

# Una formulación para el problema de la recogida de residuos urbanos en Sevilla

López-Sánchez, A.D. (adlopsan@upo.es)

Hernández-Díaz, A.G. (agarher@upo.es)

Hinojosa, M.A. (mahinram@upo.es)

*Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica.  
Universidad Pablo de Olavide. Ctra. Utrera, Km 1. 41013 Sevilla, España.*

## RESUMEN

En este trabajo presentamos una formulación de un Problema de Rutas por Arcos con Capacidades (CARP) mediante un modelo compacto general basado en flujos para la recogida de residuos urbanos en la ciudad de Sevilla. Se realizan simulaciones con CPLEX en problemas existentes en la literatura.

## ABSTRACT

In this paper, we focus on the formulation of Capacitated Arc Routing Problems (CARP) and we present a general compact flow based model for the CARP and its resolution with exact methods by using CPLEX in different objective functions. As a real life application we model the waste collection problem in the city of Seville.

**Palabras clave:** Problemas de rutas por arcos con capacidades; Problema de recogida de basura; CPLEX.

**Área temática:** Optimización

# 1 INTRODUCCIÓN

LIPASAM es la empresa municipal de limpieza pública del ayuntamiento de Sevilla, responsable de la limpieza de los 1.077 km. de viales, la recogida de los residuos urbanos y su posterior tratamiento para ahorrar recursos y evitar la contaminación del medio ambiente. La recogida de residuos urbanos se lleva a cabo de forma mecanizada en toda la ciudad, prestándose dicho servicio 365 días al año.

En este trabajo se modela la recogida de residuos urbanos en Sevilla y para ello se formula un problema de rutas que contempla todos los aspectos necesarios para realizar una recogida óptima.

Los problemas de rutas normalmente son problemas que tratan con el transporte de bienes o personas entre depósitos y clientes, donde el objetivo es diseñar un conjunto de rutas para servir a los clientes con el mínimo coste posible para la empresa suministradora del servicio y la máxima satisfacción de los clientes.

Un problema de rutas para una flota de vehículos puede clasificarse como un problema de rutas por nodos, frecuentemente conocidos como problemas de rutas de vehículos, o un problema de rutas por arcos (*Arc Routing Problem (ARP)*), dependiendo de dónde está situada la demanda en la red viaria. En los problemas de rutas de vehículos, que abarcan la mayoría de las aplicaciones de problemas de rutas, la demanda está localizada en la ubicación de los clientes, representados por nodos en la red. Sin embargo, en los problemas de rutas por arcos, la demanda no está situada en puntos concretos de la vía sino a lo largo de ésta, representada por arcos o aristas, razón por la cual hay que recorrerla completamente.

El problema de recogida de residuos urbanos es un ARP puesto que las calles tienen que recorrerse completamente, incluso si los contenedores están localizados en puntos concretos de la calle. Además, la capacidad de los vehículos está limitada y los vehículos no tienen que ser todos iguales. Entonces, la naturaleza del problema que estamos considerando en este trabajo es un ARP con capacidades (CARP). El CARP puede ser un problema con arcos no dirigidos (UCARP) o un problema con

arcos dirigidos (DCARP). Si se consideran tanto arcos dirigidos como no dirigidos, el CARP es mixto (MCARP). Existe una amplia literatura sobre problemas de rutas por arcos (ver, por ejemplo, Dror, 2000).

La primera formulación para el CARP fue propuesta en Golden y Wong (1981) donde se incluye un número considerable de restricciones. En Belenguer y Benavent (1998) puede verse un modelo diferente para el UCARP basado en el poliedro asociado con el CARP y además demuestran que éste sólo depende de las aristas obligatorias o requeridas. En 2003, estos mismos autores sugieren una formulación diferente para el mismo problema que contiene una única variable para cada arista en el grafo pero que incluye también un número considerable de restricciones. Posteriormente, en Belenguer et al. (2006) se desarrolla un estudio sobre cotas inferiores para el MCARP basado en el modelo definido en Belenguer y Benavent (2003). La formulación más reciente para el MCARP fue propuesta por Gouveia et al. (2010), donde se formula el MCARP como un modelo compacto usando dos ideas para diseñarlo: el concepto de flujos para garantizar la eliminación de subciclos y garantizar la conectividad de las soluciones y el concepto de indexar las variables por vehículos para garantizar la correspondencia entre vehículos y viajes.

En este trabajo se formula un DCARP basándose en el modelo de Gouveia et al. (2010) pero con las siguientes innovaciones: (i) se consideran dos nodos especiales en lugar de uno, el depósito de vehículos y el vertedero (esto puede extenderse fácilmente a más de dos nodos especiales), (ii) se indexan las variables no sólo por vehículos sino por vehículos y tipo de viaje; (iii) se añaden restricciones adicionales para asegurar que cada ruta depende del viaje en el que se encuentre, (iv) se pueden asignar a los vehículos varios viajes en cada ruta; esta situación sucede porque la capacidad de los vehículos es relativamente pequeña y el tiempo de trabajo de cada vehículo debe cumplirse y (v) se asume que los vehículos pueden ser diferentes.

El trabajo se organiza de la siguiente forma. En la sección 2, se definen los problemas de rutas en general y el CARP en particular y se describe el problema de recogida de residuos urbanos. En la sección 3, se presentan algunos resulta-

dos computacionales. Una sección final de comentarios sobre la formulación y los experimentos computacionales cierra este trabajo.

## 2 EL PROBLEMA DE LA RECOGIDA DE RESIDUOS URBANOS EN SEVILLA

**Definición 1** *Un grafo,  $G$ , es un par  $(V, A \cup E)$ , donde  $V$  es el conjunto de nodos,  $A$  es el conjunto de arcos y  $E$  es el conjunto de aristas.  $G$  se dice que es no dirigido si  $A = \emptyset$  y  $E \neq \emptyset$ , se dice que es dirigido si  $A \neq \emptyset$  y  $E = \emptyset$  y se llamará mixto si  $A \neq \emptyset$  y  $E \neq \emptyset$ .*

**Definición 2** *Un problema de rutas por arcos (ARP) definido sobre el grafo  $G = (V, A \cup E)$  consiste en encontrar la ruta o el conjunto de rutas que optimicen unos determinados objetivos tales como el total de los costes y/o el total de vehículos necesarios y/o la carga de cada vehículo.*

Si el ARP está limitado en la capacidad de los vehículos es un problema de rutas con capacidades (CARP), tal y como sucede en el problema de la recogida de residuos urbanos.

Así, el problema de la recogida de residuos urbanos en Sevilla es un CARP. Como en la ciudad hay tanto vías de un único sentido como vías de doble sentido se considerará un grafo totalmente dirigido  $G = (V, A)$  donde cada arista de  $E$  es reemplazada por dos arcos opuestos, es decir, el problema a considerar es un DCARP. Según la información que LIPASAM nos ofrece, se han de tener en cuenta dos nodos especiales, el depósito, que es el lugar donde los vehículos se almacenan y donde deben comenzar el primer viaje y el vertedero, que es el lugar donde los vehículos descargan su contenido una vez que completan su capacidad. Cada vehículo debe recorrer las calles hasta completar su jornada laboral y así cada uno realizará un “tour” o una ruta. Cada ruta realizada por un vehículo es una secuencia de, al

menos, dos viajes, el primer viaje y el último viaje. En el viaje inicial, el vehículo sale del depósito, comienza a recoger basura y una vez que completa su capacidad se dirige hacia el vertedero para vaciarlo. Una vez realizado el vaciado se comienzan los viajes intermedios (si los hubiera) que comienzan en el vertedero y vuelven a éste una vez que el vehículo completa de nuevo su capacidad. Para finalizar, se realiza un último viaje exactamente igual que los viajes intermedios pero una vez que el vehículo descarga su contenido en el vertedero se dirige hacia el depósito para guardar el vehículo. Entonces, todos los vehículos llevan a cabo al menos dos viajes y esto se debe a que la capacidad de los vehículos es relativamente pequeña y el tiempo de trabajo de cada vehículo debe cumplirse.

Por otro lado, las calles, en las cuales hay situados contenedores, deben ser servidas obligatoriamente ya que tienen demanda positiva. Algunas de las calles no tienen demanda puesto que no hay contenedores situados en ellas, y éstas pueden ser recorridas sólo para asegurar la conectividad de los viajes. Las calles, tengan contenedores o no, pueden ser recorridas por un vehículo sin prestar servicio, es decir, pueden utilizarse como enlaces sin servicio. Además, existen un conjunto de reglas que se derivan de las normas de tráfico que provocan limitaciones en los giros y que pueden incluirse en el modelo simplemente reorganizando y numerando los arcos, ver, por ejemplo, Bautista et al. (2003) o Coberán et al. (2002). En este trabajo las limitaciones en los giros no se han tenido en cuenta pero sí se tendrán en trabajos futuros cuando se resuelva el problema real de la recogida de basura en Sevilla.

Para resolver el problema se conocen, la capacidad de vehículos, el número de vehículos disponibles, la demanda de cada calle, el coste de recorrer cada calle tanto prestando servicio como sin prestar servicio, el coste fijo asociado a cada vehículo y el coste de descargar un vehículo en el vertedero. En el este trabajo los costes se medirán en tiempos.

Para la formulación del problema se utiliza la siguiente notación.

- $0 \in V$  es el depósito donde se guardan los vehículos.

- $l \in V$  es el vertedero donde se descargan los vehículos.
- $|V| = n + 2$  es el número total de nodos.
- $R \subseteq A$  es el conjunto de arcos obligatorios o requeridos de  $G$ , que también se pueden llamar tareas.
- $P$  es el número máximo de vehículos disponibles. Como la flota de vehículos no es idéntica, se denota por  $P_m$  al número máximo de vehículos de tipo  $m$ , es decir,  $P = \sum_{m=1}^M P_m$ .
- $W_m$  es la capacidad de un vehículo de tipo  $m$ .
- $K$  es el número máximo de viajes permitidos en cada ruta, es decir, el número de veces que cada vehículo completa su capacidad.
- $\lambda$  es el tiempo en el que se incurre cada vez que se descarga un vehículo.
- $d_{ij}$  es el tiempo asociado al arco  $(i, j) \in A$ , es decir, el tiempo que se tarda en atravesar una calle sin recoger contenedores.
- $c_{ij}$  es el tiempo asociado al arco  $(i, j) \in R$ , es decir, el tiempo que se tarda en atravesar una calle recogiendo contenedores.
- $q_{ij}$  es la demanda del arco  $(i, j) \in R$ , es decir, la cantidad de basura recogida en los contenedores de cada calle.
- $Q_T$  es la demanda total,  $Q_T = \sum_{(i,j) \in R} q_{ij}$ .
- $\mu$  es el tiempo fijo asociado a cada vehículo, en este caso, es el tiempo que se tarda desde el vertedero al depósito.
- $C$  es el tiempo máximo de trabajo permitido a los vehículos.

Para cada vehículo  $p$ , cada tipo de viaje  $k$  y cada arco se definen las siguientes variables:

- $x_{ij}^{kp} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in R \text{ es servida por el vehículo } p \text{ en el viaje } k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
- $y_{ij}^{kp}$  es el número de veces que el arco  $(i, j) \in A$  es atravesado sin dar servicio por el vehículo  $p$  en el viaje  $k$ .

Las funciones objetivas consideradas para el problema de recogida de basura son optimizar el tiempo total de trabajo, el número de vehículos y la mínima carga de los vehículos con idea de balancear las rutas evitando de esta forma que algunos vehículos recojan poca basura. A pesar de que se consideran tres objetivos en este trabajo no se va a resolver un problema multiobjetivo sino que se van a resolver tres problemas independientemente tal y como se explica en la última sección.

$$\begin{aligned} & \min \sum_{p=1}^P \left[ \sum_{k=1}^K \left( \sum_{(i,j) \in R} c_{ij} x_{ij}^{kp} + \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} y_{ij}^{kp} \right) \right] & (2.1) \\ & + \lambda \sum_{p=1}^P \left[ \sum_{k=1}^K \left( \sum_{(i,l) \in A} y_{il}^{kp} + \sum_{(i,l) \in R} x_{il}^{kp} \right) \right] \\ & + \mu \sum_{p=1}^P \left( \sum_{(0,j) \in A} y_{0j}^{1p} + \sum_{(0,j) \in R} x_{0j}^{1p} \right) \end{aligned}$$

$$\min \sum_{p=1}^P \left( \sum_{j:(0,j) \in A} y_{0j}^{1p} + \sum_{j:(0,j) \in R} x_{0j}^{1p} \right) \quad (2.2)$$

$$\max \min_{p=1, \dots, P} \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{(i,j) \in R} q_{ij} x_{ij}^{kp} \right\} \quad (2.3)$$

Las restricciones que se deben imponer para optimizar el problema de la recogida de residuos son las que se muestran a continuación y que se irán comentado poco a poco.

La condiciones (2.4) y (2.5) imponen la continuidad de los viajes en cada nodo.

$$\sum_{j:(i,j) \in A} y_{ij}^{1p} + \sum_{j:(i,j) \in R} x_{ij}^{1p} = \sum_{j:(j,i) \in A} y_{ji}^{1p} + \sum_{j:(j,i) \in R} x_{ji}^{1p}, \quad (2.4)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad i \neq 0, l, \quad p = 1, \dots, P$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A} y_{ij}^{kp} + \sum_{j:(i,j) \in R} x_{ij}^{kp} = \sum_{j:(j,i) \in A} y_{ji}^{kp} + \sum_{j:(j,i) \in R} x_{ji}^{kp}, \quad (2.5)$$

$$i = 0, 1, \dots, n, l, \quad p = 1, \dots, P, \quad k \neq 1$$

La restricción (2.6) significa que el primer viaje debe empezar en el depósito y terminar en el vertedero; (2.7) que si el primer viaje se activa también debe haber un segundo viaje y la condición (2.8) indica sólo dos viajes son obligatorios.

$$\sum_{j:(0,j) \in A} y_{0j}^{1p} + \sum_{j:(0,j) \in R} x_{0j}^{1p} = \sum_{j:(j,l) \in A} y_{jl}^{1p} + \sum_{j:(j,l) \in R} x_{jl}^{1p}, \quad p = 1, \dots, P \quad (2.6)$$

$$\sum_{j:(0,j) \in A} y_{0j}^{1p} + \sum_{j:(0,j) \in R} x_{0j}^{1p} = \sum_{j:(l,j) \in A} y_{lj}^{2p} + \sum_{j:(l,j) \in R} x_{lj}^{2p}, \quad p = 1, \dots, P \quad (2.7)$$

$$\sum_{j:(l,j) \in A} y_{lj}^{(k+1)p} + \sum_{j:(l,j) \in R} x_{lj}^{(k+1)p} \leq \sum_{j:(l,j) \in A} y_{lj}^{kp} + \sum_{j:(l,j) \in R} x_{lj}^{kp}, \quad (2.8)$$

$$p = 1, \dots, P, \quad k = 2, \dots, K - 1$$

La recogida de la basura en cada calle está garantizada por (2.9); (2.10) impone que no debe excederse el coste de trabajo de cada vehículo; (2.11) y (2.12) sugieren que el coste de descarga está adecuadamente cargado en la función objetivo.

$$\sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^K x_{ij}^{kp} = 1, \quad (i, j) \in R \quad (2.9)$$



$$\mu + \sum_{k=1}^K \left( \sum_{(i,j) \in R} c_{ij} x_{ij}^{kp} + \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} y_{ij}^{kp} + \lambda \sum_{(i,l) \in A} y_{il}^{kp} + \lambda \sum_{(i,l) \in R} x_{il}^{kp} \right) \leq C, \quad (2.10)$$

$$p = 1, \dots, P$$

$$\sum_{j:(0,j) \in A} y_{0j}^{1p} + \sum_{j:(0,j) \in R} x_{0j}^{1p} \leq 1, \quad p = 1, \dots, P \quad (2.11)$$

$$\sum_{j:(l,j) \in A} y_{lj}^{kp} + \sum_{j:(l,j) \in R} x_{lj}^{kp} \leq 1, \quad p = 1, \dots, P, \quad k = 2, \dots, K \quad (2.12)$$

Además de las variables introducidas hasta el momento, es necesario añadir nuevas variables denominadas variables de flujo. Los flujos, a lo largo de la ruta son decrecientes y muestran el orden en que los arcos deben ser atravesados. Entonces, para cada vehículo  $p$ , cada tipo de viaje  $k$  y cada arco se define la siguiente variable:

- $f_{ij}^{kp}$  es el flujo en el arco  $(i, j) \in A$ , relacionado con la demanda restante del vehículo  $p$  en el viaje  $k$ .

Las restricciones (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) y (2.17) son restricciones de conservación de flujo que junto con las restricciones de enlaces (2.18) fuerzan la conectividad en los viajes y eliminan los subciclos. Además, (2.13) y (2.14) son típicas restricciones de conservaciones de flujos en cada nodo  $i$ , garantizando que si el arco  $(i, j)$  es servido por el vehículo  $p$ , entonces  $q_{ji}$  unidades de flujo son absorbidas por el nodo  $i$ .

$$\sum_{j:(j,i) \in A} f_{ji}^{1p} - \sum_{j:(i,j) \in A} f_{ij}^{1p} = \sum_{j:(j,i) \in R} q_{ji} x_{ji}^{1p}, \quad (2.13)$$

$$p = 1, \dots, P, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq 0, l$$

$$\sum_{j:(j,i) \in A} f_{ji}^{kp} - \sum_{j:(i,j) \in A} f_{ij}^{kp} = \sum_{j:(j,i) \in R} q_{ji} x_{ji}^{kp}, \quad (2.14)$$

$$p = 1, \dots, P, \quad k = 2, \dots, K, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad i \neq l$$

$$\sum_{j:(0,j) \in A} f_{0j}^{1p} = \sum_{(i,j) \in R} q_{ij} x_{ij}^{1p}, \quad p = 1, \dots, P \quad (2.15)$$

$$\sum_{j:(l,j) \in A} f_{lj}^{kp} = \sum_{(i,j) \in R} q_{ij} x_{ij}^{kp}, \quad p = 1, \dots, P, \quad k = 2, \dots, K, \quad (2.16)$$

$$\sum_{i:(i,l) \in A} f_{il}^{kp} = \sum_{i:(i,l) \in R} q_{il} x_{il}^{kp}, \quad p = 1, \dots, P, \quad k = 1, \dots, K \quad (2.17)$$

$$f_{ij}^{kp} \leq W_m (y_{ij}^{kp} + x_{ij}^{kp}), \quad (i, j) \in A, \quad p = 1, \dots, P, \quad (2.18)$$

$$k = 1, \dots, K, \quad m = 1, \dots, M$$

Para finalizar, (2.19), (2.20) y (2.21) definen la naturaleza de las variables de decisión.

$$x_{ij}^{kp} \in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in R, \quad p = 1, \dots, P, \quad k = 1, \dots, K \quad (2.19)$$

$$y_{ij}^{kp} \geq 0, \text{ entera}, \quad (i, j) \in A, \quad p = 1, \dots, P, \quad k = 1, \dots, K \quad (2.20)$$

$$f_{ij}^{kp} \geq 0, \quad (i, j) \in A, \quad p = 1, \dots, P, \quad k = 1, \dots, K \quad (2.21)$$

Tenemos que resaltar que la formulación que se propone aquí asume que el depósito y el vertedero no pueden usarse como nodos intermedios. Esta situación puede solucionarse replicando esos nodos, es decir, se añaden dos nuevos nodos, denotados por  $0'$  y  $l'$  con los mismos enlaces que los nodos  $0$  y  $l$ . En el caso de LIPASAM el único nodo que debe considerarse como intermedio es el depósito puesto que el vertedero está situado a las afueras de la ciudad.

Los siguientes lemas son necesarios para probar la validez del modelo para el problema de rutas por arcos con capacidades.

**Lemma 3** *Cualquier solución factible del problema cumple la condición de que no se exceda la capacidad de los vehículos.*

**Demostración.**

**Caso 1.** Para  $k = 1$  fijando  $i = 0$  y añadiendo (2.18) para todos los arcos  $(0, j) \in A$  se obtiene  $\sum_{j:(0,j) \in A} f_{0j}^{1p} \leq W_m \cdot \sum_{j:(0,j) \in A} (y_{0j}^{1p} + x_{0j}^{1p})$ , para  $m = 1, \dots, M$  y  $p = 1, \dots, P$ . Usando (2.11), la desigualdad anterior se convierte en  $\sum_{j:(0,j) \in A} f_{0j}^{1p} \leq W_m$ , para  $m = 1, \dots, M$  y  $p = 1, \dots, P$ . Finalmente, (2.15) nos da la siguiente desigualdad  $\sum_{(i,j) \in R} q_{ij} x_{ij}^{1p} \leq W_m$ , para  $m = 1, \dots, M$  y  $p = 1, \dots, P$  lo cual completa la demostración del Caso 1.

**Caso 2.** Para  $k \neq 1$  fijando  $i = l$  y añadiendo (2.18) para todos los arcos  $(l, j) \in A$  se obtiene  $\sum_{j:(l,j) \in A} f_{lj}^{kp} \leq W_m \cdot \sum_{j:(l,j) \in A} (y_{lj}^{kp} + x_{lj}^{kp})$ , para  $m = 1, \dots, M$  y  $p = 1, \dots, P$ . Usando (2.12), la desigualdad anterior se convierte en  $\sum_{j:(l,j) \in A} f_{lj}^{kp} \leq W_m$ , para  $m = 1, \dots, M$  y  $p = 1, \dots, P$ . Finalmente, (2.16) nos da la siguiente desigualdad  $\sum_{(i,j) \in R} q_{ij} x_{ij}^{kp} \leq W_m$ , para  $m = 1, \dots, M$  y  $p = 1, \dots, P$  lo cual completa la demostración del Caso 2.  $\square$

El siguiente lema muestra que cualquier solución factible del problema está conectada.

**Lemma 4** *Para cada vehículo  $p = 1, \dots, P$  y cada viaje  $k = 1, \dots, K$ , el grafo inducido por el conjunto de arcos correspondientes a las variables  $x_{ij}^{kp} = 1$  e  $y_{ij}^{kp} > 0$  está conectado.*

**Demostración.**

**Caso 1.** Para  $k = 1$  este resultado se prueba demostrando que cualquier vehículo que sirve tareas empieza en el depósito y termina en el vertedero.

Sea un conjunto cualquiera  $S \subset V \setminus \{0, l\}$  de nodos conteniendo una componente conectada de arcos obligatorios que se sirven por el vehículo  $p$ . Supongamos que  $0 \in \bar{S} = N \setminus S$  y que  $l \in \bar{S} = N \setminus S$ .

De (2.13) se sigue que

$$\sum_{i \in S} \left( \sum_{j:(j,i) \in A} f_{ji}^{1p} - \sum_{j:(i,j) \in A} f_{ij}^{1p} \right) = \sum_{i \in S} \left( \sum_{j:(j,i) \in R} q_{ji} x_{ji}^{1p} \right) = Q_S^{1p} + Q_{\bar{S}, S}^{1p},$$

donde  $Q_S^{1p}$  es la demanda servida en el subconjunto  $S$  por el vehículo  $p$  en el primer viaje y  $Q_{\bar{S},S}^{1p}$  es la demanda servida en los arcos de  $\bar{S}$  a  $S$  por el vehículo  $p$  en el primer viaje.

Si denotamos por

$$f_{X,Y}^{1p} = \sum_{(i,j) \in (X,Y): X,Y \subset V} f_{ij}^{1p},$$

la expresión anterior

$$\sum_{i \in S} \left( \sum_{j: (j,i) \in A} f_{ji}^{1p} - \sum_{j: (i,j) \in A} f_{ij}^{1p} \right)$$

puede reescribirse como  $f_{S,S}^{1p} + f_{\bar{S},S}^{1p} - f_{S,S}^{1p} - f_{S,\bar{S}}^{1p}$ , obteniéndose que  $f_{\bar{S},S}^{1p} = f_{S,\bar{S}}^{1p} + Q_S^{1p} + Q_{\bar{S},S}^{1p}$ .

Puesto que  $f_{S,\bar{S}}^{1p} \geq 0$ ,  $Q_{\bar{S},S}^{1p} \geq 0$  y estamos suponiendo que  $Q_S^{1p} > 0$ , se concluye que  $f_{\bar{S},S}^{1p} > 0$ . Usando (2.18) podemos afirmar entonces que  $y_{\bar{S},S}^{1p} > 0$  o  $x_{\bar{S},S}^{1p} > 0$ . Así, el vehículo  $p$  en el primer viaje conecta  $\bar{S}$  con  $S$ . Entonces el vehículo  $p$  en el primer viaje empieza en el depósito y termina en el vertedero.

**Caso 2.** Para  $k \neq 1$  este resultado se prueba demostrando que cualquier vehículo que sirve tareas empieza y termina en el vertedero.

Sea un conjunto cualquiera  $S \subset V \setminus \{l\}$  de nodos conteniendo una componente conectada de arcos obligatorios que se sirven por el vehículo  $p$ . Supongamos que  $l \in \bar{S} = N \setminus S$ .

De (2.14) se sigue que

$$\sum_{i \in S} \left( \sum_{j: (j,i) \in A} f_{ji}^{kp} - \sum_{j: (i,j) \in A} f_{ij}^{kp} \right) = \sum_{i \in S} \left( \sum_{j: (j,i) \in R} q_{ji} x_{ji}^{kp} \right) = Q_S^{kp} + Q_{\bar{S},S}^{kp},$$

donde  $Q_S^{kp}$  es la demanda servida en el subconjunto  $S$  por el vehículo  $p$  en el viaje  $k$  y  $Q_{\bar{S},S}^{kp}$  es la demanda servida en los arcos de  $\bar{S}$  a  $S$  por el vehículo  $p$  en el viaje  $k$ .

Se define

$$f_{X,Y}^{kp} = \sum_{(i,j) \in (X,Y): X,Y \subset V} f_{ij}^{kp}$$

para que la expresión

$$\sum_{i \in S} \left( \sum_{j:(j,i) \in A} f_{ji}^{kp} - \sum_{j:(i,j) \in A} f_{ij}^{kp} \right)$$

pueda reescribirse como  $f_{S,S}^{kp} + f_{\bar{S},S}^{kp} - f_{S,S}^{kp} - f_{S,\bar{S}}^{kp}$ , obteniéndose que  $f_{\bar{S},S}^{kp} = f_{S,\bar{S}}^{kp} + Q_S^{kp} + Q_{\bar{S},S}^{kp}$ .

Puesto que  $f_{S,\bar{S}}^{kp} \geq 0$ ;  $Q_{\bar{S},S}^{kp} \geq 0$  y suponiendo que  $Q_S^{kp} \geq 0$ , se obtiene  $f_{\bar{S},S}^{kp} > 0$ . Usando (2.18) podemos concluir afirmando que  $y_{\bar{S},S}^{kp} > 0$  o  $x_{\bar{S},S}^{kp} > 0$ . Entonces el vehículo  $p$  en el viaje  $k$  conecta  $\bar{S}$  con  $S$ , y además está conectado con el vertedero.  $\square$

Usando los dos lemas y las condiciones (2.4), (2.5), (2.7) y (2.8) puede demostrarse que cualquier solución factible para la formulación propuesta en este trabajo, es un conjunto de rutas que están formadas por viajes que realizan cada uno de los vehículos. Junto con la restricción (2.9) la solución también cumple que todos los arcos son servidos. Por todo esto, la demostración de la Proposición 5 es trivial.

**Proposición 5** *La formulación es válida para el CARP.*

### 3 RESULTADOS COMPUTACIONALES

Actualmente, existe un gran interés en los resultados de optimización multi-objetivo de numerosas aplicaciones. En determinadas ocasiones resolver un problema con un único objetivo resulta una simplificación abusiva o poco apropiada ya que calcular una solución óptima para un objetivo proporciona valores pobres para los otros objetivos. Por esta razón, en esta sección se han seleccionado un conjunto de ejemplos de referencia adaptados a la formulación propuesta en la sección anterior

y se ha resuelto el problema para tres funciones objetivos diferentes:  $f_1$ , véase la función (2.1), que minimiza el tiempo total de trabajo,  $f_2$ , definida en (2.2), que minimiza el número de vehículos y  $f_3$ , definida en (2.3), que maximiza la mínima carga de los vehículos. En este trabajo, los resultados computacionales presentados muestran la matriz de pago correspondiente a estos tres objetivos. Además, se presentan los resultados computacionales para una formulación agregada o relajada del CARP, en la que usamos variables  $x_{ij}^p$  en lugar de  $x_{ij}^{kp}$  y que sólo ha sido calculada para la función objetivo  $f_1$ . La formulación agregada consiste en, como su propio nombre indica, agregar las variables del problema sin distinguir entre los vehículos que realizan cada ruta. Esta propuesta, realizada en otros trabajos (ver, por ejemplo, Gouveia et al. 2010) se debe a que el CARP tiene un número excesivo de restricciones y variables y es una forma de simplificarlo. Esta formulación no es válida para resolver el CARP puesto que al agregar las variables no estamos teniendo en cuenta las restricciones específicas de cada vehículo pero sí que nos proporcionará una cota inferior de  $f_1$ .

Los experimentos computacionales fueron realizados con un hp Pavilion dm4 (Intel *CORE™* i5 - 430M con procesador 2.26 GHz y 2GB RAM) con CPLEX 12.2 usando métodos exactos.

Para probar la eficacia de la formulación propuesta se realizan una serie de experimentos seleccionados de un conjunto de problemas de prueba denominados “mval” (estos problemas pueden encontrarse en Belenguer et al., 2003) que tienen entre 24 y 50 nodos y entre 43 y 138 arcos o aristas todas ellas obligatorias. Dado que en este trabajo se están considerando 2 nodos especiales se han tenido que modificar los problemas de prueba considerando el depósito como el primer nodo y el vertedero como el último nodo por esta razón, los resultados no son comparables con resultados obtenidos en otros trabajos.

El contenido de las columnas de la Tabla 1 es el siguiente:

- $|V|$  es el número de nodos.
- $|A \cup E|$  es el número de arcos y aristas.

- $|A_R|$  es el número de arcos obligatorios.
- $|E_R|$  es el número de aristas obligatorias.
- $P$  es el número máximo de vehículos.
- $W$  es la capacidad máxima de cada vehículo (en estos ejemplos se supone que todos los vehículos son idénticos).
- $f_1$  representa el valor de la función objetivo (2.1).
- $f_2$  representa el valor de la función objetivo (2.2).
- $f_3$  representa el valor de la función objetivo (2.3).
- $f_{1R}$  representa el valor de la función objetivo (2.1) para la formulación agregada.
- CPU representa el tiempo computacional (“tle” indica que se alcanza un límite de media hora. En este caso, el valor obtenido no tiene porque ser el óptimo del problema).

Además, en nuestro caso, el número máximo de viajes permitos es siempre  $K = 3$  (la Figura 1 muestra una idea de cómo es una ruta formada por tres viajes). Por otro lado, para simplificar el problema se consideran  $\lambda = 0$  y  $\mu = 0$ .

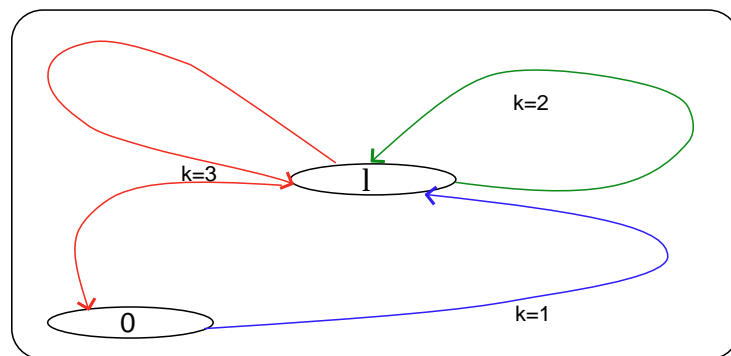


Figura 1. Ruta o Tour.

Tal y como se ha mencionado previamente, los resultados que se presentan en la Tabla 1 muestran la matriz de pago para tres funciones objetivos cuyos objetivos están en conflicto, es decir, un objetivo no puede ser mejorado sin empeorar otro. Los elementos de la matriz de pago se obtienen optimizando cada objetivo individualmente  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  y calculando los valores de las demás funciones objetivos usando el vector de solución de variables de decisión. Los elementos de la diagonal de la matriz de pagos son los valores óptimos para cada objetivo individual conocido como “Punto Ideal”.

A la vista de los resultados el tiempo computacional empleado para el objetivo  $f_1$  es mayor que en los otros dos objetivos en todos los ejemplos. Es fácil ver que cuando en la solución óptima se usa un único vehículo, el vector obtenido optimizando  $f_1$  domina a los vectores de solución obtenidos optimizando  $f_2$  y  $f_3$ , es decir, que para la función considerada el valor óptimo mejora o al menos no empeora el resto de los objetivos. Esto sucede en ocho ejemplos de la Tabla 1. En catorce de los treinta ejemplos de la Tabla 1 el vector obtenido optimizando  $f_3$  domina al vector obtenido optimizando  $f_2$ . El resto de los ejemplos muestran soluciones no dominadas, es decir, que no se puede mejorar un criterio sin empeorar otro.

Obsérvese también, que a pesar de que la formulación agregada no es válida para el CARP, cuando se encuentra una solución óptima para la función objetivo (2.1), se encuentra la misma solución óptima para la formulación agregada y que como es mucho más fácil de resolver el tiempo computacional empleado se reduce considerablemente.



Tabla 1. Resultado computacionales mval.

Archivo	$ N $	$ A \cup E $	$ A_R $	$ E_R $	$P$	$W$	Objetivo	$f_1$	$f_2$	$f_3$	CPU	$f_{1R}$	CPU
1A	24	55	20	35	3	200	$f_1$	225	1	358	12.64	225	0.58
							$f_2$	332	1	358	0.23		
							$f_3$	379	1	358	0.08		
2A	24	44	16	28	2	180	$f_1$	324	1	310	4.29	324	0.22
							$f_2$	448	1	310	0.37		
							$f_3$	729	1	310	0.14		
3A	24	48	15	33	2	80	$f_1$	115	1	137	6.83	115	0.36
							$f_2$	192	1	137	0.72		
							$f_3$	157	1	137	0.05		
4A	41	95	26	69	3	225	$f_1$	574	1	627	1460.67	574	2.90
							$f_2$	639	1	627	4.34		
							$f_3$	698	1	627	0.36		
5A	34	96	22	74	3	220	$f_1$	603	2	277	t1e	597	10.69
							$f_2$	952	1	614	4.52		
							$f_3$	823	1	614	0.27		
6A	31	69	22	47	3	170	$f_1$	339	1	451	t1e	326	3.20
							$f_2$	441	1	451	2.32		
							$f_3$	619	1	451	0.50		
7A	40	86	36	50	3	200	$f_1$	380	2	205	t1e	376	1.18
							$f_2$	500	1	559	3.62		
							$f_3$	542	1	559	0.31		
8A	30	96	20	76	3	200	$f_1$	581	2	167	683.35	581	2.39
							$f_2$	688	1	566	3.40		
							$f_3$	733	1	566	0.19		
9A	50	132	32	100	3	235	$f_1$	463	2	266	t1e	454	10.44
							$f_2$	608	1	654	9.55		
							$f_3$	545	1	654	0.75		
10A	50	138	32	106	3	250	$f_1$	661	3	164	t1e	630	6.62
							$f_2$	843	2	75	7.38		
							$f_3$	1371	2	352	2.90		
1B	24	51	13	38	3	120	$f_1$	277	1	358	112.34	277	1.20
							$f_2$	525	1	358	0.72		
							$f_3$	346	1	358	0.22		
2B	24	52	12	40	3	120	$f_1$	366	1	310	442.82	366	1.44
							$f_2$	499	1	310	1.39		
							$f_3$	443	1	310	0.14		
3B	24	45	16	29	3	50	$f_1$	131	1	137	t1e	131	3.09
							$f_2$	260	1	137	0.84		
							$f_3$	157	1	137	0.13		
4B	41	102	19	83	4	170	$f_1$	632	2	293	t1e	632	6.54
							$f_2$	1702	2	157	3.59		
							$f_3$	1030	2	313	t1e		
5B	34	91	35	56	4	165	$f_1$	625	3	105	t1e	585	22.03
							$f_2$	1445	2	142	7.19		
							$f_3$	1565	2	307	3.59		
6B	31	66	22	44	4	120	$f_1$	318	2	150	t1e	313	1.89
							$f_2$	434	2	160	3.04		
							$f_3$	619	2	225	t1e		
7B	40	91	25	66	4	150	$f_1$	436	2	153	t1e	436	4.26
							$f_2$	1098	2	164	4.87		
							$f_3$	787	2	279	6.27		
8B	30	91	27	64	4	150	$f_1$	527	2	153	t1e	526	3.40
							$f_2$	1336	2	151	7.75		
							$f_3$	906	2	283	1.29		
9B	50	120	44	76	4	175	$f_1$	562	4	52	t1e	455	13.73
							$f_2$	1503	2	226	31.81		
							$f_3$	860	2	327	2.36		

Continuación Tabla 1. Resultados computacionales mval.

Archivo	$ N $	$ A \cup E $	$ A_R $	$ E_R $	$P$	$W$	Objetivo	$f_1$	$f_2$	$f_3$	CPU	$f_{1R}$	CPU
10B	50	134	33	101	4	190	$f_1$	693	3	159	t1e	655	23.70
							$f_2$	1855	2	172	20.61		
							$f_3$	1296	2	352	7.30		
1C	24	53	17	36	8	45	$f_1$	346	7	35	t1e	303	2.46
							$f_2$	533	3	103	8.81		
							$f_3$	657	3	119	t1e		
2C	24	49	14	35	8	40	$f_1$	540	4	31	t1e	430	99.47
							$f_2$	643	3	92	10.05		
							$f_3$	826	3	103	t1e		
3C	24	43	18	25	7	20	$f_1$	129	3	38	t1e	111	16.07
							$f_2$	209	3	23	4.87		
							$f_3$	230	3	45	t1e		
4C	41	103	21	82	5	130	$f_1$	667	4	101	t1e	635	9.19
							$f_2$	1738	2	256	18.98		
							$f_3$	1190	2	313	399.85		
5C	34	98	17	81	5	130	$f_1$	642	3	102	127.89	642	0.34
							$f_2$	1815	2	306	11.95		
							$f_3$	1235	2	307	2.81		
6C	31	68	23	45	10	50	$f_1$	418	6	49	t1e	329	366.37
							$f_2$	1058	4	48	48.34		
							$f_3$	1086	4	112	t1e		
7C	40	90	28	62	9	65	$f_1$	588	5	66	t1e	475	t1e
							$f_2$	800	3	182	16.46		
							$f_3$	1221	3	186	27.33		
8C	30	83	28	55	9	65	$f_1$	694	4	51	t1e	541	13.20
							$f_2$	1973	3	181	42.03		
							$f_3$	1197	3	188	t1e		
9C	50	125	42	83	5	140	$f_1$	570	5	42	t1e	436	1031.98
							$f_2$	1351	2	311	31.22		
							$f_3$	729	2	327	3.67		
10C	50	136	36	100	5	150	$f_1$	813	5	21	t1e	621	21.33
							$f_2$	1731	2	269	55.23		
							$f_3$	1153	2	352	4.60		

## 4 CONCLUSIONES

Existen numerosos trabajos en la literatura sobre problemas de rutas debido a la enorme complejidad de éstos. El diseño de una red de distribución de productos, la recogida de productos o la visita de los mismos juega un papel importante en la gestión de sistemas logísticos ya que su correcta planificación supone un ahorro importante en los costes.

Los cambios económicos sufridos actualmente, los cambios en los patrones de consumo y los cambios en la red viaria del municipio de Sevilla, reflejan serios problemas en la prestación de servicios de recogida de basura, y destacan por su importancia los altos costes del servicio para la recolección, manejo y transporte de

residuos. Por esta razón, este trabajo se ha centrado en modelar el problema de recogida de residuos urbanos en el municipio de Sevilla. Esto se ha hecho mediante una formulación nueva y muy general que puede fácilmente adaptarse a problemas similares y que está basada en variables de flujos como en el modelo propuesto por Gouveia et al. (2010) introduciendo algunas ideas innovadoras.

Al igual que sucede con la mayoría de los problemas reales o prácticos, el problema de recogida de residuos no es posible resolverlo usando los datos reales de la ciudad de Sevilla debido a la complejidad computacional del problema. Por esta razón y para probar la eficacia de la formulación se han seleccionados ejemplos no demasiado complejos de la literatura que son bastante conocidos y se han resuelto de forma exacta usando CPLEX. Además, es importante destacar que los resultados computacionales obtenidos en este trabajo no son comparables con otros resultados computacionales de otros trabajos porque aunque se han usado los mismos problemas, en este trabajo se tienen en cuenta dos nodos especiales (depósito y vertedero) y en otros de trabajos sólo hay un nodo especial (depósito). Actualmente, se está trabajando en un algoritmo aproximado para resolver el problema real de la recogida de residuos en Sevilla.

Hay que destacar que el problema se ha resuelto para tres objetivos diferentes que están en conflicto dando lugar a un conjunto de soluciones óptimas conocidas como soluciones Pareto óptimas. Puesto que ninguna de esas soluciones puede considerarse mejor que otras, la primera tarea en un problema de optimización multi-objetivo como este, es encontrar tantas soluciones Pareto óptimas como sea posible y una vez hecho esto, se podría convertir en un problema de optimización uniobjetivo. Para hacer esto, la empresa debe darnos tanta información como sea posible sobre la importancia de los objetivos o bien las preferencias de estos, según la técnicas que se vayan a usar.

El trabajo desarrollado da pie a posibles líneas futuras de investigación. La primera, será resolver un problema de optimización multi-objetivo usando algoritmos heurísticos o metaheurísticos para el problema real de la recogida de residuos

urbanos en el municipio de Sevilla usando los datos reales que nos ha proporcionado LIPASAM. La segunda, será estudiar la equivalencia de nuestra formulación mediante arcos con la formulación mediante nodos y comparar las soluciones obtenidas. Esto se debe a que como se comentó con anterioridad, el problema de la recogida de residuos puede formularse tanto como un problema de rutas por arcos, teniendo que atravesar un conjunto de calles donde se encuentran situados los contenedores de basura o como un problema de rutas por nodos, teniendo que visitar un conjunto de puntos dónde se encuentra situada la demanda.

## 5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAUTISTA, J.; FERNÁNDEZ E. y PEREIRA J. (2008). “Solving an urban waste collection problem using ants heuristics”. *Computers and Operations Research*, 35 (9), pp. 3020–3033.
- BELENGUER, J.M. y BENAVENT, E. (1998). “The capacitated arc routing problem: Valid Inequalities and Facets”. *Computational Optimization and Applications*, 10 (2), pp. 165–187.
- BELENGUER, J.M. y BENAVENT, E. (2003). “A cutting plane algorithm for the capacitated arc routing problem”. *Computers and Operations Research*, 30 (5), pp. 705–728.
- BELENGUER, J.M.; BENAVENT, E.; LACOMME, P. y PRINS C. (2006). “Lower and upper bounds for the mixed capacitated arc routing problem”. *Computers and Operations Research*, 33 (12), pp. 3363–3383.
- COBERÁN, A.; MARTÍ, R.; MARTÍNEZ, E. y SOLER D. (2002). “The Rural Postman Problem on mixed graphs with turn penalties”. *Computers and Operations Research*, 29 (7), pp. 887–903.

- DROR, M. (2000). “Arc Routing: Theory, Solutions and Applications”. Kluwer Academic Publishing, Boston, MA, USA.
- GHIANI, G.; IMPORTA, G. y LAPORTE, G. (2001). “The Capacitated Arc Routing Problem with Intermediate Facilities”. *Networks*, 37 (3), pp. 134–143.
- GOLDEN, B.L. y WONG, R.T. (1981). “Capacitated arc routing problems”. *Networks*, 11 (3), pp. 305–315.
- GOUVEIA, L.; MOURÃO, M.C. y PINTO, L.S. (2010). “Lower bounds for the mixed capacitated arc routing problem”. *Computers and Operations Research*, 37 (4), pp. 692–699.