. Por lo tanto, el desperdicio de información mediante meras agregaciones no es aconsejable. Aquí se evitan las recurrentes agregaciones de productos y se opta por el cálculo de inversas de matrices rectangulares. En concreto, se utilizará la inversa generalizada de Moore-Penrose (Moore, 1920; Penrose, 1955). Hay otras inversas generalizadas, como la de Drazin, pero la seleccionada es muy manejable dentro del marco input-output. Esta inversa

[1] Se utilizará la abreviatura SUTs en relación a la expresión anglosajona *Supply and Use Tables*.

generalizada se emplea mucho en otros campos, aunque en el ámbito de la economía también se utiliza en varios contextos. Se recuerda, a modo de ejemplo, que es usada en econometría en relación a matrices particionadas (Baksalary y Baksalary, 2007), en modelos de demanda dinámicos (Schinnar, 1978), en agregación de industrias (Olsen, 2000) o en matrices de contabilidad social (Luppino *et al.*, 2004). Zhao (2002) también la usó en el entorno de SUTs para evitar agregaciones en los modelos de demanda basados en la hipótesis de tecnología de producto.

En relación al uso de toda la información disponible, sería interesante articular la modelización la con la actualización global de SUTs, a estos efectos puede consultarse Pereira, Quiñoá *et al*. (2011). Esta combinación de técnicas daría lugar a mejores estimaciones de realidades económicas representadas por medio de los esquemas rectangulares.

2. MODELOS INPUT-OUTPUT RECTANGULARES

2.1 Cuestiones preliminares

Existen distintas posibilidades de análisis input-output en función del carácter de las representaciones contables: rectangulares o simétricas. A su vez, existen modelos expresados en producción por productos y por ramas de actividad. En realidad, lo que se hace es construir ST, en un caso producto por producto y en otro sector por sector. Es decir, hay varias opciones de análisis a través de las SUTs. A estos efectos, véanse los manuales de la ONU y Eurostat (United Nations, 1999; Eurostat, 2008). En esta ocasión, se abordarán los modelos de flujos domésticos por el interés que éstos presentan en los estudios regionales, aunque los desarrollos matemáticos son análogos para los flujos totales.

Se entiende acertado recordar la definición del concepto de inversa generalizada de Moore-Penrose. A estos efectos, si se considera una matriz $A \in M_{m\times n}(R)$, se dice que A_x (matriz de orden $n\times m$) es la inversa generalizada de Moore-Penrose, si y solamente si, se verifican las siguientes propiedades:

$AA_xA = A$ (P.1), AA_x es simétrica (P.2), A_xA es simétrica (P.3) y $A_xAA_x = A_x$ (P.4);

asimismo, siempre existe A_x y es única. También se cumple que

i. Si $m \geq n$ y $rg(A) = n \Rightarrow A_x = (A^T A)^{-1} A^T$ y además $A_x A = I_n$.

ii. Si $m \leq n$ y $rg(A) = n \Rightarrow A_x = A^T (AA^T)^{-1}$ y además $AA_x = I_m$.

iii. Si $rg(A) = r \leq min\{m, n\} \Rightarrow A_x = C_x B_x$, siendo B_x y C_x las inversas generalizadas de las matrices $B \in M_{m\times r}(R)$ y $C \in M_{r\times n}(R)$ de rango r tales que $A = BC$.

En lo sucesivo, i se corresponde con un vector columna con todas sus componentes igual a uno. El símbolo ^{T} denota la transposición y $^{-1}$ la inversión. Como estas operaciones conmutan entre sí, su composición se expresará por $^{-T}$. La notación ^ indica la diagonalización del correspondiente vector, se entiende que los elementos que no pertenezcan a la diagonal principal son iguales a cero. Además, en las ecuaciones matriciales las notaciones en mayúsculas hacen referencia a matrices y las expresadas en minúsculas a vectores.

Se pueden definir dos relaciones contables entorno a la matriz de producción, V. Por un lado, la producción por productos se obtienen como suma por filas, $q = Vi$. Y por otro lado, la producción por ramas de actividad se corresponde como suma por columnas de dicha matriz, $g = V^T i$.

A partir de las definiciones de coeficientes técnicos (interiores) y distribución (interiores), es inmediato ver como las matrices que engloban dichos coeficientes, B^d y H^d, respectivamente, se expresan de la siguiente forma:

$$B^d = U^d \hat{g}^{-1} \quad \text{y} \quad H^d = \hat{q}^{-1} U^d.$$

A su vez, la matriz de coeficientes de mercado resulta del siguiente producto matricial:

$$D = \hat{q}^{-1} V,$$

después de ciertas sustituciones se obtiene que $g = D^T q$.

La matriz de coeficientes de especialización se construye como se indica a continuación:

$$C = V \hat{g}^{-1},$$

y a partir de aquí se sabe que $q = Cg$.

2.2 Modelos *supply-use*: distintas alternativas

Para confeccionar modelos por productos a partir de las SUTs, es preciso recurrir a hipótesis simplificadoras que establecen dos tipos de relaciones entre las producciones por productos y por sectores. En un caso hay que apoyarse en la estabilidad de las estructuras por filas de la matriz de producción y en el otro caso se considera la estabilidad de las estructuras por columnas de la misma matriz. En resumen, hay dos opciones: modelos basados en un supuesto de tecnología de la rama de actividad y basados en un supuesto de tecnología del producto.

En la elaboración del modelo de tecnología de la industria se admite que la matriz de coeficientes de mercado, D, es estable temporalmente. Es decir, siempre se utiliza el supuesto de cuotas de mercado del producto constantes para las distintas ramas. Por lo tanto, se considera la igualdad por producto:

$$q = U^d i + y^d,$$

en donde y^d es la demanda final doméstica por productos y U^d es la matriz de consumos intermedios interiores.

A continuación, es posible sustituir la demanda intermedia doméstica, $U^d i$, por $B^d g$, de acuerdo con la estabilidad de los coeficientes técnicos. Es decir, se tiene que

$$q = B^d g + y^d,$$

en donde B^d es la matriz de coeficientes técnicos interiores no homogéneos.

Ahora bien, basándose en la otra hipótesis de trabajo, se puede sustituir g por $D^T q$. En consecuencia,

$$q = B^d D^T q + y^d.$$

Con lo cual, es posible elaborar el modelo de demanda correspondiente a la producción por productos:

$$q = (I - B^d D^T)^{-1} y^d.$$

En los modelos de hipótesis de la tecnología de producto se considera la estabilidad de la matriz de coeficientes de especialización, C. Cada producto se produce con una tecnología específica, independientemente de la industria que lo produzca; en otras palabras, la estructura de consumos intermedios es la del producto. Cuando las matrices de consumos intermedios y producción son cuadradas y de rango completo también se pueden diseñar modelos alternativos[2]. De ser así, se puede calcular la inversa de C; es decir, la producción por ramas de actividad vendrá dada por $g = C^{-1}q$. Por lo tanto, se obtiene alternativamente otro modelo de demanda por productos:

$$q = (I - B^d C^{-1})^{-1} y^d.$$

Kop Jansen y ten Raa (1990) sostienen que, desde un punto de vista axiomático, la hipótesis de tecnología de producto es teóricamente superior a la otra hipótesis. En este sentido, tanto Steenge (1990) como Konijn (1994) indican que siempre es teóricamente posible encontrar una matriz de coeficientes técnicos no negativos que sea consistente con la información disponibles en las SUTs. Además, Mattey y ten Raa (1997), utilizando información a nivel de establecimientos sobre consumos y producciones, demuestran empíricamente que la hipótesis de tecnología de producto también puede ser útil. No obstante, ten Raa y Rueda-Cantuche (2005) indican que la aplicación de dicha hipótesis posee sus limitaciones. Por un lado, aparecen con mucha facilidad coeficientes técnicos negativos y en segundo lugar, afirman que es absolutamente necesario que el número de productos sea exactamente igual al número de ramas de actividad, aunque este último aspecto puede atajarse mediante el uso de inversas generalizadas. Recientemente, Rueda-Cantuche (2011) propuso el uso de modelos econométricos como alternativa de análisis. Estos problemas han sido tratados con intensidad en los últimos años, a este respecto pueden verse Armstrong (1975), Stahmer (1985), Young (1986), Rainer (1989), Steenge, (1990), Konijn (1994), Almon, (2000), o Guo *et al.* (2002).

Por lo tanto, es necesario solventar previamente si la tecnología es la de producto o la de industria, dado que muchos productos son elaborados por varias ramas y muchas ramas producen más de un producto. Existen dificultades teóricas para sostener la hipótesis de tecnología de rama, dado que significa mismo coste de producción para diferentes productos vendidos a diferentes precios. En la práctica, esta

[2] En general, estas matrices no son cuadradas, salvo que se recurra a agregaciones por filas. De acuerdo con la propia confección de las SUTs, los productos superan a las ramas de actividad.

hipótesis es la más usada debido a la supuesta imposibilidad de invertir la matriz de coeficientes de especialización. Con el paso del tiempo, la utilización de modelos basados en esta tecnología también es problemática, porque implica la estabilidad de las cuotas de mercado. Se admite que los coeficientes de especialización varían en menor medida.

En todo caso, no siempre es necesario construir STs en el entorno de las SUTs, ya que es factible obtener un modelo rectangular a través de la hipótesis de tecnología del producto, sin la obligación de recurrir a agregaciones. Se explica fácilmente porque se puede sustituir q por Cg en el sistema anterior, entonces se tiene que

$$Cg = B^d g + y^d,$$

o, de modo alternativo,

$$(C - B^d)g = y^d.$$

Para despejar g se acude a la inversa de Moore-Penrose. En general, la matriz $(C-B^d)$ es rectangular y es asumible que su rango coincida con el número de columnas. Es más, en relación al modelo que se pretende construir se precisa que la matriz $(C-B^d)$ tenga un mayor número de filas que de columnas, de ser así, su inversa generalizada, $(C-B^d)_x$, es de orden $n \times m$ y además $(C-B^d)_x(C-B^d)=I_n$[3]. De este modo, multiplicando por la izquierda ambos miembros del anterior sistema por $(C-B^d)_x$ y, acto seguido, simplificando se obtiene el modelo de flujos interiores relativo a la producción por ramas[4]:

$$g = (C - B^d)_x y^d.$$

3. MODELO DE OFERTA SIMPLIFICADO

Los modelos de oferta se presentaron como una variante natural de los modelos de demanda, esta alternativa fue propuesta por Ghosh (1958). No se trata de abordar aquí la plausibilidad del modelo de oferta, esta característica ha sido objeto de debate en

---

[3] Si $m=n$ este problema desaparece, dado que se estaría en el caso particular de matrices inversas.

[4] Para mayor detalle, véase Pereira, Carrascal y Fernández (Pereira López, Carrascal, *et al.*, 2011).

muchas ocasiones (Bon, 1986; Oosterhaven, 1988, 1989, 1996; Miller, 1989; Rose y Allison, 1989; Dietzenbacher, 1997 o Guerra y Sancho, 2011). En este apartado sólo se expone el modelo de oferta en el entorno de las SUTs.

La siguiente relación contable es fundamental para la construcción de estos modelos:

$$(U^d)^T i + (U^m)^T i + v = g,$$

en donde U^m es la matriz de consumos intermedios importados y v el vector de inputs primarios. Con vistas a simplificar las fórmulas, se considera $t^m = (U^m)^T i$, que es el vector de inputs intermedios de flujos importados.

A partir de aquí, teniendo en cuenta que $(U^d)^T i = (H^d)^T q$, lo que implica admitir la estabilidad de los coeficientes de distribución interiores (no homogéneos), se llega a

$$(H^d)^T q + t^m + v = g.$$

A continuación, asumiendo la estabilidad de la matriz D, se puede sustituir g por $D^T q$ en el anterior sistema:

$$(H^d)^T q + t^m + v = D^T q,$$

después, se opera de tal forma que se pueda despejar la producción por productos, q. Por lo tanto, procede expresar el sistema como sigue:

$$(D^T - (H^d)^T)q = t^m + v.$$

Ahora se recurre a la inversa generalizada de Moore-Penrose, se trata de multiplicar por la izquierda los miembros de la anterior igualdad por $(D^T - (H^d)^T)_x$. De tal forma que se obtiene

$$(D^T - (H^d)^T)_x (D^T - (H^d)^T)q = (D^T - (H^d)^T)_x (t^m + v),$$

Es necesario que las SUTs posean un mayor número de columnas que de filas, o en tal caso de igual número, para asegurarse que

$$(D^T - (H^d)^T)_x (D^T - (H^d)^T) = I_m,$$

de ser así, se obtiene el modelo de oferta correspondiente a la producción por productos:

$$q = (D^T - (H^d)^T)_x (t^m + v),$$

y, como es obvio, la ecuación del modelo asociado será la siguiente:

$$g = D^T(D^T - (H^d)^T)_x(t^m + v).$$

Análogamente, se introduce el modelo simplificado de oferta por productos de flujos totales. Como se verá, en este caso la variable independiente es v. Así que si se considera la igualdad

$$U^T i + v = g$$

y teniendo en cuenta la hipotética estabilidad de D y H, se puede sustituir g por $D^T q$ y el vector de los inputs intermedios por $H^T q$. De tal forma que se obtiene

$$H^T q + v = D^T q.$$

Ahora, con el objetivo de despejar la producción por productos, se va operando

$$(D^T - H^T)q = v,$$

después se multiplican por la izquierda ambos miembros de la anterior igualdad por la inversa generalizada de $(D^T - H^T)$ (se considera esta matriz de rango completo y de orden $m \times n$, con la particularidad que $m < n$) y inmediatamente se obtiene la ecuación del modelo

$$q = (D^T - H^T)_x v.$$

En relación a los modelos de oferta, también es factible recurrir a la traspuesta. En este sentido, si se considera la igualdad entre inputs y producción (en su forma traspuesta),

$$iU + v^T = g^T,$$

y, acto seguido, se recurren a las sustituciones anteriores (adaptadas a este escenario), se ve como la igualdad inicial se puede mostrar alternativamente:

$$q^T H + v^T = q^T D.$$

Después, con vistas a explicar la producción por productos se va operando y se obtiene

$$q^T(D - H) = v^T,$$

a partir de aquí, hay que multiplicar por la derecha ambos miembros de la igualdad por la inversa generalizada de $(D - H)$. Esta matriz tiene que ser de orden $m \times n$, o sea, se admite que el número de productos es estrictamente menor (o igual) al número de ramas, de ahí que

$$(D - H)(D - H)_x = I_m.$$

Por lo tanto, la ecuación del modelo de oferta resultante es la siguiente:

$$q^T = v^T (D - H)_x.$$

La matriz $(D - H)_x$ es la inversa generalizada de Ghosh y su elemento genérico, δ_{ij}, representa el incremento en la producción del producto j ante un incremento de una unidad del valor añadido de la rama de actividad i.

5. TRANSFORMACIÓN DE TABLAS *SUPPLY-USE* EN TABLAS SIMÉTRICAS

En este apartado se tratan las distintas estimaciones de matrices cuadradas de inputs interiores[5] a partir de la matriz de consumos interiores, U^d, desde las dos ópticas posibles. Además, se obtiene la misma estimación, de ahí que exista una complementariedad entre modelos de demanda y oferta. En realidad, se tratan las matrices de consumos intermedios que forman parte de las STs asociadas a las hipótesis de tecnología.

Si por alguna razón se pretenden estimar las matrices de coeficientes técnicos (o de distribución) asociadas a los modelos construidos a partir de las SUTs el cómputo también sería inmediato. En distintos trabajos se explica la forma de obtener estas matrices de coeficientes técnicos desde la óptica de la demanda; así de entrada se puede mencionar a ten Raa y Rueda-Cantuche (2005). Eso sí, cuando recurren a la hipótesis de tecnología de producto trabajan con esquemas cuadrados por lo que se pierde información disponible en las SUTs, tal como se apuntó. Por los motivos anteriormente indicados, cuando se acude a la hipótesis de tecnología de producto no se pueden construir modelos de demanda y oferta al mismo tiempo sí no coincide el número de productos con el número de ramas de actividad, de ahí que más adelante se particularice considerando el mismo número de filas que columnas, $m = n$.

[5] En lo sucesivo, se simbolizará la matriz de consumos intermedios (interiores) producto por producto mediante W^d, y si la misma es sector por sector mediante ω^d. También se especificará entre paréntesis la hipótesis de trabajo: tecnología de producto o industria, o sea, *(o)* o *(i)* según proceda.

Para obtener una matriz cuadrada producto por producto de consumos intermedios interiores basándose en la hipótesis de tecnología de industria, $W^d(i)$, existen dos alternativas que conducen a la misma solución: vía demanda o vía oferta. Las ecuaciones de los modelos de referencia son las siguientes:

$$q = (I - B^d D^T)^{-1} y^d \qquad \text{y} \qquad q = (I - C(H^d)^T)^{-1} C(t^m + v).$$

A continuación, se comprueba fácilmente como se cumple la siguiente igualdad

$$B^d D^T \hat{q} = (C(H^d)^T \hat{q})^T.$$

Por un lado, se tiene que

$$B^d D^T \hat{q} = U^d \hat{g}^{-1} V^T \hat{q}^{-1} \hat{q}$$

y simplificando se obtiene

$$W^d(i) = U^d \hat{g}^{-1} V^T = U^d C^T.$$

Por otro lado, atendiendo a la propiedad relativa a la trasposición de un producto de matrices se tiene que

$$(C(H^d)^T \hat{q})^T = \hat{q} H^d C^T$$

y se ve como

$$\hat{q} H^d C^T = \hat{q} \hat{q}^{-1} U^d (V \hat{g}^{-1})^T.$$

Por último, simplificando y operando se obtiene $W^d(i)$ desde esta óptica

$$W^d(i) = U^d \hat{g}^{-1} V^T = U^d C^T.$$

En relación a la estimación de una matriz cuadrada de inputs intermedios interiores por ramas de actividad de acuerdo con el supuesto mencionado, $\omega^d(i)$, sucede algo análogo a lo expuesto. También se puede enfocar desde las dos perspectivas indicadas. Las ecuaciones de los modelos de referencia son las siguientes:

$$g = (I - D^T B^d)^{-1} D^T y^d \qquad \text{y} \qquad g = (I - (H^d)^T C)^{-1} (t^m + v).$$

En efecto, también se verá como se cumple la siguiente igualdad relativa a matrices de consumos intermedios interiores:

$$\omega^d(i) = D^T B^d \hat{g} = ((H^d)^T C \hat{g})^T.$$

Con el fin de comprobarla, se modifica el primer miembro apoyándose en los coeficientes correspondientes a las SUTs. En concreto queda

$$D^T B^d \hat{g} = V^T \hat{q}^{-1} U^d \hat{g}^{-1} \hat{g} = V^T \hat{q}^{-1} U^d,$$

pero como $V^T \hat{q}^{-1}$ se corresponde con D^T, ya se obtiene por la vía de la demanda que

$$\omega^d(i) = D^T U^d.$$

A su vez, se tiene que

$$\hat{g}\, C^T H^d = \hat{g}\,(V\hat{g}^{-1})^T \hat{q}^{-1} U^d$$

y operando queda

$$\hat{g}\;(V\hat{g}^{-1})^T\;\hat{q}^{-1}\;U^d = \hat{g}\;\hat{g}^{-1} V^T\;\hat{q}^{-1} U^d.$$

Ahora bien, simplificando

$$\hat{g}\;\hat{g}^{-1} V^T\;\hat{q}^{-1} U^d = V^T\;\hat{q}^{-1} U^d,$$

o sea, que según se preveía, desde la perspectiva de la oferta se llega a la misma estimación. En consecuencia,

$$V^T \hat{q}^{-1} U^d = D^T U^d.$$

En realidad, la estimación $\omega^d(i)$ se corresponde con el producto de la traspuesta de los coeficientes de mercado por la matriz de consumos intermedios interiores.

Basándose en la hipótesis de la tecnología del producto y en un contexto en dónde se disponga de un mismo número de productos que sectores, también se ve como se complementan los correspondientes modelos de demanda y oferta, sus ecuaciones son las siguientes:

$$q = (I - B^d C^{-1})^{-1} y^d \qquad \text{y} \qquad q = (I - D^{-T} (H^d)^T)^{-1} D^{-T}(t^m + v).$$

Así se ve, por un lado, como sería la matriz de consumos intermedios producto por producto, $W^d(o)$, en relación al modelo de demanda:

$$W^d(o) = B^d C^{-1} \hat{q} = U^d \hat{g}^{-1}(V\hat{g}^{-1})^{-1} \hat{q}\,,$$

atendiendo a la propiedad de la inversa de un producto se tiene que

$$(V\hat{g}^{-1})^{-1} = \hat{g}\,V^{-1},$$

de ahí que sustituyendo quede

$$U^d \hat{g}^{-1}(V\hat{g}^{-1})^{-1} \hat{q} = U^d \hat{g}^{-1} \hat{g}\,V^{-1} \hat{q}$$

y ahora simplificando se obtiene que

$$U^d \hat{g}^{-1} \hat{g}\,V^{-1} \hat{q} = U^d(\hat{q}^{-1} V)^{-1} = U^d D^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$W^d(o) = B^d C^{-1}\hat{q} = U^d D^{-1}.$$

En relación a este modelo, la matriz de coeficientes técnicos interiores asociada, $A_o(U^d, V)$, se obtendría de forma inmediata. En efecto,

$$A_o(U^d, V) = B^d C^{-1} = U^d \hat{g}^{-1}(V\hat{g}^{-1})^{-1} = U^d \hat{g}^{-1}\hat{g}\, V^{-1} = U^d V^{-1}.$$

Este resultado aparece en distintas publicaciones, aunque para flujos totales. Véase, por ejemplo, Viet (1994), Almon (2000) o ten Raa y Rueda-Cantuche (2005).

Por otro lado se ve que la matriz de consumos intermedios relativa al modelo de oferta

$$(D^{-T}(H^d)^T \hat{q})^T = ((D^{-1})^T (H^d)^T \hat{q})^T = \hat{q} H^d D^{-1} = \hat{q}\,\hat{q}^{-1} U^d D^{-1} = U^d D^{-1}.$$

De ahí que se pueda expresar como sigue:

$$W^d(o) = U^d D^{-1}.$$

Las restantes posibilidades son los modelos de demanda y oferta relativos a la producción de sectores basados en la hipótesis de tecnología de producto. En principio se escoge el escenario cuadrado, $m = n$. El caso general, $m > n$, se tratará posteriormente. Las expresiones de estos modelos son las siguientes:

$$g = (I - C^{-1}B^d)^{-1}C^{-1}y^d \quad \text{y} \quad g = (I - (H^d)^T D^{-T})^{-1}(t^m + v).$$

Se pone de manifiesto su complementariedad a través de estimación de la matriz de consumos intermedios sector por sector, $\omega^d(o)$, de acuerdo con este supuesto. Si se acude al modelo de demanda ahora indicado, la matriz surge del siguiente producto matricial:

$$C^{-1}B^d \hat{g}.$$

A partir de aquí, se sustituye B^d y mediante una mera simplificación se obtiene que

$$C^{-1}B^d \hat{g} = C^{-1}U^d \hat{g}^{-1}\hat{g} = C^{-1}U^d.$$

A través del modelo de oferta, la matriz $\omega^d(o)$ resulta de la traspuesta de un producto matricial. En concreto,

$$((H^d)^T D^{-T}\hat{g})^T,$$

que también se puede expresar alternativamente mediante

$$\hat{g}\, D^{-1} H^{d}.$$

Teniendo en cuenta que

$$D^{-1}=(\hat{q}^{\,-1}V)^{-1}= V^{-1}\,\hat{q}$$

y al mismo tiempo si se sustituye H^{d} por $\hat{q}^{\,-1}U^{d}$ queda

$$\hat{g}\, D^{-1}H^{d} = \hat{g}\, V^{-1}\,\hat{q}\;\hat{q}^{\,-1}\, U^{d} = \hat{g}\, V^{-1}U^{d},$$

pero como $C = V\hat{g}^{\,-1}$ entonces se tiene que

$$C^{-1} = (V\hat{g}^{\,-1})^{-1} = \hat{g}\, V^{-1},$$

de tal modo que

$$\hat{g}\, V^{-1}U^{d} = C^{-1}U^{d},$$

se puede ver como la matriz de consumos inputs intermedios se estima mediante un producto matricial. Analíticamente se expresa

$$\omega^{d}(o)= C^{-1}U^{d}.$$

A modo de resumen, se presenta la siguiente tabla en la que aparecen las distintas alternativas estudiadas anteriormente para estimar la matriz de consumos intermedios interiores:

Tabla 1. Estimaciones de la matriz de consumos intermedios interiores

	hipótesis de tecnología de producto	hipótesis de tecnología de industria
producto × producto	$W^{d}(o) = U^{d}D^{-1}$	$W^{d}(i) = U^{d}C^{T}$
industria × industria	$\omega^{d}(o)= C^{-1}U^{d}$	$\omega^{d}(i)= D^{T}U^{d}$

Fuente: Elaboración propia

Se observa que para obtener matrices de consumos intermedios interiores cuadradas por productos hay que multiplicar la matriz de consumos intermedios de flujos interiores, U^{d}, por la derecha por C^{T} o por D^{-1} (por una matriz o por otra en función de la hipótesis asumida). Para obtener matrices de consumos intermedios cuadradas por ramas de actividad hay que multiplicar U^{d} por la izquierda por D^{T} o C^{-1} (una vez más, según la hipótesis considerada). Por supuesto que la multiplicación por las inversas generalizadas de D y C solamente tienen sentido en determinados contextos (según se explicó anteriormente). Recuérdese que la construcción de algunos modelos está condicionada por el número de productos e industrias, en un caso se exige $m<n$ y en otro $m>n$.

6. APLICACIÓN PRÁCTICA

En este apartado se acude a las SUTs de Euskadi del año 2009 para resaltar la utilidad de algunos aspectos metodológicos abordados en este artículo. El Eustat, instituto oficial de estadística de Euskadi, ofrece las SUTs valorados a precios básicos con una desagregación de 6×4. Esta dimensión es muy manejable y vale perfectamente para destacar las principales peculiaridades del formato rectangular.

Por lo tanto, se consideran dichas tablas de forma conjunta y se calcula la pseudoinversa de Leontief (interior):

$(C\text{-}B^d)_x =$

1,578	0,009	0,003	-0,052	0,019	0,054
-0,335	1,350	0,359	0,123	0,048	0,133
0,018	0,008	1,383	0,074	0,027	0,125
0,181	0,135	0,207	1,469	1,225	1,162

En general, esta matriz tiene unas características específicas. A diferencia de lo que sucede en el entorno de la tabla simétrica –en donde los elementos de la inversa de Leontief son positivos–, en este contexto emergen cifras negativas. En este esquema, un mismo producto puede ser producido por distintas ramas. Al cuantificar las alteraciones en la producción, de un determinado sector, motivadas por modificaciones en la demanda final de un producto, es probable que surjan ciertas substituciones a la hora de elaborar dicho producto, es decir, que puede existir una mayor dependencia de la producción de otro sector, en vez del considerado. Probablemente, por esta razón aparezca este problema. La presencia de cifras negativas (en relación a la hipótesis de tecnología de producto[6]) ha sido tratada por varios autores, entre ellos por Konijn; así ten Raa y Rueda-Cantuche (2005) indican como este autor apunta tres razones por las

[6] Las ecuaciones de los modelos pueden adoptar distintas expresiones pero esta problemática está presente en un caso u otro.

que aparecen estos valores negativos: errores de medición, coexistencia de tecnologías y/o problemas de agregación. En todo caso, existen distintos métodos para corregir esas cifras, como puede ser la sustitución de esos valores negativos por ceros y a continuación aplicar el RAS hasta alcanzar el equilibrio (Viet, 1994). Otra de las herramientas empleadas para subsanar dicho problema es la aplicación del algoritmo de Gauss–Jacobi, para mayor detalle se puede ver Kornelis y Koole (2003) o Almon (2000). En resumen, la hipótesis de trabajo es la de tecnología de producto, y los modelos asentados en la mencionada hipótesis cumplen los cuatro axiomas deseables, pero es muy habitual que surjan cifras negativas en la matriz de coeficientes asociada, aunque comúnmente toman valores muy pequeños. La fuerte agregación sectorial de una economía también puede provocar una distorsión en los resultados.

Ahora, se comprueba que el modelo simplificado de demanda (interior) está calibrado. Dicho de otra manera, que el producto matricial de la anterior pseudoinversa por la demanda final es igual a la producción por ramas de actividad (no homogéneas).

$$\begin{bmatrix} 1{,}58 & 0{,}01 & 0{,}00 & -0{,}05 & 0{,}02 & 0{,}05 \\ -0{,}33 & 1{,}35 & 0{,}36 & 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}13 \\ 0{,}02 & 0{,}01 & 1{,}38 & 0{,}07 & 0{,}03 & 0{,}13 \\ 0{,}18 & 0{,}14 & 0{,}21 & 1{,}47 & 1{,}22 & 1{,}16 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 246.210 \\ 29.585.356 \\ 9.211.660 \\ 17.427.106 \\ 13.626.569 \\ 14.841.317 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 825.794 \\ 47.954.063 \\ 16.502.791 \\ 65.492.586 \end{bmatrix}$$

No se trata de reproducir las distintas matrices simétricas estudiadas anteriormente, sus cálculos no revisten mayor problema. A modo de ejemplo, se construyen las matrices de consumos intermedios mediante la hipótesis de tecnología de industria. En este sentido, se considera la matriz de consumos intermedios interiores y se resaltan sus totales por filas y columnas:

U^d =

35.156	223.142	15.779	53.611	327.688
130.936	11.074.282	3.103.681	3.460.344	17.769.243
4.538	256.421	4.394.846	2.782.832	7.438.637
51.406	2.027.592	725.106	5.872.484	8.676.588
26.294	2.517.422	872.464	7.206.853	10.623.033
5.332	80.336	48.995	867.164	1.001.827
253.662	16.179.195	9.160.871	20.243.288	

Primeramente, se indica la matriz producto por producto:

$W^d(i)$ =

23.710	229.262	16.559	23.516	21.619	13.023	327.688
89.243	10.859.499	3.128.578	1.483.392	1.369.892	838.638	17.769.243
3.778	265.142	4.372.882	1.096.083	1.027.895	672.856	7.438.637
36.179	2.022.748	734.736	2.312.570	2.150.170	1.420.184	8.676.588
19.603	2.498.847	884.467	2.838.345	2.638.905	1.742.866	10.623.033
3.818	84.311	49.983	338.813	315.229	209.672	1.001.827
176.332	15.959.809	9.187.205	8.092.720	7.523.711	4.897.240	

A continuación se muestra la matriz industria por industria:

$\omega^d(i)$=

34.835	279.023	32.987	71.906	418.751
130.976	11.029.784	3.141.782	3.705.519	18.008.061
4.608	261.903	4.333.326	2.768.426	7.368.263
83.244	4.608.486	1.652.775	13.697.437	20.041.942
253.662	16.179.195	9.160.871	20.243.288	

Con este supuesto de trabajo no aparecen cifras negativas, ni es necesario recurrir a inversas (o pseudoinversas). Los cálculos son más elementales que en la otra hipótesis, aquí simplemente se acude a un sumatorio de productos de números positivos.

7. CONCLUSIONES

En general, las SUTs poseen un mayor número de productos que de industrias, es decir, son esquemas rectangulares. Aunque este formato dificulta algo la modelización económica, no es necesario realizar agregaciones para conseguir matrices cuadradas. Las matrices rectangulares se pueden abordar mediante el uso de inversas generalizadas de tal forma que se obtienen modelos de demanda y oferta alternativos a los asociados a tablas simétricas, producto por producto o industria por industria. En este artículo también se ha resaltado la construcción de modelos rectangulares de forma simplificada, que están calibrados y son susceptibles de uso.

Se explicó la construcción de matrices simétricas (interiores) mediante las hipótesis de tecnología de producto e industria. De modo resumido, se tiene que para obtener matrices de consumos intermedios interiores cuadradas por productos hay que postmultiplicar U^d por C^T o por D^{-1}, en función de la hipótesis asumida. A su vez, para elaborar matrices de consumos intermedios cuadradas por industrias hay que premultiplicar U^d por D^T o por C^{-1}. No obstante, se ha enfatizado que la elaboración de tablas simétricas no es en un trámite obligatorio.

En definitiva, no se deben elaborar matrices cuadradas para poder invertirlas, sino explotar al máximo la información disponible en las SUTs. Se entiende que en la investigación económica se ha dado un cierto desvío de atención: las inversas son un mero instrumento de trabajo no un fin en sí mismas.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMON, C. (2000): "Product-to-Product Tables via Product-Technology with no Negative Flows". Economics Systems Research. Vol. 12, núm. 1, pp. 27–43.
- ARMSTRONG, A. (1975): "Technology Assumptions in the Construction of United Kingdom Input-Output Tables" in Allen, R.; Gossling, W. F. [ed.]: Estimating and Updating Input-Output Coefficients. Input-Output Publishing Co. London.
- BAKSALARY, J. y BAKSALARY, O.M. (2007): "Particular Formulae for the Moore-Penrose Inverse of a Column Wise Partitioned Matrix". Linear Algebra and its Applications. Vol. 421, núm. 1, pp. 16–23.
- BON, R. (1986): "Comparative Stability Analysis of Demand-Side and Supply side Input-Output Models". International Journal of Forecasting. Vol. 2, pp. 231–235.
- DIETZENBACHER, E. (1997): "In Vindication of the Ghosh Model: a Reinterpretation as a Price Model". Journal of Regional Science. Vol. 37, pp. 629–651.

- EUROSTAT (2008): Updating and Projection Input-Output Tables. Office for Official Publications of the European Communities, Luxemburg.
- GHOSH, A. (1958): "Input-Output Approach in an Allocation System". Economica. Vol. 25, pp. 58–64.
- GUERRA, A. I. y SANCHO, F. (2011): "Revisiting the Original Ghosh Model: can it be Made more Plausible?" Economic Systems Research. Vol. 23, núm. 3, pp. 319–328.
- GUO, J., LAWSON, A. M. y PLANTING, M. A. (2002): From Make-Use to Symmetric I-O Tables: An Assessment of Alternative Technology Assumptions. 14th International Input-Output Conference, Montreal.
- KONIJN, P. (1994): The Make and Use of Commodities by Industries: on the Compilation of Input-Output Data from the National Accounts. Enschede. Faculty of Public Administration and Public Policy, University of Twente.
- KOP JANSEN, P. y TEN RAA, T. (1990): "The Choice of Model in the Construction of Input-Output Coefficients Matrices". International Economic Review. Vol. 31, pp. 213–227.
- KORNELIS, M., y KOOLE, B. (2003) "Building Compatible Supply, Use, and Input-Output Tables on the Basis of Integrated Data: An Application to the Agricultural Economy of the Netherlands". Agricultural Economics Research Institute. Wageningen University and Research, Wageningen.
- LUPPINO, M., GAJEWSKI, G., ZOHIR, S., KHONDKER, B. y CROWTHER, D. (2004) Estimating the Impacts of the Jamuna Bridge on Poverty Levels in Bangldesh using SAM and CGE Models: A Comparative Study. EcoMod Input-Output and General Equilibrium: Data, Modeling and Policy Analysis Conference. Bruxelas.
- MATTEY, J. P. y TEN RAA, T. (1997): "Primary Versus Secondary Production Techniques in US Manufacturing". Review of Income and Wealth. Vol. 43, pp. 449–464.

- MILLER, R. (1989): “Stability of Supply Coefficients and Consistency of Supply-Driven and Demand-Driven Input-Output Models: a Comment”. Environment and Planning A. Vol. 21, pp. 1113–1120.
- MOORE, E. H. (1920): “On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract)”. Bulletin of the American Mathematical Society. pp. 394–395.
- OLSEN, A. (2000): General Perfect Aggregation of Industries in Input-Output Models. Economic Modelling. Working Paper Series, núm. 2.
- OOSTERHAVEN, J. (1988): “On the Plausibility of the Supply-Driven Input-Output Model”. Journal of Regional Science. Vol. 28, pp. 203–217.
- OOSTERHAVEN, J. (1989): “The Supply-Driven Input-Output Model: A New Interpretation but Still Implausible”. Journal of Regional Science. Vol. 29, pp. 459–465.
- OOSTERHAVEN, J. (1996): “Leontief versus Ghoshian Price and Quantity Models”. Southern Economic Journal. Vol. 62, núm. 3, pp. 750–759.
- PENROSE, R. (1955): “A Generalized Inverse for Matrices”. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 51, pp. 406–413.
- PEREIRA, X. (2006): Elaboración e Análise de Modelos Económicos baseados no Marco Input-Output. Servizo de Publicacións e Intercambio Científico. Santiago de Compostela.
- PEREIRA, X., CARRASCAL, A. y FERNÁNDEZ, M. (2011): Impacto Económico do Turismo Receptor através de Modelos Origem-Destino: uma Aplicaçao para a Galiza, in Haddad, E.; Ramos, P.; Castro, E. [ed.]: Modelos Operacionais de Economia Regional. pp. 101–121. Principia Editora. Parede, Portugal.
- PEREIRA, X., QUIÑOÁ; X, L. y FERNÁNDEZ, M. (2011) “Actualización Global de Tablas Origen-Destino: una Alternativa al Método Euro”. Análise Económica, 42. Santiago de Compostela http://ideas.repec.org/p/edg/anecon/0042.html

- RAINER, N. (1989): "Descriptive Versus Analytical Make-Use Systems: Some Austrian Experiences", in Miller, R.; Polenske, K.; Rose, A. [ed.]: Frontiers of Input-Output Analysis, Oxford University Press, New York.
- ROSE, A. y ALLISON, T. (1989): "On the Plausibility of the Supply-Driven Input-Output Model: Empirical Evidence on Joint Stability". Journal of Regional Science. Vol. 29, pp. 451–458.
- RUEDA-CANTUCHE, J.M. (2011): "Econometric Analysis of European Carbon Dioxide Emissions based on Rectangular Supply-Use Tables". Economic Systems Research. Vol. 23, núm. 3, pp. 261–280.
- SCHINNAR, A. (1978): "The Leontief Dynamic Generalized Inverse". The Quarterly Journal of Economics. Vol. 92, núm. 4, pp. 641–52.
- STAHMER, C. (1985): "Transformation Matrices in Input-Output Compilation" in Smyshlyaev, A. [ed.]: Input-Output Modelling. pp. 225–236. New York, Springer.
- STEENGE, A. (1990): "The Commodity Technology Revisited: Theoretical Basis and an Application to Error Location in the Make-Use Framework". Economic Modelling. Vol. 7, núm. 4, pp. 376–387.
- TEN RAA, T. y RUEDA-CANTUCHE, J.M. (2005): "Análisis de las Producciones Secundarias en la Economía Andaluza". Revista de Estudios Regionales. Vol. 73, pp. 43–77.
- UNITED NATIONS (1999): Handbook of Input-Output Table Compilation and Analysis, Studies in Methods, Series F, núm. 74.
- VIET, V. (1994): "Practices in Input-Output Table Compilation". Regional Science and Urban Economics. Vol. 24, pp. 27–54.Young, P. (1986): "The US Input-Output Experience-Present Status and Future Prospects" in Franz, A.; Rainer, N. [ed.]: Problems of Compilation of Input-Output Tables. pp. 121–145. Orac. Viena.
- ZHAO, J. (2002): The Techniques of Compiling the Rectangular UV Input-Output Table under the Hypothesis of Product Technology. 14th International Input-Output Conference. Montreal.